

A gördeszkázás leírásához legegyszerűbb esetben is szükséges két darab kinematikai kényszer figyelembevétele, hiszen a gördeszka pályáját befolyásolja annak megdőlése a kerekek tengelyének elfordulásán keresztül. Így anélkül, hogy modelleznénk a kerekeket a probléma kezelhető az 1. ábrán az F (első) és R (hátsó) pontokban látható anholonom (kinematikai) kényszerek figyelembevételével. Az úgynevezett kormányzási (δ_S) szög és a deszka megbillentésének szöge (φ) közti kapcsolat egyszerűen kifejezhető (lásd [2, 3]):

$$\tan \delta_S = \sin \varphi \tan \kappa , \quad (1)$$

ahol κ a gördeszka felfüggesztését jellemző paraméter.

Mivel a gördeszkázást egy adott sebesség (V , értsd a gördeszka hosszirányú sebessége) mellett vizsgáljuk, így felmerül annak a lehetősége is, hogy kibővítsük a modellt még egy kinematikai kényszerrel, amely megadja, hogy a gördeszka hosszirányú sebessége állandó nagyságú. Ezen kényszer figyelembevétele a gördeszka kis laterális mozgásokra érvényes dinamikáját nem befolyásolja, míg a rendszert leíró állapotér dimenzióját csökkenti.

Az alkalmazott mechanikai modell a kinematikai kényszerek mellett, az egyszerűsítésre való törekvés érdekében, két darab tömeg nélküli rudat tartalmaz, melyek mereven kapcsolódnak egymáshoz az S pontban: FR a gördeszkát modellezi, melynek hossza $2l$ és CS pedig a gördeszkázó személyt, aki $2h$ magas. A gördeszkás tömegét a CS rúd szabad végén található tömegpont (m) hivatott reprezentálni. A kerekek felfüggesztéséből adódó merevséget egy keményedő nemlineáris karakterisztikájú (sinh) torziós rugó s_t modellezi, míg az a paraméter segítségével a gördeszkásnak a deszkán lévő pozíciója adható meg. Az így kapott modell hasonlít egy inverz ingához, melynek mozgását sebesség kényszerek befolyásolják.

Az egyszerűség kedvéért azt feltételezzük, hogy a gördeszka nem válik el a talajtól, ez a mechanikai modellben geometriai kényszerként jelenik meg, így mindössze 4 általános koordináta elegendő a modell egyértelmű leírásához. Ezek rendre: X és Y az S pont helyének koordinátái az $X - Y$ síkon, ψ a deszka és az X tengely által bezárt szög, míg φ a gördeszkás és a függőleges irány által bezárt szög, ami a merev kapcsolat miatt megegyezik a gördeszka billentési szögével. A mozgást a már említett kinematikai (anholonom) kényszerek is befolyásolják, így a mozgásegyenletek származtatásához a Gibbs–Appell-egyenletek [5] használhatók, melyek kompaktabb formában (elsőrendű alakban) szolgáltatják a dinamikai egyenleteket szemben a Routh–Voss-egyenletekkel [5], vagy az elsőfajú Lagrange-egyenletekkel. A mozgásegyenletek részletes levezetését nem (levezetést lásd [3]) csupán azok végső kompakt alakját közöljük:

$$\dot{\sigma} = \alpha_g^2 \sin \varphi - \alpha_{s_t}^2 \sinh \varphi + \frac{1}{2} \alpha_V^2 \theta_h (\theta_h \sin^2 \varphi - 1) \sin(2\varphi) - \alpha_V \theta_a (1 - \sin^2 \varphi) \sigma , \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = \sigma , \quad (3)$$

$$\frac{\dot{X}}{h} = \alpha_V (\cos \psi + \theta_a \sin \varphi \sin \psi) , \quad (4)$$

$$\frac{\dot{Y}}{h} = \alpha_V (\sin \psi - \theta_a \sin \varphi \cos \psi) , \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = -\alpha_V \theta_h \sin \varphi , \quad (6)$$

ahol $\alpha_g^2 := g/h$, $\alpha_V := V/h$, $\alpha_{s_t}^2 := s_t/(mh^2)$ körfrekvencia dimenziójú mennyiségek, illetve $\theta_a = al^{-1} \tan \kappa$ és $\theta_h = hl^{-1} \tan \kappa$ dimenziótlan paraméterek. Az egyenletekben szereplő $\sigma := \dot{\varphi}$ a gördeszkás dőlési szögsebessége, amely a Gibbs–Appell-módszer során bevezetett úgynevezett pszeudosebességeknek felel meg.

