



DIPLOMATERV

**Várszegi Balázs
2015**

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
Gazdaság- és Társadalomtudományi Kar
Pénzügy mesterszak

A tőkefelhalmozás időbelisége és a gazdasági növekedés kapcsolata

Avagy a gazdasági növekedés kezdetének modellje

Készítette: VÁRSZEGI BALÁZS

Témavezető: Dr. Dombi Ákos

Budapest
2015

Tartalmi kivonat

Jelen dolgozat a gazdasági növekedést hivatott tanulmányozni, matematikai modellek módszertanán keresztül. A vizsgálat fő célja az, hogy az eddig kevésbé számításba vett addicionális dinamikákat is figyelembe vevő, lehető legegyszerűbb közgazdasági modellt állítsunk fel. Amelyből létrehozható egy matematikai modell, aminek segítségével a gazdaság folyamatai feltárásra kerülhetnek.

A dolgozat olyan dinamikákra koncentrál, mint amik azt írják le, hogy a már a gazdaságban létező tőkéből és munkából hogyan lesz valóban kibocsátás, GDP, ezáltal jövedelem, mely fontos tényezője jólétnek. Ezalatt akár érthető a gazdaság fejlettsége is. Ezeket a dinamikákat egy koncentrált paraméter segítségével igyekszik magyarázni, amely az időkésés lesz.

A vizsgálat az egyszerű neoklasszikus modellből indul ki, ezt bővíti a már említett dinamikákat modellező új paraméterrel, a késéssel, ezzel létrehozva egy késleltetett differenciálegyenlettel operáló matematikai modellt az eredeti közönséges differenciálegyenlethez képest. Ezzel a megoldással a modell maga folytonos marad, mely jól illeszkedik az eddigi modellek sorába. Ezután, a szakirodalomból jól ismert egyszerű modellek is sorra kerülnek, mint az exogén technikai haladással bővített neoklasszikus modell, az AK modell, illetve a Mankiw – Romer – Weil - modell.

A késleltetett modellekből nyert eredmények a dolgozat során összehasonlításra kerülnek a késleltetést nem tartalmazóval. Ennek összefüggésében a modell azt eredményezi, hogy ezen dinamikáknak akár nagy hatásuk is lehet, mind az egyensúlyi kibocsátásra, mind a konvergencia sebességre nézve. Ez a hatás, általában csökkenti az egyensúlyi kibocsátást, illetve a konvergencia sebességet is, mégpedig annál nagyobb mértékben minél nagyobb a késés a modellben. Azt, hogy növelheti-e az adott modell függő, fontos az, hogy az amortizáció késleltetve vagy azonnal jelenik meg. Dinamikus stabilitásvesztés csak az előbbi esetben léphet fel, vagyis késleltetett amortizáció esetén. Ez a fajta stabilitásvesztés vezet stabil határciklus létezéséhez, mely magyarázhatja a konjunktúraciklusokat.

Ezzel részben magyarázni tudjuk a világban kialakuló jövedelmi diszparitásokat, hogy a fejletlenebb országok miért rendelkeznek más jövedelemszinttel, illetve azt is, hogy a konvergencia sebesség a méréseknek megegyezően kisebb, mint amit a Solow–Swan-modell szolgáltat. Ezenfelül ha arra gondolunk, hogy a gazdasági növekedés a 17. századdal bezárólag miért volt szinte elenyésző akkor ez is magyarázható azzal, hogy a gazdasági mechanizmusok akkoriban jelentősen lassabban mentek végbe, jelentősen több időt vett igénybe a tőke összegyűjtése, az építkezések is lassabban történtek. Ezen paraméterekre a modell azt eredményezi, hogy az egyensúlyi helyzet is csekély, de az ahhoz tartó konvergencia is nagyon lassú, tehát a gazdasági növekedés szinte elenyésző.

Abstract

In this paper the economic growth is studied through mathematical models. The main goal of the paper is to create an economical model what considers additional dynamics in economics. After this a mathematical model is created from the economical one, with the help of it we are able to discover these dynamics.

We consider dynamics like how the mechanism of existing capital and labour can imply GDP, thereby incomes, which is a relevant factor of welfare. By this mean it can be the state of development of the economy. This model describes these complicated dynamics with one concentrated parameter.

In our analysis, the Solow-Swan model is taken as a starting point. It had been amplified by only one parameter, one so-called point delay, which one describes the already mentioned dynamics. This turns the Solow-Swan's ordinary differential equation (ODE) model into a delayed differential equation (DDE) model from mathematical point of view. The continuous property has been kept, what is an advantage of this model. Then, the same improvement is made on several simple models, for example: where the technology is introduced, or the AK model, or the Mankiw – Romer – Weil model.

The results, which are given by the model, are compared to the original Solow-Swan model's same consequent. This dynamics, represented by the delay, can have a huge effect on the steady-state level of GDP and on the speed of convergence. This effect means usually that the steady-state level of GDP and the speed of convergence decrease as the delay increases. Which means the better the economy, the lower the delay. But, in same setups, it may occur that the steady state increases while the delay increases too. This phenomenon characterized by the consideration of the amortization, whether it is delayed or not. One can find Hopf-bifurcation only in the delayed amortization case. This dynamic stability loss can lead to a stable limit cycle, what can explain business cycles.

The constructed model can explain the income disparities on the world, namely why several countries have higher level of income than others. There is another result of this model, it can predict less speed of convergence than the Solow-Swan model. It is also able to give an answer for the question why there was not economic growth until the end of the seventeenth century. If we take account, that the efficiency of the economy was poor at that time, thus the delay must be big, this means the collecting of the capital took a long time. This model gives tiny steady-state level of GDP and gives also small speed of convergence for big delay parameter.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	6
2. A tőkefelhalmozás modellje.....	8
2.1. Termelési függvény időbelisége.....	8
2.2. Mozgási egyenlet meghatározása.....	9
2.3. Egyensúlyi helyzetek meghatározása	11
2.4. A triviális megoldás lineáris stabilitása.....	13
2.5. A nem triviális egyensúlyi helyzet és a körülötte lévő dinamika.....	13
2.5.1. Stabilitás azonnali tőkeamortizáció esetén.....	13
2.5.2. Konvergencia sebesség azonnali tőkeamortizáció esetén	16
2.5.3. Stabilitás késleltetett amortizáció esetén.....	21
2.5.4. Konvergencia sebesség késleltetett amortizáció esetén	23
2.5.5. Azonnali amortizáció és késleltetett amortizáció összehasonlítása	24
3. Technikai haladás.....	26
3.1. Technológia figyelembevételének lehetőségei.....	26
3.1.1. Harrod - féle semlegesség	26
3.1.2. Hicks - féle semlegesség	26
3.1.3. Solow - féle semlegesség	27
3.2. Mozgási egyenlet meghatározása.....	28
3.3. A steady state és a konvergencia feltétele.....	29
3.3.1. Egyensúlyi helyzet meghatározása.....	29
3.3.2. Azonnali tőkeamortizáció esete.....	29
3.3.3. Késleltetett tőkeamortizáció esete	30
3.4. Exogén technológia bevezetésének eredményei	31
4. Időkésés az AK modellben	32
4.1. Mozgási egyenlet meghatározása.....	32
4.2. A steady state és növekedési ütem	32
4.2.1. Egyensúlyi helyzet meghatározása.....	32
4.2.2. Azonnali tőkeamortizáció esete.....	33
4.2.3. Késleltetett tőkeamortizáció esete.....	34
4.3. Technikai haladás az AK modellben.....	35
4.4. AK modell eredményei	35
5. Humántőke hatása	37
5.1. Mozgási egyenlet meghatározása.....	37
5.2. A steady state és a konvergencia feltétele.....	37
5.2.1. Egyensúlyi helyzet meghatározása.....	37
5.2.2. Azonnali tőkeamortizáció esete.....	38
5.2.3. Késleltetett tőkeamortizáció esete.....	39
5.3. Technikai haladás az MRW modellben.....	41
5.4. Humán tőke bevezetésének eredményei.....	41
6. Összefoglalás	43
7. Irodalomjegyzék.....	46
8. Melléklet	49
8.1. Numerikus szimulációk tőkefelhalmozás modelljéhez	49
8.2. Numerikus szimulációk A technológiai haladás modelljéhez.....	49
8.3. Numerikus szimulációk AK modellhez	50
8.4. Numerikus szimulációk a humántőke hatására	51
8.5. Karakterisztikus egyenlet valós és képzetes része (MRW).....	52

1. BEVEZETÉS

A gazdasági növekedés egy már régóta kutatott téma a közgazdászok között, a 2007-ben kirobbant gazdasági válság óta még jobban felértékelődött annak fontossága, hogy a gazdasági növekedést leírassuk megfelelő modellekkel. Ezzel az olyan egyszerű modellek felértékelődnek, melyekkel megfelelő pontossággal le lehet írni a gazdasági növekedést.

A gazdasági folyamatokban akár jelentős hatást is okozhatnak azok a dinamikák, melyeket az egyszerű modellekben a megfelelő matematikai kezelhetőség és az eredmények értelmezhetősége érdekében elhanyagolunk. Ilyenek lehetnek például azok, amelyeket elhanyagolunk akkor, amikor azt feltételezzük, hogy a hatalmas tőkeinjekciók (például FED Quantitative easing) azonnal kifejtik hatásukat a gazdaságban. Ezt a mechanizmust okozhatja a pénzügyi rendszer fejlettsége, vagy akár önmagában a gazdaság fejlettsége is.

Ezen dinamikák vizsgálata nagyon nehézkes, sokkal komplikáltabbá tenné a leíró modelljeinket, mivel feltételezne még változókat, melyek növelnék a probléma méretét. Ennek az lenne a következménye, hogy a modell által szolgáltatott eredmények már-már értelmezhetetlenné válnak. Ehelyett itt egyetlenegy paraméterrel operálunk mindezek leírására, egy késéssel, miszerint a gazdaságban lévő tőke és munka csak később befolyásolja a kibocsátást, tehát később éreztetni hatását. Természetesen ezen meg gondolás is bonyolítja a modellen, de a magyarázó erejét nem veszíti el.

Ezen modellek alkalmasak lehetnek a konjunktúraciklusok magyarázatára, amennyiben a felállított modellekben található Hopf-bifurkáció (lásd Kuznetsov (1998)). Hiszen ilyen stabilitási határok mentén kialakulhatnak határciklusok, melyek lehetnek stabil, illetve instabil periodikus pályák. Amennyiben az előbbi eset áll fenn, akkor az eredeti egyensúlyi helyzet instabillá válik, és az időfüggvény ezen érték körül ingadozik. Ilyen jelenségek feltárása a gazdaságban egy aktívan kutatott terület napjainkban, ezt bizonyítja, hogy számos publikáció lát napvilágot ebben a témában, a teljesség igénye nélkül lásd például: Szydłowski (2003); Krawiec & Szydłowski (2009); Guerrini (2012c); Bianca et al. (2013); Bianca & Guerrini (2014) vagy Ferrara et al. (2014). Ilyen határciklusok egy dimenziós (egy független változóval rendelkező) közönséges differenciálegyenletekben nem alakulhatnak ki, de az időkésés bevezetésével erre lehetőség nyílik. Az időkésés hatására kialakuló stabil határciklus megfigyelhető például az emberi egyensúlyozás egyszerű modellje esetében is (ld. Stépán (2009)), emellett hasonló eredmények lehettek fel többek között a vadász-préda modellben is (ld. Faria (2001))

Ezen modelleknek létezik szakirodalma, mint például Asea és Zak (1997), ahol a vizsgálatokat a fundamentális egyenlettől kezdik, nem pedig a gazdasági modelltől, amivel elfednek egyébként felmerülő problémákat. Egy olasz szerző, Guerrini (2012a) is felállított egy ilyen modellt, melyben levezeti a fundamentális egyenletet is. Ezen publikáció esetén egy hiba került elkövetésre a kalkuláció

során, mely kihat a végkövetkeztetésre is, ezt a cikket a szerző hivatkozza későbbi írásai során lásd: Guerrini (2013a) és (2013b). Ez a szerző egy publikációja során (lásd Guerrini (2012c)) egy időkésllettett AK modellt is vizsgált, de ebben az esetben is csak közli a fundamentális egyenletet, melynek származtatása nem világos. Dolgozatomnak egyik motivációja ezen eredmények tisztázása.

Jelen dolgozat támaszkodik a Solow–Swan-féle modell ismeretére, lásd Barro et al. (2005) és ezen felül minimális szinten támaszkodik az olvasó matematikai alapjaira, azon belül is a differenciálegyenletek elméleteire, lásd Arnol'd (1992). Ez indokolja azt, hogy egyéb területeken a dolgozatban részletesen kifejtem a lépéseket, ahol ez mégsem lehetséges, ott feltüntetem a vonatkozó szakirodalmat.

A dolgozat 6 fő egységre tagolódik. Az 1. fejezetben a téma fontosságát vettem górcső alá, illetve a motivációmát fejtettem ki a dolgozat elkészítéséhez. A 2. fejezetben a legegyszerűbb neoklasszikus modellek egyikén keresztül kerül bemutatásra az időkésés hatása, különválasztva az azonnali és késleltetett tőkeamortizáció esetét. Az időkésés és egyéb paraméterek hatását úgynevezett stabilitási térképeken, illetve diagramokon keresztül szemléltetem az analitikus számítások mellett. Ez a matematikai reprezentáció nagy előnye a dolgozatnak, hiszen így egyszerűen lehet elemezni a bonyolultabb struktúrákat is. A 3. fejezetben az előbb bemutatott modellt bővíttem ki exogén technikai haladással, míg a 4. fejezetben az AK modelleket vizsgálom időkésés szempontjából. Végül az 5. fejezetben a humán tőkével kibővített neoklasszikus modellt elemzem időkésés bevezetését is figyelembe véve, melyet a 6. összefoglaló fejezet követ. Ezek mellett a dolgozat tartalmaz még két számozott fejezetet, mégpedig a 7. fejezetet, az irodalomjegyzéket, valamint a mellékleteket a 8. fejezet tartalmazza. Ide kerültek olyan ábrák, amelyek nem feltétlenül szükségesek a dolgozat megértéséhez, de szemléltetik az eredményeket, és így nem törik meg a gondolatmenetet. Valamint 2 darab számozott összefüggés is itt kap helyet, melyek méretüket tekintve zavarnák a követhetőséget.

2. A TŐKEFELHALMOZÁS MODELLJE

Ebben a fejezetben bemutatásra kerül a *Solow*- és *Swan*-féle neoklasszikus növekedési modell lásd Solow (1956) és Swan (1956), vagy Barro et al, (2005) egy továbbfejlesztett változata, illetve az ezen modell alapján meghatározott eredmények.

2.1. Termelési függvény időbelisége

Amellett nem kell érvelni, hogy a növekedési elméletekben felhasznált termelési függvény

$$Y(t) = F(K(t), L(t), A(t)) \quad (2.1)$$

létezik, ahol $Y(t)$ a kibocsátás, $K(t)$ a gazdaságban működő tőke, $L(t)$ a gazdaságban megtalálható munka mennyisége, valamint $A(t)$ a technológia. Az alap Solow-moddal összhangban feltételezzük, hogy a termelési függvény *első fokon homogén a tőkében és a munkában*, tehát

$$F(\gamma K, \gamma L, A) = \gamma F(K, L, A), \quad (2.2)$$

valamint a *tőkére és a munkára külön-külön a csökkenő hozadékok elve* teljesül ($K > 0$ és $L > 0$ esetén), vagyis

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0. \quad (2.3)$$

Ezenfelül az úgynevezett *Inada feltételek* is teljesülnek, melyek:

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) = \lim_{L \rightarrow 0} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) = \infty \quad \text{és} \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Az eddigieken kívül feltételezzük a termelési függvényről azt, hogy ha bármely termelési tényező (K , L) zérus, akkor a kibocsátás (Y) is zérus.

Ezen felül a modell figyelembe kívánja venni azt, hogy az adott termelési tényezők hatása a kibocsátásban csak később, adott idő múlva jelentkezik. Tehát, ha a tőkeállomány és munka értéke a t időpontban van jelen, akkor a kibocsátás $t + \tau$, illetve $t + \tau_L$ időpontban jelenik meg a gazdaságban, ezért valójában

$$Y(t) = F(K(t - \tau), L(t - \tau_L), A(t)), \quad (2.5)$$

ahol

$$\tau_L = \mu_L \tau \quad (2.6)$$

Emellett a feltevés mellett könnyen lehet érvelni, ha a tőkét vesszük figyelembe. Hiszen, a között a két időpont között, hogy a tőke megjelenik a gazdaságban, és a reálgazdaság folyamatai felépülnek

(pl. a gyártás valóban elindul egy üzemben), idő telik el. A modell során azt feltételezzük, hogy ez az úgynevezett időkézés, mind a tőkében, mind a munkában megjelenik.

2.2. Mozgási egyenlet meghatározása

Tekintve azt, hogy a tőkefelhalmozás hatását szeretnénk vizsgálni, a levezetés során a technológiai szintet állandónak vesszük:

$$A(t) \equiv A_0. \quad (2.7)$$

Adottnak tekintve a népesség exogén növekedési ütemét (n), valamint kihasználva a homogenitási feltételt, a termelési függvény egy könnyebben kezelhető alakra hozható. Elosztva a (2.5) egyenletet $L(t)$ -vel kaphatjuk az

$$y(t) = F\left(\frac{K(t-\tau)}{L(t-\tau)} \cdot \frac{L(t-\tau)}{L(t-\tau_L)} \cdot \frac{L(t-\tau_L)}{L(t)}, \frac{L(t-\tau_L)}{L(t)}, A_0\right) \quad (2.8)$$

összefüggést, ahol

$$y(t) := \frac{Y(t)}{L(t)} \quad (2.9)$$

az egy főre eső kibocsátás. Bevezetve az egy főre eső tőkét

$$k(t) := \frac{K(t)}{L(t)} \quad (2.10)$$

és

$$\Lambda_{\mu_L}(t) := \frac{L(t-\tau_L)}{L(t)}, \quad \Lambda_{1-\mu_L}(t) := \frac{L(t-\tau)}{L(t-\tau_L)} \quad (2.11)$$

függvényeket az egy főre eső kibocsátás az

$$y(t) = \Lambda_{\mu_L}(t) \cdot F(k(t-\tau) \Lambda_{1-\mu_L}(t), 1, A_0) \quad (2.12)$$

formára hozható, ahol az $F(\cdot)$ függvény csak a tőkétől függ, így kaphatjuk az intenzív termelési függvényt:

$$y(t) = \Lambda_{\mu_L}(t) \cdot f(k(t-\tau) \cdot \Lambda_{1-\mu_L}(t)). \quad (2.13)$$

Látható, hogy a (2.13) egyenletben a termelési függvény csak a fajlagos tőkétől függ, ezen levezetés során azt használtuk ki, hogy mind a technológia (a (2.7) összefüggés alapján), mind a munkaerő exogén módon adott, és a dinamikájuk a következő:

$$\dot{L}(t) = nL(t) \quad \text{és} \quad \dot{A}(t) = 0, \quad (2.14)$$

ahol a változók feletti pont az idő szerinti deriválást jelöli.

A (2.14) differenciálegyenlet technológiára vonatkozó részének megoldása már szerepelt a (2.7) összefüggésben, ahol A_0 a kezdeti érték feladat kezdeti értékéből határozhatjuk meg. Ugyanezen egyenlet munkaerőre vonatkozó részének megoldása:

$$L(t) = L_0 e^{nt}, \quad (2.15)$$

ahol a kezdeti munkát L_0 jelöli. Ezek ismeretében $\Lambda_{\mu_L}(t)$ és $\Lambda_{1-\mu_L}(t)$ számítható:

$$\Lambda_{\mu_L}(t) = e^{-n\mu_L t}, \quad \Lambda_{1-\mu_L}(t) = e^{-n(1-\mu_L)t}. \quad (2.16)$$

Tehát a három aggregált termelési tényezőből kettőnek a dinamikája ismert, vagyis már csak a tőke (fajlagos tőke) dinamikáját kell meghatározni. A fizikai tőkeállomány bővülése megegyezik a gazdaságban létesített új beruházások és a meglévő tőke amortizációjának különbségével:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t - \tau_\delta), \quad (2.17)$$

ahol I a beruházások összege, míg δ az amortizáció mértéke, mely $\tau_\delta = \mu_\delta \tau$ idővel később jelentkezik.

Ebben a modellben az egyszerűség kedvéért a beruházások összege megegyezik a megtakarítások összegével $I = S$, ahol S a megtakarításokat jelöli. Konstans megtakarítási rátát feltételezve a megtakarítások egyenlők a mindenkori kibocsátás s hányadával:

$$S(t) = sY(t). \quad (2.18)$$

Felhasználva a (2.18) egyenletet, illetve a beruházások és megtakarítások egyenlőségét a tőkefelhalmozás egyenlete a következő alakba írható:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t - \tau_\delta). \quad (2.19)$$

A modell *fundamentális egyenlete* így

$$\dot{k}(t) = sy(t) - \delta \Lambda_{\mu_\delta} k(t - \tau_\delta) - nk(t), \quad (2.20)$$

ahol

$$\Lambda_{\mu_\delta} = e^{-n\mu_\delta \tau} \quad (2.21)$$

mivel

$$\dot{k}(t) = \frac{dk(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{K(t)}{L(t)} \right) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} k(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - nk(t). \quad (2.22)$$

Felhasználva a termelési függvény (2.13) alakját, a fundamentális egyenlet (2.20) tovább alakítható:

$$\dot{k}(t) = s\Lambda_{\mu_L} f(k(t-\tau) \cdot \Lambda_{1-\mu_L}) - \delta\Lambda_{\mu_S} k(t-\tau_\delta) - nk(t). \quad (2.23)$$

Ezzel mind a három aggregált termelési tényező dinamikája ismert, tehát a modell ismertnek tekinthető.

2.3. Egyensúlyi helyzetek meghatározása

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltételezünk egy speciális termelési függvényt, az úgynevezett Cobb – Douglas - féle termelési függvényt:

$$F(t) = AK^\alpha(t)L^{1-\alpha}(t). \quad (2.24)$$

Ezzel a (2.23) fundamentális egyenlet a

$$\dot{k}(t) = sA\Lambda_{\mu_L}\Lambda_{1-\mu_L}^\alpha k^\alpha(t-\tau) - \delta\Lambda_{\mu_S} k(t-\tau_\delta) - nk(t) \quad (2.25)$$

alakra hozható.

A termelési függvényben (2.24) szereplő α paraméternek a csökkenő hozadékok elve miatt (2.3)

$$0 < \alpha < 1 \quad (2.26)$$

tartományba kell esnie, és ha ez a feltétel teljesül, az Inada feltételek (2.4) is automatikusan teljesülnek, emellett az A paramétert pozitívnak feltételezzük.