Megfigyelhető, hogy X , Y és ψ ciklikus koordináták, tehát a további vizsgálatokhoz a (4), (5) és (6) egyenletek nem szükségesek.

3. EGYENSÚLYI MOZGÁSOK ÉS STABILITÁSUK VIZSGÁLATA KONZERVATÍV ESETBEN

Az egyenletek levezetése során csak ideális kényszereket használtunk, tehát minden kényszererő virtuális teljesítménye zérus. Mindez persze nem jelenti azt, hogy a kényszererők valódi teljesítménye is zérus. Belátható, hogy az állandó sebességkényszer fenntartásához szükséges erőnek csak akkor van potenciálfüggvénye, ha a gördeszkás a gördeszka közepén áll, tehát $a = 0$. Mivel a kényszereken kívül csak olyan külső erők hatnak melyek rendelkeznek potenciálfüggvénnyel ezért $a = 0$ esetén a rendszer konzervatív. Ebben a fejezetben ezt az esetet vizsgáljuk tovább.

Egyensúlyi mozgásokat akkor találhatunk, ha a ciklikus koordinátákra vonatkozó egyenletek leválasztása után maradó egyenletrendszerben az állapotváltozók (σ , φ) idő szerinti deriváltjait zérusnak tekintve megoldjuk az így keletkező algebrai nemlineáris egyenletrendszert. Ez a nemlineáris egyenletrendszer a következő formára hozható:

$$\sigma = 0 , \quad (7)$$

$$\alpha_{s_t}^2 \sinh \varphi = \alpha_g^2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \alpha_V^2 \theta_h \sin(2\varphi) (\theta_h \sin^2 \varphi - 1) . \quad (8)$$

Itt megjegyzendő, hogy ha hosszirányú sebességkényszert nem vettük volna figyelembe akkor is ugyanezeket az egyensúlyi megoldásokat kaptuk volna, csak az egyenletek bonyolultabb struktúrája miatt a további nemlineáris viselkedések felderítése lenne nehezebb (abban az esetben 3 nem ciklikus állapotváltozónk marad, melyek már egy 3 dimenziós teret feszítenek ki, ellentétben a mostani 2 dimenziós állapottérrel).

A (7) egyenlet fizikai jelentése szemléletes, hiszen ez azt jelenti, hogy azt tekintjük egyensúlyi mozgásnak, melynek során a gördeszkás dőlési szöge nem változik.

A további vizsgálatokhoz tekintsük a $\theta_h = 4$ paraméter értéket, mivel így egy egyszerűbb és analitikus megoldást kaphatunk. Belátható, hogy ezen választás jól modellezi a valóságot, mivel az 1. táblázatban szereplő adatokkal θ_h értéke 4.23728 [–] adódik. A táblázatban megadott, gördeszkára vonatkozó adatok egyébként egy valós gördeszkát tükröznek (gördeszka típusa: REBEL, a gördeszka hossza 31", szélessége 8").

h	m	g	l	κ
[m]	[kg]	[ms ⁻²]	[m]	[°]
0.85	75	9.81	0.3937	63

1. táblázat. A gördeszkás és a gördeszka paramétere

Tehát, $\theta_h = 4$ esetén a (8) egyenlet átalakítható:

$$\sinh \varphi = \zeta_g \sin \varphi + 2\zeta_V (\sin(2\varphi) - \sin(4\varphi)) , \quad (9)$$

ahol ζ_g az arányát jelképezi a *maximális potenciális energiának és egy a rugóban tárolt energiával arányos* mennyiségnek, míg ζ_V szintén egy arányszámot mutat meg a *transzlációs mozgási energia és a rugóban tárolt energiával arányos* mennyiség között:

$$\zeta_g = \frac{\alpha_g^2}{\alpha_{s_t}^2} = \frac{mgh}{s_t}, \quad \zeta_V = \frac{\alpha_V^2}{\alpha_{s_t}^2} = \frac{mV^2}{s_t} . \quad (10)$$