A (2.25) differenciálegyenlet egyensúlyi helyei kielégítik azt az algebrai egyenletet, ahol

$$\dot{k}(t) \equiv 0 \quad \text{azaz} \quad k(t) \equiv k(t-\tau) \equiv k(t-\tau_\delta) \equiv k^*. \quad (2.27)$$

Az így kapott

$$0 = sA\Lambda_{\mu_L}\Lambda_{1-\mu_L}^\alpha k^{*\alpha} - (n + \delta\Lambda_{\mu_S})k^* \quad (2.28)$$

egyenletnek két megoldása k^* -ra nézve a pozitív valós számok halmazán:

$$k_0^* = 0 \quad \text{és} \quad k_1^* = \left(\frac{sA\Lambda_{\mu_L}\Lambda_{1-\mu_L}^\alpha}{\delta\Lambda_{\mu_S} + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (2.29)$$

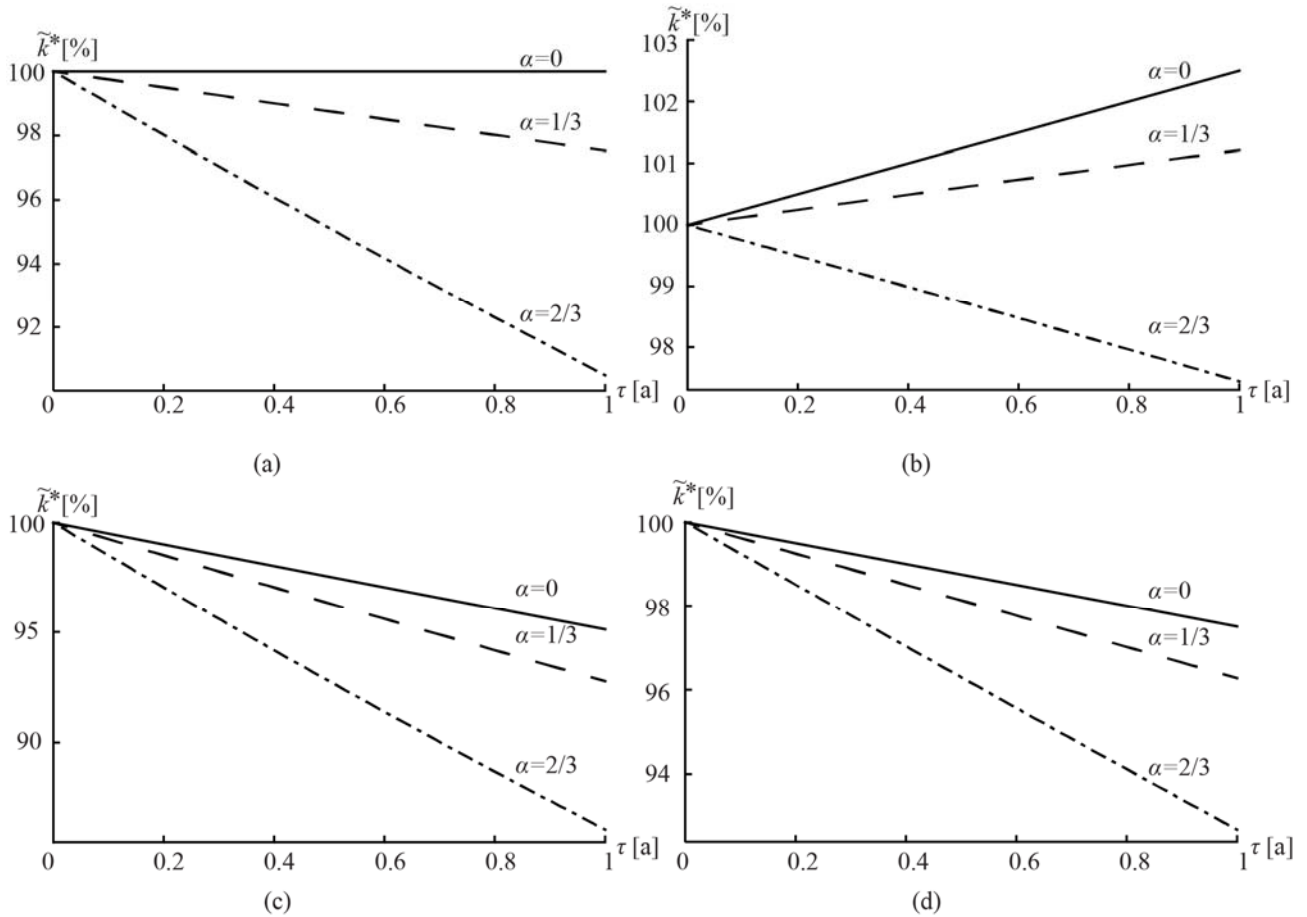
Ezek közül közgazdaságilag a releváns megoldás k_1^* , mivel k_0^* esetén nincsen tőkefelhalmozás, illetve a 2.1 fejezet feltevései szerint ekkor a kibocsátás is zérus. Természetesen ez egy megoldása, így a következőkben megvizsgáljuk az egyensúlyi helyzet körüli kis kitérés esetén a stabilitását, de figyelmünket ezek után a k_1^* egyensúlyi hely vizsgálatára összpontosítjuk.

Mivel a Λ -val jelölt mennyiségek tartalmazzák az időkésést a (2.29) összefüggésben, így elmondható, hogy az egyensúlyi tőke mértéke változik a késés függvényében. A késés növekedésével az egyensúlyi helyzet értéke magasabb lehet az időkésést nem tartalmazóénál, amennyiben:

$$\alpha < \frac{\mu_L(\delta+n)-\delta\mu_\delta}{(\mu_L-1)(\delta+n)} . \quad (2.30)$$

Tehát az időkésés hatása nem egyértelműen meghatározható. Biztosan nem létezik az eredeti egyensúlyi helyzetnél nagyobb egyensúlyi helyzet időkésés esetén a modell feltételei mellett, miszerint α pozitív, ha

$$\mu_L > \frac{\delta}{\delta+n} \mu_\delta . \quad (2.31)$$



1. ábra: A gazdaságilag releváns egyensúlyi egy főre jutó tőkéjének függése az időkéséstől: (a) a munkaerő és az amortizáció sincsen késleltetve; (b) a munkaerő nem, míg az amortizáció a tőkével azonos mértékben késik; (c) a munkaerő késik a tőkével azonos mértékben, míg a az amortizáció nem késik; (d) mind a tőke, mind az amortizáció késik.

Az 1. ábrán látható a fajlagos egyensúlyi tőke az időkésés függvényében, tehát az egyensúlyi tőkét a 0 időkésést tartalmazó modellhez képest vizsgáljuk, vagyis

$$\tilde{k}^* = \frac{k_1^*}{k_1^*|_{\tau=0}} . \quad (2.32)$$

Itt látható, hogy az egyensúlyi tőke, ami nagyban meghatározza az egyensúlyi kibocsátást, lényegesen függ α értékétől, valamint a (2.30) és (2.31) összefüggések által meghatározott módon kvalitatív módon is függ a munkaerő, illetve a tőke késésétől.

2.4. A triviális megoldás lineáris stabilitása

A triviális megoldás körüli kis megzavarásokra a lineáris differenciálegyenlet a

$$\dot{k}(t) = sA\Lambda_{\mu_t}\Lambda_{1-\mu_t}^\alpha \lim_{k(t-\tau) \rightarrow 0} (k^{-1+\alpha}(t-\tau))k(t-\tau) - \delta\Lambda_{\mu_s}k(t-\tau_\delta) - nk(t) \quad (2.33)$$

alakra hozható, ahol a $k(t-\tau)$ tag együtthatója $+\infty$, amennyiben s pozitív és $n\tau \neq +\infty$, míg a többi komponens véges, tehát a k_0^* triviális egyensúlyi helyzet instabil.

2.5. A nem triviális egyensúlyi helyzet és a körülötte lévő dinamika

Ezen egyensúlyi hely körüli lineáris differenciálegyenlet a

$$\kappa'(\tilde{t}) = \alpha\tau(n + \delta\Lambda_{\mu_s})\kappa(\tilde{t}-1) - \delta\tau\Lambda_{\mu_s}\kappa(\tilde{t}-\mu_\delta) - \tau n\kappa(\tilde{t}) \quad (2.34)$$

alakra hozható, ahol

$$\kappa(\tilde{t}) := k(\tilde{t}\tau) - k_1^* \quad \text{és} \quad \tilde{t} := t/\tau. \quad (2.35)$$

A (2.34) lineáris mozgási egyenlet analitikus vizsgálata körülményes, így a továbbiakban két különböző alapesetet vizsgálunk. Első esetben úgy tekintjük, hogy a tőke a megjelenési pillanatától kezdve amortizálódik ($\tau_\delta = 0$), második esetben pedig azt feltételezzük, hogy csak attól kezdve, amikor elkezd termelni ($\tau_\delta = \tau$).

2.5.1. Stabilitás azonnali tőkeamortizáció esetén

Amellett, hogy a tőke megjelenésétől kezdve amortizálódik, érvelni lehet a tőke pénzbeli tartásával. Hiszen az infláció minden megtermelt pénzegységre hat. Ebben az esetben

$$\mu_\delta = 0 \quad (2.36)$$

és a (2.34) lineáris differenciálegyenlet a következőképpen egyszerűsödik:

$$\kappa'(\tilde{t}) = \alpha\tau(n + \delta)\kappa(\tilde{t}-1) - (n + \delta)\tau\kappa(\tilde{t}). \quad (2.37)$$

Késleltetett differenciálegyenletek (DDE) egyensúlyi helyzetei akkor, és csak akkor stabilak, ha az összes karakterisztikus exponensük valós része negatív (lásd Stépán (1989)), akár a közönséges differenciálegyenletek (ODE) esetén. A (2.34) differenciálegyenlet egy a Hayes-féle egyenlethez hasonló, így a megoldási módszer is hasonló, lásd Hayes (1950).

Ezek alapján a karakterisztikus függvény

$$D(\lambda) = \lambda - \alpha\tau(n + \delta)e^{-\lambda} + (n + \delta)\tau, \quad (2.38)$$

amelyet a

$$\kappa(\tilde{t}) = Ce^{\lambda\tilde{t}} \quad (2.39)$$

próbafüggvény lineáris differenciálegyenletbe történő behelyettesítéséből kaphatunk, ahol C és $\lambda \in \mathbb{C}$. A már említettek alapján adott paraméter értékek esetén az egyensúlyi helyzet stabilitása eldönthető a

$$D(\lambda) = 0 \quad (2.40)$$

karakterisztikus egyenlet gyökeinek valós résznek előjeleivel. Közöséges differenciálegyenleteknél egy l dimenziós elsőrendű differenciálegyenlet rendszernek pontosan l gyöke van, ez jelen esetben 1 gyököt jelentene, de késleltetett differenciálegyenletek esetén a karakterisztikus egyenlet egy úgynevezett transzcendens egyenlet, melynek végtelen sok gyöke van, ezzel megnehezítve a számítást.

Akkor változik a stabilitása az egyensúlyi helyzetnek, ha a λ komplex számsíkon egy valós gyök, vagy egy komplex konjugált gyökpár áthalad a képzetes tengelyen. Amennyiben egy valós gyök halad át, azt statikus stabilitásvesztésnek, nyereg-csomó bifurkációnak nevezzük (saddle-node), ekkor a karakterisztikus egyenlet:

$$D(0) = -\alpha\tau(n+\delta) + (n+\delta)\tau \quad (2.41)$$

ez akkor zérus (2.40), ha vagy $\alpha_{SN} = 1$, vagy $\tau(n+\delta)_{SN} = 0$. Ezen esetekben egy valós gyök van épp határhelyzetben, tehát ezt a határt keresztezve 1-el változik az instabil gyökök száma.

Amennyiben két tisztán képzetes gyök van határhelyzetben (Hopf-bifurkáció), tehát $\lambda = i\omega$, ahol $\omega \in \mathbb{R}^+$, a karakterisztikus egyenlet (2.40) egy komplex egyenlet, amelynek jobb oldalán 0 áll, ez csak akkor lehetséges, ha a valós (R) és képzetes (S) rész is zérus:

$$\begin{aligned} R(\omega) &:= \tau(n+\delta) - \alpha\tau(n+\delta)\cos(\omega) = 0, \\ S(\omega) &:= \omega + \alpha\tau(n+\delta)\sin(\omega) = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ebből az egyenletrendszerből kifejezhető

$$\begin{aligned} \alpha_H &= \frac{1}{\cos(\omega)}, \\ \tau(n+\delta)_H &= -\frac{\omega}{\tan(\omega)}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

amely ω függvényében egy görbe az $\alpha - \tau(n+\delta)$ síkon. Ez a görbe látható a 2. ábrán az instabil gyökök számának feltüntetésével együtt, melyeket a

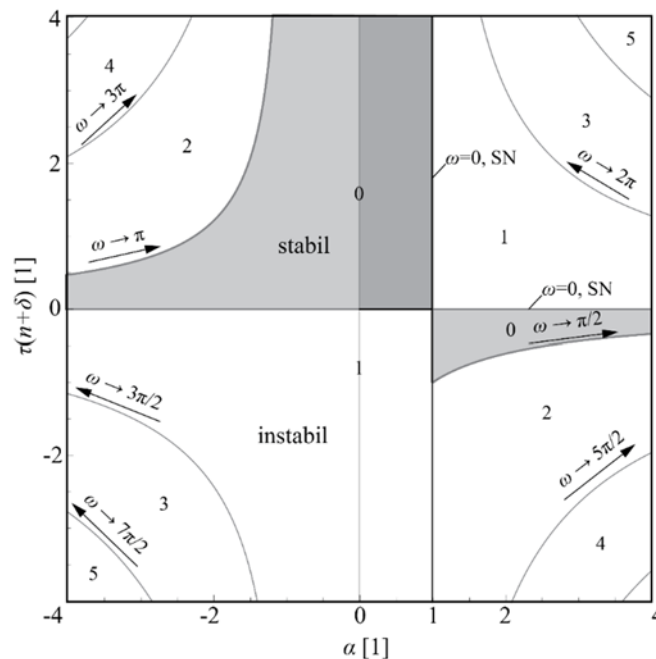
$$N = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{r-1} (-1)^j \operatorname{sgn} R(\sigma_j) + \frac{1}{2} (-1)^r \operatorname{sgn} R(0) \quad (2.44)$$

összefüggésből lehet meghatározni (Stépán, 1989, 23), ahol N az instabil gyökök száma és σ_j , $j = 1..r$ jelölik az $S = 0$ egyenlet nem negatív valós gyökeit.

A 2 ábrán szürkével van jelölve a stabilis tartomány, illetve ki van fehérítve az a rész ahol a (2.26) α -ra vonatkozó korlátozó feltétel miatt nem is jöhetne számításba. Tehát a valós paramétereket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy ez az egyensúlyi helyzet stabilis ha

$$0 < \alpha < 1 \quad \text{és} \quad (n + \delta) > 0, \quad (2.45)$$

pozitív késleltetést $\tau > 0$ feltételezve. A (2.45) feltétel megegyezik a késleltetést nem tartalmazó modell ennek megfelelő egyensúlyi helyzetének stabilitásával (ebben az esetben a két sík negyed teljes egészében stabilis lenne), tehát a feltételes konvergencia jelensége itt is fenn áll. A 2. ábrán még a késéssel dimenziótlanított berezgségi frekvenciák is feltűntetésre kerültek. A stabilitási térkép numerikusan is meghatározásra kerül szemi diszkretizáció segítségével, lásd Insperger et al (2011).



2. ábra: A k_1^* egyensúlyi helyzet stabilitása azonnali tökéamortizáció esetén, ahol a szürkített tartományok stabilak, a fehérén hagyottak pedig instabilak. A tartományokba írt számok az instabil karakterisztikus exponensek számát mutatják

Ennek értelmében levonható az a következtetés, hogy a termelési függvény késleltetése az egyensúlyi helyzet stabilitásában nem játszik jelentős szerepet, az egyensúlyi helyzet csak statikusan vizsgálható el a stabilitását, azaz nem létezik határciklus reális paraméterválasztás esetén.

Természetesen az eddig együtt kezelt $\tau(n + \delta)$ kifejezésből egyértelműen kifejezhető a növekedési ütem n , így az összes kritérium átfogalmazható erre a mennyiségre, valamint a stabilitási térkép is megrajzolható, immár szükséges értéket ad az amortizációnak, illetve az időkésésnek. A stabil tartomány így az $\alpha \in (0; 1)$ és $n \in (-\delta; \infty)$ intervallumba esik, amelyet csak statikus (SN) bifurkációs vonalak határolnak, tehát dinamikai (Hopf) stabilitásvesztés nem jöhet létre.

Ezen modell egy egyszerűsített változatát használta Guerrini (2012) is az időkézés vizsgálatára (ebben a modellben a szerző eltekintett az amortizációtól, tehát $\delta = 0$), ebből a modellből a szerző hibásan azt a következtetést vonja le egy rossz egyensúlyi helyzet vizsgálatának következményeként, hogy létezhet dinamikus stabilitásvesztés is. Ennek a megállapításnak a cáfolata leolvasható az 2. ábráról.

Ahhoz hogy a későbbi térképekkel összehasonlítható legyen az 2. ábrán látható stabilitási térkép átranzformálható, az α - n térbe, a vízszintes statikus stabilitásvesztési határ eltolódik $-\delta$ -hoz, illetve átskálázható a függőleges tengely az időkézéssel. Az ehhez tartozó stabilitási határok egyenletei:

$$\alpha_{\text{SN}} = 1 \quad n_{\text{SN}} = -\delta$$

$$\alpha_{\text{H}} = \frac{1}{\cos(\omega)} \quad \text{és} \quad n_{\text{H}} = -\frac{\omega}{\tau \tan(\omega)} - \delta \quad (2.46)$$

2.5.2. Konvergencia sebesség azonnali tőkeamortizáció esetén

A konvergencia sebesség lineárisan kerül közelítésre a jelen dolgozatban, tehát a (2.37) késleltetett lineáris differenciálegyenlet használható (Dombi, 2014, 42). A differenciálegyenlet megoldása felírható a

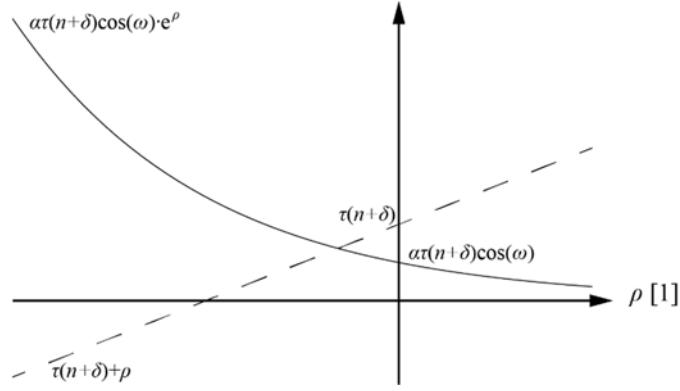
$$\kappa(\tilde{t}) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{\lambda_i \tilde{t}} \quad (2.47)$$

alakban, ahol a λ_i karakterisztikus exponensek a (2.40) karakterisztikus egyenletből határozhatóak meg, míg a $C_i \in \mathbb{C}$ konstansok a kezdeti feltételből, valamint abból, hogy a $\kappa(T)$ függvénynek valós értékűnek kell lennie.

A $\lambda = \rho + i\omega$ komplex karakterisztikus exponensek $\rho \in \mathbb{R}$ a (2.40) karakterisztikus egyenlet megoldásai, amely ebben az esetben is szétszedhető valós és képzetes részre:

$$\begin{aligned} \rho - \alpha\tau(n + \delta)e^{-\rho} \cos(\omega) + \tau(n + \delta) &= 0, \\ \omega - \alpha\tau(n + \delta)e^{-\rho} \sin(\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

A valós részre vonatkozó egyenlet megoldható grafikusán is (lásd 3. ábra). Ha $\omega \neq 2l\pi$, ahol $l \in \mathbb{Z}$, akkor a $\cos(\omega)$ kifejezés mindig kisebb mint 1, tehát a legnagyobb ρ megoldást (a legkisebb abszolút értékű megoldást) akkor kaphatjuk, ha $\omega = 2l\pi$. Ezek közül csak az $\omega = 0$ elégíti ki a (2.48) egyenletrendszer második egyenletét.



3. ábra: A karakterisztikus egyenlet valós részének megoldása grafikusán

A (2.47) megoldásfüggvényből, csak a legnagyobb valós részű (legkisebb abszolút értékű) karakterisztikus exponenst vesszük figyelembe, hiszen a mozgásból a többi megoldás gyorsabban kifog halni, tehát

$$\kappa(\tilde{t}) \approx C_1 e^{\lambda_1 \tilde{t}}. \quad (2.49)$$

Ez eddigiekből következik ($\omega=0$), hogy $\lambda_1 = \rho_1 \in \mathbb{R}$ tehát differenciálegyenlet átalakítható a

$$\frac{\dot{\kappa}(\tilde{t})}{\tau} = \alpha(n+\delta)C_1 e^{\rho_1 \tilde{t}} - (n+\delta)C_1 e^{\rho_1 \tilde{t}} = (\alpha e^{-\rho} - 1)(n+\delta)C_1 e^{\rho_1 \tilde{t}} = (\alpha e^{-\rho} - 1)(n+\delta)\kappa(\tilde{t}) \quad (2.50)$$

formára kétszer felhasználva a (2.49) összefüggést, tehát

$$\frac{\dot{\kappa}(\tilde{t})}{\kappa(\tilde{t})} = (\alpha e^{-\rho} - 1)(n+\delta). \quad (2.51)$$

Visszatérve az eredeti változókhoz ($k(t), t$) a (2.51) összefüggés tovább alakítható, és a konvergencia sebesség definíciójához juthatunk:

$$\lambda_c^k := -\frac{\dot{k}(t)}{k(t) - k_1^*} = (1 - \alpha e^{-\rho})(n+\delta). \quad (2.52)$$

Tudjuk, hogy ebben az összefüggésben ρ egy negatív valós szám, tehát $e^{-\rho}$ egy pozitív szám. Ennek következtében az már megállapítható, hogy az időkésés a rendszerben kisebb egyensúlyi helyzetet eredményez, valamint kisebb konvergencia sebességet is. Látszólag növeli az α paraméter értékét, vagyis a fizikai tőke részarányát, ami a túl nagy konvergencia sebesség egy kritikája volt az alap Solow - modellnek.

Továbbiakban azt vizsgáljuk meg, hogy ez az időkésés kvalitatíve mekkora különbséget ad a késést nem tartalmazó alap modellhez képest. Ehhez előbb meg kell határozni az első karakterisztikus

exponenst (ρ) a (2.48) egyenletrendszer első egyenletéből $\omega=0$ esetén. Jelen esetben számunkra fontosabb az úgynevezett karakterisztikus gyök, illetve annak is a reciprokjának meghatározása

$$\mu_L^{-1} := e^{-\rho}, \quad (2.53)$$

hiszen a konvergencia sebesség meghatározásában (2.52) az a kifejezés szerepel. Ezzel a (2.48) egyenletrendszer első egyenlete átírható a

$$-\ln(\mu_L^{-1}) - \alpha\tau(n+\delta)\mu_L^{-1} + \tau(n+\delta) = 0 \quad (2.54)$$

alakra.