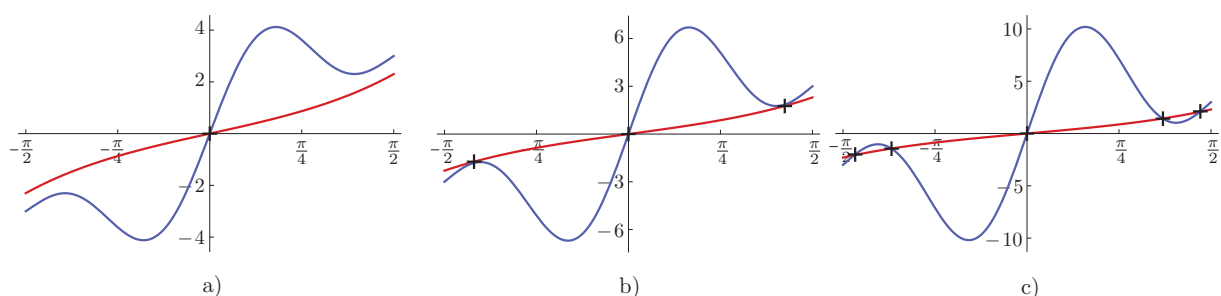
A (9) egyenletet megoldhatjuk grafikusán is (lásd 2. ábra). Az egyszerűség kedvéért a (9) egyenlet bal oldalát elnevezzük $f(\varphi)$ -nek, míg a jobb oldalát $g(\varphi)$ -nek, vagyis:

$$f(\varphi) = \sinh \varphi , \quad (11)$$

$$g(\varphi) = \zeta_g \sin \varphi + 2\zeta_V (\sin(2\varphi) - \sin(4\varphi)) . \quad (12)$$

A 2. ábrán a piros görbe az $f(\varphi)$, míg a kék a $g(\varphi)$ függvényt mutatja. A $\varphi = 0$ tetszőleges paraméterválasztás mellett kielégíti a (9) egyenletet. Belátható, hogy ezen egyensúlyi helyzet Lyapunov értelemben stabilis akkor és csak akkor, ha:

$$1 > \zeta_g - 4\zeta_V . \quad (13)$$



2. ábra. A (9) egyenlet grafikus reprezentációja a) 1 megoldás b) 3 megoldás – a görbék éppen érintik egymást c) 5 megoldás

Az egyensúlyi helyzetek (f és g görbék metszéspontjai) száma akkor változik meg egy paraméter változtatása mellett, ha a két görbe éppen érinti egymást. Ebben az esetben mind a függvényérték, mind pedig a meredekségek megegyeznek, tehát:

$$f(\varphi) = g(\varphi) \quad \text{és} \quad \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dg(\varphi)}{d\varphi} . \quad (14)$$

A feltételekből kifejezhetők az *energia-arányok* (ζ_g és ζ_V) a φ függvényében:

$$\zeta_g = \frac{\cosh(\varphi) (\sin(4\varphi) - \sin(2\varphi)) + 2 (\cos(2\varphi) - 2 \cos(4\varphi)) \sinh \varphi}{\sin^3 \varphi (6 + 12 \cos(2\varphi))}, \quad (15)$$