Természetesen a (2.54) egyenlet nem oldható meg zárt alakban, de ahhoz hogy a paraméterfüggést megőrizhessük linearizálhatjuk a (2.54) egyenletet $\mu^{-1} = 1$ körül, hiszen ha ρ kicsi, akkor μ^{-1} közel 1. Véve az $\ln(\mu^{-1})$ Taylor – sorát, 1 körül

$$\ln(\mu_L^{-1}) = (\mu_L^{-1} - 1) - \frac{1}{2}(\mu_L^{-1} - 1)^2 + \frac{1}{3}(\mu_L^{-1} - 1)^3 + O^4(\mu_L^{-1} - 1) \quad (2.55)$$

közelíthetjük a természetes alapú logaritmus függvényt. Ezt a sort csonkolhatjuk a tetszőleges tagoknál, természetesen ebben az esetben polinomokat fogunk kapni, így negyed rendű polinomnál nagyobb nem érdemes meghagyni, hiszen annak már nem létezik zárt alakú megoldása. Tekintve azt, hogy mi a lehető legegyszerűbb, de még a kellő paraméterfüggőséget tartalmazó megoldást keresünk, csak a lineáris tagot tartjuk meg, tehát:

$$\ln(\mu_L^{-1}) \cong (\mu_L^{-1} - 1). \quad (2.56)$$

Ezzel a (2.54) egyenletből μ^{-1} kifejezhető:

$$\mu_L^{-1} = e^{-\rho} \cong \frac{1 + \tau(n + \delta)}{1 + \alpha\tau(n + \delta)} \quad (2.57)$$

A késleltetés hatását a konvergencia sebességre úgy vizsgálhatjuk, hogy a (2.52) összefüggésben meghatározott sebességet arányosítjuk az időkésést nem tartalmazó modell sebességével:

$$\Delta\lambda^k = \frac{\lambda_{c,l}^k}{\lambda_{c,l}^k|_{\tau=0}} = \frac{-(1 - \alpha e^{-\rho})(n + \delta)}{-(1 - \alpha)(n + \delta)} \cong \frac{1 - \alpha \frac{1 + \tau(n + \delta)}{1 + \alpha\tau(n + \delta)}}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 + \alpha\tau(n + \delta)}. \quad (2.58)$$

Erről látható, hogy késleltetés nélküli esetben ($\tau=0$) ez a hányados pontosan 1-et ad, amit el is várunk a modelltől. Valamint az is jól látszik, hogy növekvő késleltetés mellett ez a tört egyre kisebb értéket vesz fel, tehát a konvergencia sebesség lassul. Ez látható a 4.(a) ábrán különböző α paraméterek mellett, $n + \delta = 0.06$ év esetére.

A konvergencia sebesség a (2.56) lineáris közelítéssel:

$$\lambda_{c,l}^k = \frac{(1-\alpha)(\delta+n)}{1+\alpha\tau(\delta+n)}. \quad (2.59)$$

Természetesen numerikusan a (2.56) lineáris közelítés nélkül is meghatározható a konvergencia sebesség.

A steady-state állapothoz közel a kibocsátás közelítését a λ_c^k segítségével felírhatjuk, ehhez venni kell a (2.13) egyenlet idő szerinti deriváltját. Felhasználva a (2.16) eredményt kaphatjuk a

$$\frac{d}{dt} y(t) = \dot{y}(t) = e^{-n\tau} \frac{\partial f(k(t-\tau))}{\partial k(t-\tau)} \frac{dk(t-\tau)}{dt} = e^{-n\tau} f'(k(t-\tau)) \dot{k}(t-\tau) \quad (2.60)$$

összefüggést, ahova $\dot{k}(t-\tau)$ kifejezéséhez használhatjuk a (2.23) fundamentális egyenletet:

$$\dot{y}(t) = e^{-n\tau} f'(k(t-\tau)) (s e^{-n\tau} f(k(t-2\tau)) - (n+\delta)k(t-\tau)). \quad (2.61)$$

Véve az $\dot{y}(t)$ függvény első fokú Taylor-sorát $k(t) = k_1^*$ körül:

$$\dot{y}(t) \cong \dot{y}_1^* + \left. \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial k(t)} \right|_{k_1^*} (k(t) - k_1^*) + \left. \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial k(t-\tau)} \right|_{k_1^*} (k(t-\tau) - k_1^*) + \left. \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial k(t-2\tau)} \right|_{k_1^*} (k(t-2\tau) - k_1^*), \quad (2.62)$$

ahol természetesen $\dot{y}_1^* = 0$, hiszen egyensúlyi helyzetben a kibocsátás nem változik, valamint

$$\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial k(t)} = 0, \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial k(t-\tau)} = e^{-n\tau} (f''(k(t-\tau)) (s e^{-n\tau} f(k(t-2\tau)) - (n+\delta)k(t-\tau)) - f'(k(t-\tau)) (n+\delta)) \quad (2.64)$$

és

$$\frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial k(t-2\tau)} = e^{-n\tau} f'(k(t-\tau)) (s e^{-n\tau} f'(k(t-2\tau))), \quad (2.65)$$

a (2.64) és (2.65) összefüggések kiértékelve az egyensúlyi helyen:

$$\left. \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial k(t-\tau)} \right|_{k_1^*} = e^{-n\tau} (f''(k_1^*) (s e^{-n\tau} f(k_1^*) - (n+\delta)k_1^*) - f'(k_1^*) (n+\delta)) \quad (2.66)$$

és

$$\left. \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial k(t-2\tau)} \right|_{k_1^*} = e^{-n\tau} f'(k_1^*) (s e^{-n\tau} f'(k_1^*)). \quad (2.67)$$

A (2.62) összefüggés felhasználva a (2.63), (2.66) és (2.67) eredményeket, valamint azt, hogy az egyensúlyi helyzet definíciójából következően

$$s e^{-n\tau} f(k_1^*) - (n + \delta) k_1^* = 0, \quad (2.68)$$

ezen felül felhasználva azt is, hogy a steady-state közelében

$$f'(k_1^*) (k(t - \tau) - k_1^*) = y(t) - y_1^* \quad \text{és} \quad f'(k_1^*) (k(t - 2\tau) - k_1^*) = y(t - \tau) - y_1^* \quad (2.69)$$

a GDP/fő érték változására a

$$\dot{y}(t) = e^{-n\tau} \left(\alpha (n + \delta) (y(t - \tau) - y_1^*) - (n + \delta) (y(t) - y_1^*) \right) \quad (2.70)$$

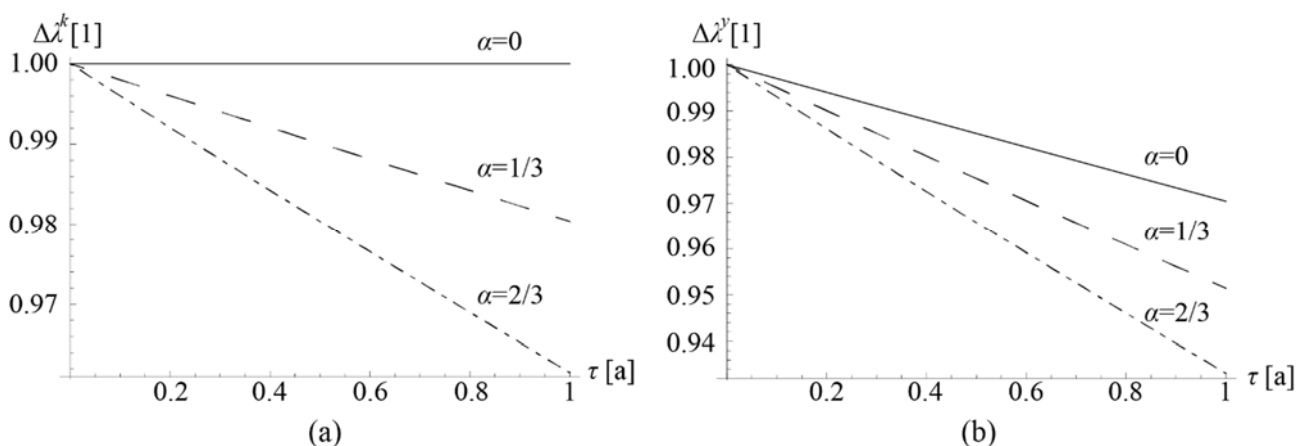
kifejezés adódik. Ez egy a (2.34) egyenlettel formailag teljesen megegyező mozgási egyenlet — itt is be lehetne vezetni a (2.35) mintájára egy új változót, melytől itt eltekintünk. Abban különbözik, hogy itt minden együttható meg van szorozva a $e^{-n\tau}$ kifejezéssel, tehát a (2.49)-hez hasonló közelítéssel:

$$\dot{y}(t) = -\lambda_c^y (y(t) - y_1^*), \quad \lambda_c^y := e^{-n\tau} \lambda_c^k. \quad (2.71)$$

Ezzel a konvergencia sebesség a kibocsátásra nézve, illetve annak becslése:

$$\lambda_c^y = e^{-n\tau} (1 - \alpha e^{-\rho}) (n + \delta), \quad \gamma_y \cong \lambda_{c,l}^y = e^{-n\tau} \frac{(1 - \alpha)(\delta + n)}{1 + \alpha\tau(\delta + n)}. \quad (2.72)$$

A karakterisztikus exponens lineáris becslésével kapott, a kibocsátásra vonatkozó konvergencia sebesség, különböző paraméter beállítások mellett látható a 4.(b) ábrán, ahol $n = \delta = 0.02$.



4. ábra: A késleltetés konvergencia sebességére gyakorolt hatása; (a) a fajlagos tőkére vonatkoztatva, (b) a fajlagos GDP-re vonatkoztatva

A 4. ábra alapján elmondható, hogy fél éves késés esetén közel 2 % az eltérés a tőkére, míg 4 % a kibocsátásra nézve, a konvergencia sebesség késést tartalmazó, illetve nem tartalmazó kifejezése között. Hosszú távon már ez is jelentős különbségeket okozhat.

2.5.3. Stabilitás késleltetett amortizáció esetén

Ebben a részben azt feltételezzük, hogy a termeléshez használt eszközök csak akkor amortizálódnak, ha termelnek is, tehát $\tau_\delta = \tau$, vagyis

$$\mu_\delta = 1 \quad \text{és} \quad \Lambda_{\mu_\delta} = e^{-n\tau}, \quad (2.73)$$

ami alapján a (2.34) lineáris differenciálegyenlet a következő alakra egyszerűsíthető:

$$\kappa'(\tilde{t}) = ((\alpha - 1)\delta\Lambda_{\mu_\delta}\tau + \alpha n\tau)\kappa(\tilde{t} - 1) - \tau n\kappa(\tilde{t}). \quad (2.74)$$

A stabilitásvizsgálathoz szükséges karakterisztikus függvény késleltetett amortizáció esetén

$$D(\lambda) = \lambda - ((\alpha - 1)\delta\Lambda_{\mu_\delta}\tau + \alpha n\tau)e^{-\lambda} + \tau n \quad (2.75)$$

módon néz ki. Statikus stabilitásvesztés (SN), tehát akkor alakul ki, ha a

$$D(\lambda = 0) = (1 - \alpha)(\delta\Lambda_{\mu_\delta} + n)\tau \quad (2.76)$$

kifejezés éppen nullával egyezik meg. Vagyis az $\alpha_{SN} = 1$ határ szintén határ lesz, ahogy az az azonnali tőkeamortizáció esetét vizsgáló modellnél volt, de a másik határvonal némileg megváltozik $\tau(n + \delta e^{-n\tau})_{SN} = 0$, melynek még fontos szerepe lesz.

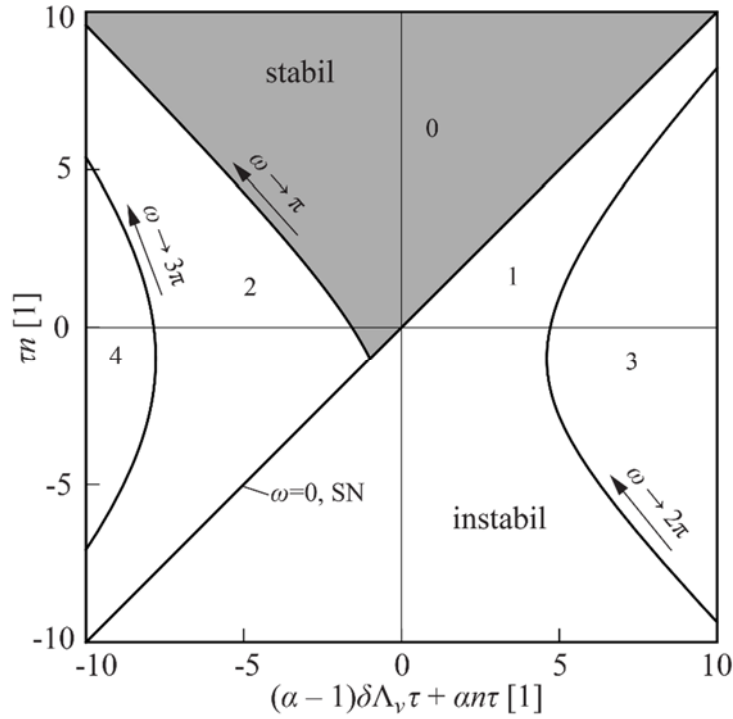
Dinamikus stabilitási határok vizsgálatához most is szükség lesz a $D(i\omega) = 0$ komplex egyenlet valós (R) és képzetes (S) részére:

$$\begin{aligned} R(\omega) &:= \tau n - ((\alpha - 1)\delta\Lambda_{\mu_\delta}\tau + \alpha n\tau)\cos(\omega) = 0, \\ S(\omega) &:= \omega + ((\alpha - 1)\delta\Lambda_{\mu_\delta}\tau + \alpha n\tau)\sin(\omega) = 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Ebből kifejezhetőek a stabilitási határok

$$\begin{aligned} (\alpha - 1)\delta\Lambda_{\mu_\delta}\tau + \alpha n\tau &= -\frac{\omega}{\sin \omega}, \\ \tau n &= -\frac{\omega}{\tan \omega}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

ami szintén egy görbe ezen paramétersíkon (lásd 5. ábrán). Ezen az ábrán megfigyelhető, hogy a stabil tartományt egy dinamikus (Hopf) stabilitásvesztési határ is közrezárja a statikus mellett, tehát van arra esély, hogy dinamikus stabilitásvesztés lépjen fel, ami oszcillációhoz vezet, tehát képes lehet magyarázni a konjunktúraciklusokat.



5. ábra: A k_1^* egyensúlyi helyzet stabilitása késleltetett tőkeamortizáció esetén, ahol a szürkített tartományok stabilak, a fehérén hagyottak pedig instabilak, a tartományokba írt számok az instabil karakterisztikus exponensek számát mutatják

Az egyes paraméterek vizsgálatához a határokra vonatkozó (2.78) összefüggéseket át kell fogalmazni a tőke részarányára (α), és a munkaerő növekedési ütemére (n), így a kapott térképek összehasonlíthatóak lesznek az azonnali tőkeamortizáció vizsgálata során kapott térképpel. Ehhez szükséges α és n kifejezése a (2.78) összefüggésből, mely komplikáltabb, mint az azonnali tőkeamortizáció esetén:

$$\alpha_H = 1 - \frac{\omega \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)}{n_H(\omega)\tau + \delta\tau e^{-n_H(\omega)\tau}}, \quad (2.79)$$

$$n_H = -\frac{\omega}{\tau \tan(\omega)}.$$

Mindezek mellett a statikus stabilitásvesztéshez tartozó határokat is át kell fogalmazni α -ra és n -re, ami zárt alakban nem oldható meg, de feltételezve azt, hogy a $n\tau$ szorzat kicsi, lineárisan kereshetünk megoldást. Az így kapott határok:

$$\alpha_{SN} = 1, \quad (2.80)$$

$$n_{SN,1} = \frac{\delta}{\delta\tau - 1},$$

emellett az is megmutatható, hogy a munkaerő növekedési ütemére vonatkozó statikus stabilitási feltétel nem ad megoldást, amennyiben

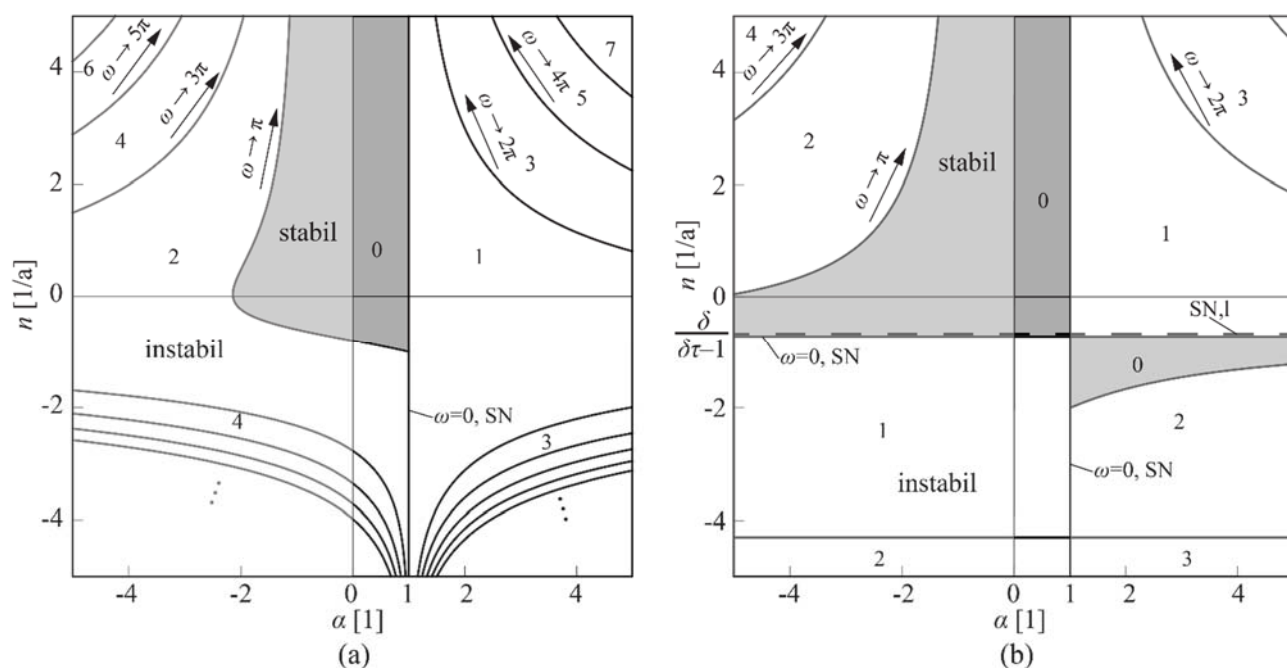
$$\tau \geq \frac{1}{e\delta} . \quad (2.81)$$

Ez ad a (2.80) közelítésre egy használati korlátot.

Ebből következik, hogy az Inada feltételek által szabott korlátokon belül ($0 < \alpha < 1$) a vizsgált egyensúlyi helyzet, csak akkor tudja elveszíteni a stabilitását dinamikusan, ha az n re vonatkozó statikus stabilitásvesztési határ nem létezik, tehát a (2.81) összefüggés igaz. Amennyiben ez nem teljesül, akkor jobbról és ballról is statikus stabilitásvesztési határ övezi a stabil tartományt (lásd 6. ábra).

Az 6. ábrán jól látható a két különböző eset, illetve az is megfigyelhető, hogy a (2.80) lineáris közelítés is megfelelő.

Mindazonáltal meg kell jegyezni azt, hogy reális feltételek mellett nem jelenhet meg dinamikus stabilitásvesztés (Hopf-bifurkáció), hiszen $\delta = 0.02$ 1/év amortizációhoz több, mint $\tau = 18$ év késés tartozna, ami a mai gazdaságban nem tekinthető reálisnak.



6. ábra: A k_1^* egyensúlyi helyzet stabilitása késleltetett tőkeamortizáció esetén, ahol (a) ábra azt az esetet mutatja, amikor létezik dinamikus stabilitásvesztés, $\delta=0.5$ 1/év és $\tau=1$ év, (b) pedig azt, amikor nem létezik ilyen a vizsgált tartományon belül, $\delta=0.5$ 1/év és $\tau=0.5$ év

2.5.4. Konvergencia sebesség késleltetett amortizáció esetén

A lineárisan közelített konvergencia sebességhez, ebben az esetben is a karakterisztikus egyenletet kell vizsgáljuk, egy általános megoldás esetén, ahol a komplex egyenlet szintén szétválasztható valós és képzetes részre:

$$\begin{aligned} \rho - \left((\alpha - 1) \delta \lambda_{\mu_s} \tau + \alpha n \tau \right) e^{-\rho} \cos(\omega) + \tau n &= 0, \\ \omega + \left((\alpha - 1) \delta \lambda_{\mu_s} \tau + \alpha n \tau \right) e^{-\rho} \sin(\omega) &= 0, \end{aligned} \quad (2.82)$$

ahol ρ a λ karakterisztikus exponens valós, míg ω a képzetes része.

Pozitív munkaerő növekedési ütem esetén könnyen belátható, hogy a 2.5.2 fejezetben bemutatott módszer jól használható, míg negatív növekedési ütem mellett ez komplikáltabb. Feltételezve azt, hogy csak a $0 < \alpha < 1$ intervallumot vizsgáljuk kicsi n , illetve δ esetén hasonló eredményre juthatunk. Így a konvergencia sebesség lineáris közelítése ebben az esetben:

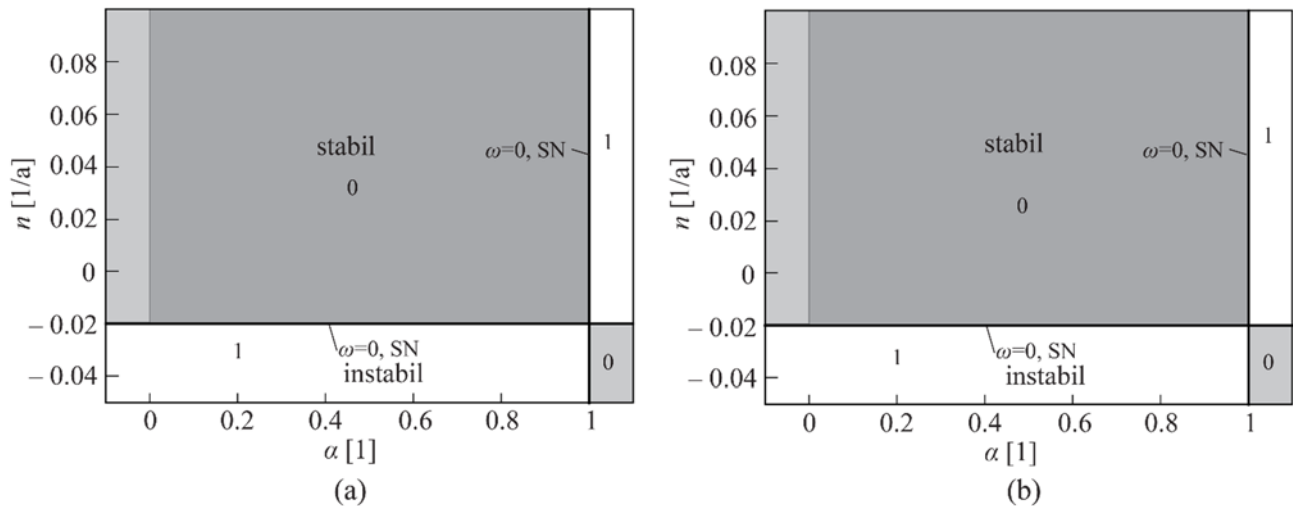
$$\lambda_{c,l}^k = \frac{(\alpha-1)(\delta e^{-n\tau} + n)}{1+(\alpha-1)\delta e^{-n\tau}\tau + \alpha n\tau} \text{ és } \Delta\lambda^k = \frac{1}{1+(\alpha-1)\delta e^{-n\tau}\tau + \alpha n\tau} \frac{(\delta e^{-n\tau} + n)}{(\delta+n)}, \quad (2.83)$$

természetesen $\tau = 0$ értékre ez is szolgáltatja az eredeti Solow - modelből származó konvergencia sebességet.

Ebben az esetben megfelelően kicsi α esetén a konvergencia sebesség növekedhet a kését nem tartalmazó Solow - modellhez képest, de létezik megfelelően nagy tőke részarány, a használt realisztikus paraméterek mellett, például $\alpha = 1/3$ ilyen, amire az időkésés növekedésével a konvergencia sebesség lassul. Megfigyelhető az is, hogy $\tau \rightarrow \infty$ esetén $\Delta\lambda^k \rightarrow 0$.

2.5.5. Azonnali amortizáció és késleltetett amortizáció összehasonlítása

Láthattuk, hogy az egyensúlyi helyzetet befolyásolja az időkésés mértéke, illetve az sem mindegy, hogy milyen az aránya a munkaerő és az amortizáció késésének, vagy éppen az α értéke mekkora. Léteznek olyan, a modell által nem kizárt paraméter választások, ahol az időkésés növekedésével a fajlagos munka értéke növekszik, tehát a gazdaság jobban teljesít.