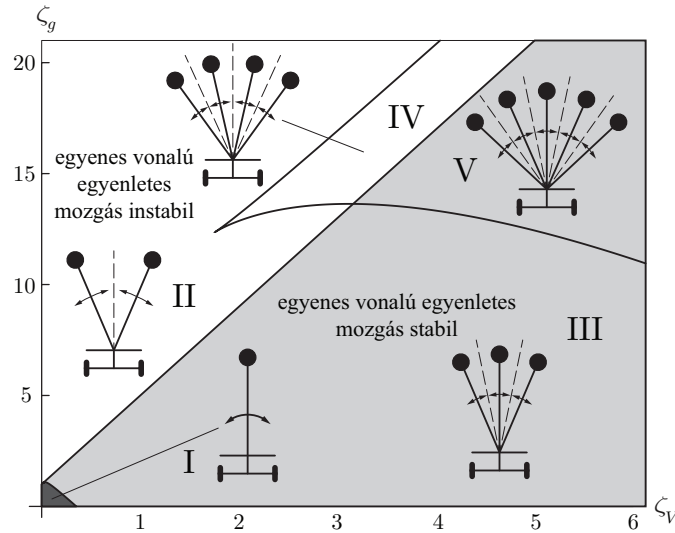
$$\zeta_V = \frac{\cosh \varphi - \cot \varphi \sinh \varphi}{2 \sin^2 \varphi (6 + 12 \cos(2\varphi))}. \quad (16)$$

Ezzel megvizsgálásra került azon eset amikor a vizsgált tartományban új gyökök keletkeznek. Itt megjegyzendő, hogy ha az új gyökök valamely "nagy" φ értéknél keletkeznek, azok már irrelevánsak lehetnek a vizsgálatunk szempontjából. Keressük tehát a ζ_V - ζ_g paraméterek azon tartományát, ahol a legszélső egyensúlyi helyzet is a $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$ tartományba esik. Ezen kritériumunk ζ_g paraméterre az alábbi kritikus értéket szolgáltatja:

$$\zeta_g = \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.3013. \quad (17)$$

Bár a gördeszkás megdőlési szögére felvett értelmezési tartomány önkényesnek tűnik, ennél nagyobb szögek vizsgálata már biztos, hogy nem értelmezhető fizikailag. A továbbiakban megkonstruált stabilitási térkép értelmezésénél tehát tekintettel kell lenni rá, hogy a $\zeta_g > 2.3013$ tartományok már fizikailag nem értelmezhető egyensúlyi megoldásokat is tartalmazhatnak.

A 3. ábrán látható a rendszer stabilitási térképe, ahol a szürkített tartományban az egyenes vonalú egyenletes mozgás Lyapunov értelemben stabilis. A térképen berajzolt határok az eltérő számú egyensúlyi mozgásokat tartalmazó tartományokat határolják. A különböző egyensúlyi helyzetek lineáris stabilitása megvizsgálható egyenként. A fejezetben vizsgált esetben ($a = 0$) a rendszer konzervatív, tehát csak nyergeket, illetve centrumokat tartalmazhat.



3. ábra. A fázissík különböző tartományai

A 3. ábrán látható különböző római számok azon felül, hogy a különböző tartományokat azonosítják a stabil egyensúlyi helyzetek számát is mutatják. A különböző tartományokhoz tartozó tipikus fázissíkok a 4. ábrán láthatóak, ahol a fekete vonalak a nyeregpontokhoz tartozó szeparátrixokat jelölik.

Látható, hogy a gördeszkás szempontjából a legkedvezőbb helyzet az I tartományban áll elő, hiszen ekkor csak egyetlen stabil egyensúlyi helyzet létezik. Tehát tetszőleges nagy perturbáció esetén is az egyenes vonalú mozgás körül alakul ki rezgés és ezen mozgás globálisan nézve is stabilis.