7. ábra: A k_1^* egyensúlyi helyzet stabilitása (a) azonnali és (b) késleltetett tőkeamortizáció esetén realisztikus paraméterekre, $\delta=0.02$ 1/év és $\tau=1/4$ év

Annak ellenére, hogy a késleltetett tőkeamortizáció esetén létezik dinamikus (Hopf) stabilitásvesztés, realisztikus paraméterek mellett ez nem fordul elő, hiszen 2%-os amortizáció mellett 18.39 évnél magasabb időkésés lenne szükséges ahhoz, hogy ez előforduljon. A 7. ábrán láthatóak a nem

triviális egyensúlyi helyzethez tartozó stabilitási diagramok késleltetett, illetve nem késleltetett tőke-amortizáció esetén. Ezen ábrázolási tartomány mellett a különbség mindenképpen vonalvastagság alatti, így elhanyagolhatónak tekinthető.

Konvergencia sebességek esetén nem egyértelmű a kép, míg azonnali amortizáció esetén a konvergencia sebesség csökken, úgy késleltetett amortizáció esetén ez a tőke a termelésben lévő részarányától függ. Ezen mutatók is megvizsgálhatóak reális paraméterekkel, amiből kiderül, hogy lényegi különbség ezen a téren sem adódik a különböző modellek között. Az egyértelműen kijelenthető azonban, hogy késleltetett amortizáció esetén a konvergencia sebesség gyorsabb, mint azonnali tőkeamortizáció esetén. Ez könnyen belátható, növekvő gazdaság esetén, hiszen ilyenkor mindig kevesebb tőke amortizálódik, mint a másik esetben, ezért gyorsabban tart az egyensúlyi helyzet felé.

A 8.1. mellékletben találhatóak numerikus szimulációk a tőkére vonatkozóan, amelyek csak és kizárólag illusztrációs célokat szolgálnak a különböző esetek bemutatására. Például ilyen a határciklus létezése. A numerikus szimulációk *Wofram Mathematica 10* szoftver *NDSolve* nevű beépített függvényének felhasználásával készültek.

3. TECHNIKAI HALADÁS

Ebben a fejezetben a növekedéspolitika irodalmához hasonlóan kiterjesztésre kerül az eddig bemutatott modell, a technológiai fejlődésének egy egyszerű figyelembevételével (az egész fejezetben Barro et al (2005) könyvét veszem alapul, melyet kiterjeszttek késleltetett esetre is).

3.1. Technológia figyelembevételének lehetőségei

Ha feloldjuk azt a megkötést, miszerint a technológia ($T(t)$) szintje állandó az időben, akkor vizsgálhatjuk a hatását is. Az egyszerűség kedvéért a technológiát kívülről adott változónak tekintjük, tehát a technológia fejlődése független a mind a tőke, mind a megtakarítás, és főként a beruházások, illetve a népesség alakulásától is.

Ezáltal a technológia fejlődése termelési függvényen keresztül vehető figyelembe. Az úgynevezett semleges technológiai fejlődéshez három különböző definíció köthető, időrendi sorrendben Hicks (1932), Harrod (1942) és Solow (1969). A továbbiakban nem kronológiai sorrendben haladunk, mivel belátható, hogy a steady state létezésének kikötésével, a többi modell is visszavezethető Harrod-éra.

3.1.1. Harrod - féle semlegesség

Harrod akkor nevezi a fejlődést semlegesnek, ha adott tőke - kibocsátás arány mellett a relatív bementi részesedések állandóak maradnak, azaz:

$$\frac{K \cdot F_K}{L \cdot F_L} = \text{áll.} \quad (3.1)$$

Robinson (1938) és Uzava (1961) megmutatta, hogy ez a megkötés átfogalmazva a termelési függvényre az alábbián néz ki:

$$Y = F(K, L \cdot T) . \quad (3.2)$$

Ezt az alakot másképpen munka - növelő technológiai fejlődésnek nevezzük, hiszen ebben az esetben a technológia szintje (T) a munka szorzója.

3.1.2. Hicks - féle semlegesség

A legkorábbi modell azt feltételezi, hogy adott tőke-munka arány esetén a határtermékek változatlanok maradnak a technológia változása esetén is. Ezen elgondolás mellett a termelési függvény a következőképpen alakul:

$$Y = T \cdot F(K, L) . \quad (3.3)$$

Amennyiben a technológia növekedési üteme adott

$$\dot{T}(t) = x > 0 \quad (3.4)$$

belátható, hogy konstans növekedési ütemet a tőkében akkor kaphatunk, ha a Cobb-Douglas termelési függvényt használjuk. Ez a feltétel nem korlátozza további vizsgálatainkat, hiszen eddig is ezt a megközelítést használtuk. Amennyiben viszont egy ilyen speciális termelési függvényre szűkítjük a vizsgálatot, akkor megmutathatjuk, hogy a (3.3) termelési függvény átírható a

$$Y = (\text{konst})TK^\alpha L^{1-\alpha} = (\text{konst})K^\alpha \left(e^{\beta t} L\right)^{1-\alpha} \quad (3.5)$$

alakba, ahol

$$\beta_t = \frac{x}{1-\alpha} \quad (3.6)$$

Tehát ilyen feltevések mellett is használhatjuk a (3.2) termelési függvényt, azzal a különbséggel, hogy ebben az esetben a technológiát modellező változó növekedési üteme nem x , hanem β_t .

3.1.3. Solow - féle semlegesség

Ez az alapvetés került publikálásra a legkésőbb. Akkor nevezi a technológiai fejlődést semlegesnek, ha adott munka - kibocsátás arány mellett, a relatív bementi részesedések állandóak maradnak. Ez azt eredményezi, hogy a termelési függvény

$$Y = F(K \cdot T, L) \quad (3.7)$$

alakú. Ezt tehát másképpen tőke növelő technológiai fejlődésnek is nevezhetjük, hiszen itt a technológia a tőke szorzója. Ebben az esetben is belátható, hogy csak a Cobb-Douglas termelési függvény használható. Ez ebben az esetben is (3.5) alakú, azzal a különbséggel, hogy itt az x növekedési ütem helyett:

$$\beta_t = \frac{\alpha x}{1-\alpha} \quad (3.8)$$

kell használni.

Itt megjegyzendő, hogy tetszőleges

$$Y = F(K \cdot B, L \cdot A), \quad A = e^{xt}, \quad B = e^{zt} \quad (3.9)$$

termelési függvény esetén belátható, hogy ha $z \neq 0$, akkor csak a Cobb-Douglas termelési függvény használható, hogy a tőkére állandó növekedési ütemet kapjunk, amely elvárás ezektől a modellektől.

Minden ilyen termelési függvényhez található egy vele ekvivalens ((3.5) alakú)

$$Y = (\text{konst})K^\alpha \left(e^{\beta_t t} L\right)^{1-\alpha}, \quad (3.10)$$

amely akkor megfelelő, ha β_t -t

$$\beta_t = \frac{z\alpha + x(1-\alpha)}{1-\alpha} \quad (3.11)$$

alakban választjuk.

3.2. Mozgási egyenlet meghatározása

Ebben a megközelítésben a modellt leíró mozgási egyenlet a tőkére vonatkozóan megegyezik a 2. fejezet (2.19) egyenletével:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t - \tau_\delta) , \quad (3.12)$$

ezen felül természetesen mind a munka, mind a technológia dinamikája is ismert:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \quad \text{és} \quad \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = x . \quad (3.13)$$

Jelen esetben viszont nem a munkára eső tőkét vezetjük be, hanem az egységnyi effektív munkaerőre eső tőkét:

$$\hat{k}(t) = \frac{K(t)}{L(t)T(t)} . \quad (3.14)$$

Tehát a (3.12) egyenlet mind két oldalát el kell osztani a munka és tőke szorzatával. Ebben az esetben a bal oldal a következőképp alakul:

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)T(t)} = \dot{\hat{k}}(t) + (n+x)\hat{k}(t) , \quad (3.15)$$

míg a jobb oldal első tényezője:

$$\hat{y}(t) = \frac{Y(t)}{L(t)T(t)} = F\left(\frac{K(t-\tau)}{L(t)T(t)}, \frac{L(t-\tau_L)T(t)}{L(t)T(t)}\right) = \Lambda_{\mu_L} f(\hat{k}(t-\tau)\hat{\Lambda}_{1-\mu_L}) , \quad (3.16)$$

ahol

$$\hat{\Lambda}_{1-\mu_L} = e^{-x\tau} e^{-n(1-\mu_L)\tau} = e^{-(x+n-\mu_L n)\tau} \quad (3.17)$$

és a második tényező pedig a

$$\frac{K(t-\tau_\delta)}{L(t)T(t)} = \hat{k}(t-\tau_\delta)\hat{\Lambda}_{\mu_\delta} \quad (3.18)$$

módon alakul, ahol

$$\hat{\Lambda}_{\mu_\delta} = e^{-\mu_\delta(n+x)\tau} . \quad (3.19)$$

Itt látható, hogy a technológia azonnal (késés nélkül) jelenik meg az egyenletekben. Emellett azzal lehet érvelni, hogy a technológia (információ) terjedése nagyon gyorsnak tekinthető, így ez

minden gazdasági szereplőhöz eljut végtelenül gyorsan. Természetesen ez a kép árnyalható, mely további vizsgálatok tárgyát képezheti.

Ebben az esetben a mozgási egyenlet a következő formában írható fel:

$$\hat{k}(t) = s\Lambda_{\mu_L} f(\hat{\Lambda}_{1-\mu_L} \hat{k}(t-\tau)) - \delta\hat{\Lambda}_{\mu_\delta} \hat{k}(t-\tau_\delta) - (n+x)\hat{k}(t), \quad (3.20)$$

mely a Cobb-Douglas termelési függvényt felhasználva:

$$\hat{k}(t) = s\Lambda_{\mu_L} \hat{\Lambda}_{1-\mu_L}^\alpha \hat{k}^\alpha(t-\tau) - \delta\hat{\Lambda}_{\mu_\delta} \hat{k}(t-\tau_\delta) - (n+x)\hat{k}(t). \quad (3.21)$$

3.3. A steady state és a konvergencia feltétele

A további vizsgálatokra vonatkozóan itt megjegyezzük, hogy a (3.21) egyenlet megfeleltethető a (2.25) egyenletnek, úgy hogy a $k \rightarrow \hat{k}$, $\Lambda_{1-\mu_L} \rightarrow \hat{\Lambda}_{1-\mu_L}$ és $\Lambda_{\mu_\delta} \rightarrow \hat{\Lambda}_{\mu_\delta}$ lineáris leképezéseket használjuk. Tehát a 2 fejezetben bemutatott gondolatmenetek, okfejtések itt is megismételhetők a fent említett átjelölésekkel. Ennek nyomán itt csak az eredményeket közöljük még egyszer.

3.3.1. Egyensúlyi helyzet meghatározása

Hasonlóan az exogén technológia haladást nem tartalmazó modellhez, itt is két darab egyensúlyi helyzet létezhet:

$$\hat{k}_0^* = 0 \quad \text{és} \quad \hat{k}_1^* = \left(\frac{n+x+\delta\hat{\Lambda}_{\mu_\delta}}{sA\Lambda_{\mu_L} \hat{\Lambda}_{1-\mu_L}^\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (3.22)$$

Belátható, hogy az előbbi az mindig instabil, míg a gazdasági értelemben releváns egyensúlyi helyzet stabilitását itt is két esetben fogjuk vizsgálni, az első esetben a tőkeamortizáció már a tőke megjelenésének pillanatában elkezdődik, míg a második esetben a tőke csak a működésbe állása időpontjától kezd amortizálódni.