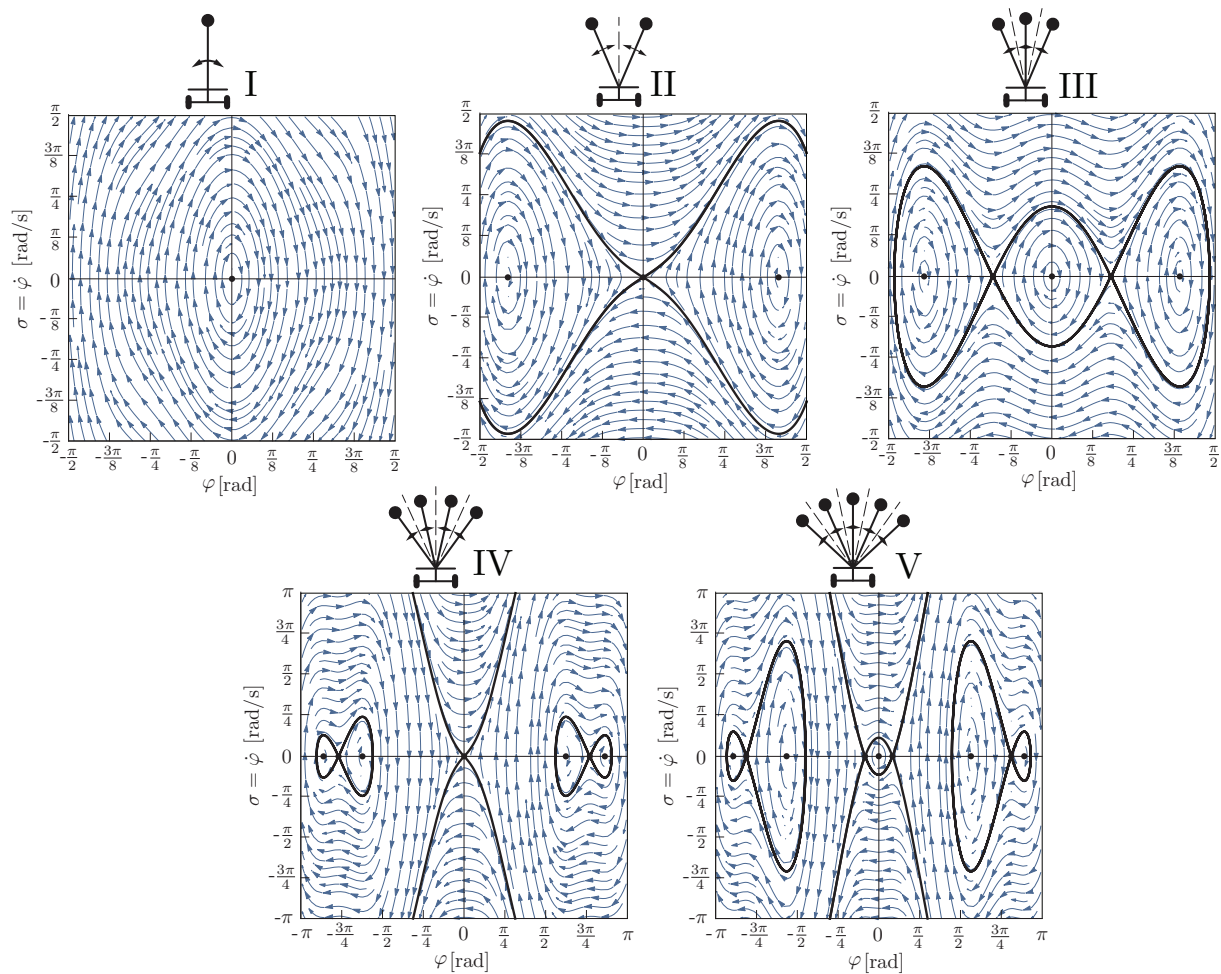
A globális viselkedés megértéséhez először megvizsgáljuk azt, hogy az egyes rendszerparaméterek változása miként képzelhető el ζ_V - ζ_g dimenziótlan paramétersíkon. A gördeszkás tömegének (m) növelésével egy az origón átmenő egyenesen mozoghatunk távolodva az origótól, míg a felfüggesztés merevségének (s_t) növelése ugyanazon egyenes mentén az origó irányába történő mozgásnak felel meg. A V sebesség növelésével a ζ_V paraméter négyzetesen növekszik, míg ζ_g változatlan marad, azaz egy vízszintes egyenesen mozogunk. A gördeszkás magasságát (h) nem variálhatjuk szabadon, hiszen a 3. ábra alkotása során felhasználtuk, hogy $\theta_h = 4$, így ha a magasság növekszik, akkor a gördeszka félhosszának (l) is növekednie kell. Tehát mind a h illetve l paraméterek kölcsönös növelése biztosítja a $\theta_h = 11$. kritériumot miközben egy függőleges egyenes mentén mozogunk el a nagyobb ζ_g paraméterek irányába. A gördeszka felfüggesztésében lévő κ szög, illetve a nehézségi gyorsulás (g) változásának vizsgálatától jelen tanulmányban eltekintünk.

Lineáris stabilitási vizsgálatokból kiderül [2], hogy a sebességnek stabilizáló hatása van. Minél nagyobb a gördeszka hosszirányú sebessége annál kisebb rugómerevségre van szükség a függőleges egyensúlyi helyzet stabilitásához. Egy árnyaltabb képet kaphatunk a sebesség hatásáról, ha az I tartományból kiindulva növeljük a sebességet, tehát egy vízszintes egyenesen mozgunk a térképen jobbra. Egy meghatározott sebességérték felett átlépünk a III tartományba, ahol az egyenes vonalú egyenletes mozgás továbbra is stabil, de egy úgynevezett *kancsófül* bifurkáción keresztül megjelenik még négy egyensúlyi helyzet, két-két nyereg illetve centrum típusú. A 3. ábrán piktogramok illusztrálják gördeszka különböző egyensúlyi mozgásait. A nyereg típusú egyensúlyi helyzeteket szaggatott vonallal, míg a centrum típusúakat folytonos vonallal jelöltük.

A sebesség növelésével az egyenes vonalú egyenletes mozgás ugyan stabil marad, de egy kellően nagy zavarás hatására már egy másik stabil egyensúlyi mozgás (körpályán való mozgás) körül alakul ki a gördeszka rezgő mozgása.

Az I tartományból kiindulva közvetlenül el lehet jutni a II tartományba a gördeszka magasságának (ezzel együtt a gördeszka hosszának) növelésével egy úgynevezett *vasvilla*-bifurkációnk keresztül. Az átmenet a II és III tartományok között komplikáltabb. A II tartományból kiindulva eljuthatunk a III tartományba például pusztán a sebesség növelésével (vízszintes mozgással), amelynek során az egyenes vonalú egyenletes mozgáshoz tartozó nyereg típusú $\varphi = 0$ egyensúlyi helyzet szétválik két nyereggé és egy centrummá, ezzel stabilá téve a triviális megoldást.

A II és IV, valamint a III és V tartományok közti átmenet során (mindig a kevesebb egyensúlyi helyzettől a több egyensúlyi helyzet felé haladva) pedig a szélső centrum típusú egyensúlyi helyzetek válnak szét két centrum típusú valamint egy nyereg típusú egyensúlyi helyé *vasvilla* típusú bifurkációszerűen.



4. ábra. A jellegzetes fázissíkok

4. EGYENSÚLYI MOZGÁSOK ÉS STABILITÁSUK VIZSGÁLATA NEM KONZERVATÍV ESETBEN

Nem konzervatív esetben, tehát amikor a gördeszkás nem pontosan középen áll ($a \neq 0$), az egyensúlyi helyek ugyanott helyezkednek el a fázissíkon, mint a konzervatív esetben. Mindez következik abból, hogy a (7) és (8) egyenletek függetlenek az a -t tartalmazó θ_a paramétertől. Fontos megjegyezni azonban, hogy az egyensúlyi mozgások stabilitása függ a gördeszkás gördeszkán lévő pozíciójától.

Lineáris stabilitási vizsgálattal belátható, hogy az egyenes vonalú egyenletes mozgás csak akkor lehet aszimptotikus értelemben stabilis, ha a deszkás a deszka geometriai középpontja előtt áll, tehát $a > 0$ (lásd [2]). Amennyiben a (13) feltétel teljesül, mely elképzelhető egy sebesség korlátnak, akkor a φ - σ fázissíkon stabil fókusz, míg $a < 0$ esetben instabil fókusz jelenik meg, a nyereg típusú egyensúlyi helyzetek pedig változatlanok. Tehát a 3. ábrán látható stabilitási határok nem változnak csak az egyes tartományokban lévő egyensúlyi mozgások stabilitása az a paraméter függvényében módosul.

5. HATÁRCIKLUSOK LÉTEZÉSE

A fázissíknak egy egyszeresen összefüggő vizsgált tartományán létezik határciklus, ha az úgynevezett *Bendixon függvény* (\mathcal{B}) előjelet vált vagy értéke azonosan zérus. Ezen függvény a definíció alapján számítható:

$$\mathcal{B}(\varphi, \sigma) := \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi}, \quad (18)$$

a mi esetünkben ez:

$$\mathcal{B}(\varphi, \sigma) = -\alpha_V \theta_a \cos^2 \varphi. \quad (19)$$

Ez a függvény tetszőleges $\sigma \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén pozitív csupán a $\varphi = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ diszkrét értékeknél vesz fel nulla értéket. Tehát nem létezhet határciklus a teljes fázissíkon, így az általunk vizsgált tartományon sem.

Ezzel beláttuk, hogy nem csak a hamiltoni (konzervatív) rendszerben nem létezhet határciklus, hanem a nem konzervatív esetben sem.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

A gördeszkázás globális dinamikájának vizsgálata során beláttuk, hogy a mozgásokat csak az egyensúlyi mozgások határozzák meg, hiszen határciklus nem alakulhat ki. Megmutattuk, hogy létezik egy olyan, alacsony sebességi tartomány, ahol az egyenes vonalú egyenletes mozgás az egyetlen egyensúlyi mozgás és az stabil, ha a gördeszkás a deszka középpontja előtt áll. A gördeszkás szempontjából ez a legkedvezőbb eset, hiszen ezen egyensúlyi mozgás stabil marad tetszőleges zavarás esetére is. Ezen tartományban tehát nagy amplitúdóval járó manőverek (például kikerülő manőver) is megengedettek. A sebesség növekedésével további egyensúlyi helyzetek jelennek meg, következésképpen, nagy zavarások *oldalsó* egyensúlyi helyzet (körpálya) körüli rezgésekhez vezethetnek. Modellünk segítségével az is belátható, hogy minél magasabb a gördeszkás, tehát ζ_g paraméter minél nagyobb, annál közelebb helyezkednek el a stabil egyensúlyi helyzetet körülvevő instabil egyensúlyi helyzetek. Tehát a magasság növelése mind az egyenes vonalú egyenletes mozgás stabilitására, mind pedig a globális viselkedésre rossz hatással van.

A 3. ábrán látható stabilitási térkép azt is megvilágítja, hogy a gördeszka hosszirányú sebessége eltérően befolyásolja a gördeszka globális stabilitását a különböző ζ_g értékek esetén. Míg kis ζ_g esetén a sebesség növekedése globálisan ront a stabilitáson, hiszen további egyensúlyi mozgások megjelenését eredményezi, addig nagy ζ_g mellett az instabil egyenes vonalú mozgást stabilizálja.

Vizsgálatunk alapján kijelenthető, hogy létezik egy a stabilitás szempontjából optimálisnak nevezhető sebesség-tartomány, ahol az egyenes vonalú egyenletes mozgás globálisan stabil. Sajnos ez az állapot azonban tetszőleges paraméterek mellett nem biztosítható.

Köszönetnyilvánítás: A szerzők köszönetüket fejezik ki az OTKA PD105442 projekt keretében kapott támogatásért. A kutatás részben a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készült.

HIVATKOZÁSOK

- [1] M. HUBBARD. Human control of the skateboard, *Journal of Biomechanics*, 13:745-754, 1980
- [2] A. KREMNEV, A. KULSEHOV. Dynamics and simulation of the simplest model of skateboard, *In Proceedings of Sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference* Saint Petersburg, Russia 2008.
- [3] B. VARSZEGI, D. TAKACS, G. STEPAN, S. J. HOGAN. Balancing of the skateboard with reflex delay, *In Proceedings of Eighth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, ENOC2014*, Vienna, Austria, 2014.
- [4] M. WISSE, A. SCHWAB. Skateboard, bicycles, and three-dimensional biped walking machines: Velocity-dependent stability by means of lean-to-yaw coupling, *The International Journal of Robotics Research*, 24(6):417-429, 2005.
- [5] F. GANTMACHER. *Lectures in Analytical Mechanics*, MIR Publisher, Moscow, Russia, 1975