3.3.2. Azonnali tőkeamortizáció esete

Ebben az esetben a dinamikát is leíró idővel is dimenziótalanított lineáris differenciálegyenlet a következő:

$$\hat{k}'(\tilde{t}) = \alpha\tau(n+x+\delta)\hat{k}(\tilde{t}-1) - (n+x+\delta)\tau\hat{k}(\tilde{t}), \quad (3.23)$$

ahol \hat{k} az effektív munkaerővel fajlakosított tőkéből képezhető.

Így a karakterisztikus függvény:

$$D(\lambda) = \lambda - \alpha\tau(n+x+\delta)e^{-\lambda} + (n+x+\delta)\tau. \quad (3.24)$$

Mivel a karakterisztikus függvény hasonló alakú mit az előző fejezetben, így ugyanúgy található nyereg - csomó bifurkáció, valamint dinamikus stabilitási határ is:

$$\alpha_{\text{SN}} = 1 \quad \text{vagy} \quad \tau(n+x+\delta)_{\text{SN}} = 0, \quad (3.25)$$

$$\alpha_{\text{H}} = \frac{1}{\cos(\omega)} \quad \text{és} \quad \tau(n+x+\delta)_{\text{H}} = -\frac{\omega}{\tan(\omega)},$$

Ezek ismeretében az 2. ábrához hasonló stabilitási térkép szerkeszthető, melyen csak a függőleges tengely kap más elnevezést: $\tau(n+x+\delta)$ a $\tau(n+\delta)$ helyett.

Vagyis az Inada feltételek által szabott határokat is figyelembe véve, ez az egyensúlyi helyzet is csak statikusan vezítheti el a stabilitását. Stabil esetben a konvergencia sebességét szintén lehet lineáris approximációval becsülni:

$$\lambda_{c,l}^{\hat{k}} = \frac{(1-\alpha)(\delta+x+n)}{1+\alpha\tau(\delta+x+n)}, \quad (3.26)$$

valamint a kibocsátásra vonatkozó konvergencia sebességre pedig a

$$\lambda_{c,l}^{\hat{y}} = e^{-(n+x)\tau} \frac{(1-\alpha)(\delta+x+n)}{1+\alpha\tau(\delta+x+n)} \quad (3.27)$$

összefüggést kaphatjuk, hasonlóan a technológiai növekedést mellőző modellhez.

3.3.3. Késleltetett tőkeamortizáció esete

Hasonlóan az előző ponthoz ebben az esetben a dinamikát leíró linearizált differenciálegyenlet a következő:

$$\hat{k}'(\tilde{t}) = \left((\alpha-1)\delta\hat{\Lambda}_{\mu_s}\tau + \alpha(n+x)\tau \right) \hat{k}(\tilde{t}-1) - \tau(n+x)\hat{k}(\tilde{t}), \quad (3.28)$$

ami alapján a karakterisztikus függvény az alábbira adódik:

$$D(\lambda) = \lambda - \left((\alpha-1)\delta\hat{\Lambda}_{\mu_s}\tau + \alpha(n+x)\tau \right) e^{-\lambda} + \tau(n+x). \quad (3.29)$$

Ezek alapján a statikus illetve dinamikus stabilitási határokat definiáló összefüggések a következők:

$$\alpha_{\text{SN}} = 1 \quad \text{vagy} \quad \tau(n+x+\delta e^{-(n+x)\tau})_{\text{SN}} = 0, \quad (3.30)$$

$$\alpha_{\text{H}} = 1 - \frac{\omega \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)}{(n_{\text{H}}(\omega)+x)\tau + \delta\tau e^{-(n_{\text{H}}(\omega)+x)\tau}} \quad \text{és} \quad n_{\text{H}} = -\frac{\omega}{\tau \tan(\omega)} - x.$$

Tehát a stabilitási térkép az kvalitatíve ugyanúgy néz ki, mint az 6. ábrán, csak a vízszintes tengelyt szükséges eltolni negatív irányba x -szel.

Végül meghatározható az egységnyi effektív munkára jutó tőke konvergencia sebessége erre az estre is, ami:

$$\lambda_{c,l}^k = \frac{(\alpha - 1)(\delta e^{-(n+x)\tau} + n + x)}{1 + (\alpha - 1)\delta e^{-(n+x)\tau} \tau + \alpha(n+x)\tau} . \quad (3.31)$$

3.4. Exogén technológia bevezetésének eredményei

Az így bevezetett technológiai haladás garantálja a pozitív növekedési rátát. Kvalitatíve az idő-késésnek nincsen hatása a neoklasszikus modellhez képest, tekintve, hogy algebrailag a munkaerő növekedési ütemét kellett megnövelni a technológiai fejlődés növekedési ütemével x . Ezzel együtt a modell problémája, hogy ez a növekedési ütem egy exogén tényező, így a növekedési ütem magyarázata, nem a modellen belül történik. Itt érdemes megjegyezni, hogy az ilyen fajta technológiai haladás bevezetése nem csak a növekedés ütemét, hanem a konvergencia sebességét is növeli, de kisebb mértékben, mint azt időkésést nem tartalmazó variánsa.

A 8.2. mellékletben találhatóak numerikus szimulációk a tőkére vonatkozóan ehhez a modellhez, amelyek csak és kizárólag illusztrációs célokat szolgálnak a különböző esetek bemutatására. A numerikus szimulációk *Wofram Mathematica 10* szoftver *NDSolve* nevű beépített függvényének felhasználásával készültek.

4. IDŐKÉSÉS AZ AK MODELLBEN

Az alábbi fejezetben bemutatásra kerülő modell a neoklasszikus növekedési modell egy speciális esetének tekinthető, ahol a munkaállomány nincs figyelembe véve explicit módon a termelési függvényben. Ezen modellek körében nem érvényes a csökkenő hozadékok elve, mely irreális feltevésnek is tűnhet. Ha azonban a tőkének egy kiterjesztet értelmezését tekintjük (például beletartozhat a fizikai- és a humántőke is), akkor a modell védhetővé válik. (ld. Domar (1946), ahol a bemutatott termelési szerkezet tekinthető AK típusú termelési függvénynek is, mivel itt a szerző nem foglalkozik a munkaerőpiaccal, nem tekinti szűk erőforrásnak azt.)

4.1. Mozgási egyenlet meghatározása

Ebben az esetben a termelési szerkezetet az úgynevezett AK termelési függvény írja le, melyben a jelenlegi kibocsátást a tőke múltbeli értéke határozza meg:

$$Y(t) = AK(t-\tau) , \quad (4.1)$$

ahol A egy pozitív konstans szinttényező. Ezek alapján látható, hogy az AK modell egy határeset a Cobb - Douglas – féle termelési függvénnyel operáló neoklasszikus növekedésméletnek, mégpedig a (2.24) termelési függvényben az $\alpha = 1$ paramétert kell használni.

A 2. fejezetben ismertetett fundamentális egyenlet meghatározása intenzív mennyiségekkel itt is megismételhető, aminek eredményeképpen a következő mozgási egyenletet kaphatjuk:

$$\dot{k}(t) = sA\Lambda_1 k(t-\tau) - \delta\Lambda_{\mu_s} k(t-\tau_s) - nk(t) , \quad (4.2)$$

ahol $\Lambda_1 = e^{-nr}$.

4.2. A steady state és növekedési ütem

Ebben a fejezetben szemléltetésre kerül, hogy a közgazdasági értelemben értékesebb steady state megoldást ez a modell nem szolgáltatja, tehát a (4.2) fundamentális egyenletnek, csak a triviális egyensúlyi helyzete létezik. Ennek ellenére a modell endogén módon magyarázza a gazdasági növekedést.

4.2.1. Egyensúlyi helyzet meghatározása

Az egyensúlyi helyzetet meghatározó egyenletet úgy kaphatjuk, ha feltételezzük azt, hogy a tőke nem változik időben, tehát:

$$\dot{k}(t) \equiv 0 \quad \text{azaz} \quad k(t) \equiv k(t-\tau) \equiv k(t-\tau_s) \equiv k^* , \quad (4.3)$$

Így a kapott algebrai egyenlet:

$$0 = (sA\Lambda_1 - \delta\Lambda_{\mu_s} - n)k^* . \quad (4.4)$$

Amennyiben k^* együtthatója zérus, akkor tetszőleges fajlagos tőkeérték megoldás, ellenkező esetben csak a $k^* = 0$ megoldása az egyenletnek. Ezen két különböző típusú megoldást fogjuk a következőkben vizsgálni azonnali, illetve késleltetett tőkeamortizáció esetére.

4.2.2. Azonnali tőkeamortizáció esete

Azonnali tőkeamortizációt feltételezve a differenciálegyenlet, mely ebben az esetben lineáris, az alábbi alakra hozható:

$$\dot{k}(t) = sA\Lambda_1 k(t-\tau) - (\delta+n)k(t) . \quad (4.5)$$

Először vizsgáljuk meg azt az esetet, ahol minden egy főre eső tőkeérték megoldás, tehát:

$$0 = sA\Lambda_1 - \delta - n , \quad (4.6)$$

aminek segítségével a (4.5) egyenlet

$$\kappa'(\tilde{t}) = (\delta+n)\tau(\kappa(\tilde{t}-1) - \kappa(\tilde{t})) \quad (4.7)$$

alakra hozható. Az ehhez tartozó karakterisztikus függvény:

$$D(\lambda) = \lambda - (\delta+n)\tau(e^{-\lambda} - 1) . \quad (4.8)$$

A karakterisztikus egyenletnek a $\lambda = 0$ gyöke, tehát a megoldás nem lehet aszimptotikusan stabilis. A karakterisztikus exponenst $\lambda = \sigma + i\omega$ alakban keresve ($\sigma, \omega \in \mathbb{R}$) beláthatjuk azt, hogy a zérustól különböző gyökök valósrésze negatív, mivel a karakterisztikus egyenletből ω kifejezhető:

$$\omega = \pm \sqrt{e^{-2\sigma}\tau^2(\delta+n)^2 - (\tau(\delta+n) + \sigma)^2} , \quad (4.9)$$

ami csak $\sigma < 0$ -ra adhat $\omega \neq 0$ valós megoldást. Tehát ebben az esetben a tetszőleges egyensúlyi helyzet Lyapunov értelemben stabilis (lásd Gantmacher (1975) 166-176), vagyis kis zavarás esetén a megoldás nem távolodik el a vizsgált egyensúlyi helyzettől nagyon messzire.

Következőkben vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a (4.6) egyenlőség nem áll fenn. Ilyen esetben csak egy darab egyensúlyi megoldás létezik, nevezetesen a 0. Írjuk át a (4.5) mozgási egyenletet növekedési rátára, ahhoz meg tudjuk vizsgálni, azt hogy a késleltetett eset miben tér el a késést nem tartalmazótól:

$$\gamma_k = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sA\Lambda_1 \frac{k(t-\tau)}{k(t)} - (\delta+n) = sA\Lambda_1 e^{-\tilde{\lambda}\tau} - (\delta+n) , \quad (4.10)$$

ahol γ_k az egy főre eső tőke növekedési rátája megegyezik a dimenzióval rendelkező karakterisztikus exponenssel $\tilde{\lambda}$ (a differenciálegyenlet megoldása felhasználásra került a (4.10) összefüggés származtatása során).

Az egy főre eső tőke növekedési rátáját (legnagyobb karakterisztikus exponens) lineáris közelítése meghatározható, amennyiben linearizáljuk a (4.10) jobb oldali összefüggését a zérus érték körül:

$$\tilde{\lambda} = sAe^{-n\tau} (1 - \tilde{\lambda}\tau) - (\delta + n) , \quad (4.11)$$

melynek megoldása:

$$\gamma_k = \tilde{\lambda}_1 = \frac{sAe^{-n\tau} - (\delta + n)}{1 + sA\tau e^{-n\tau}} . \quad (4.12)$$

Itt meg kell, hogy jegyezzük, hogy mivel a vizsgált egyensúlyi helyzetet a 0, ezért a tőke növekedési rátája és a konvergencia sebesség megegyezik.

Feltételezve azt, hogy minden paraméter valós és pozitív, akkor a (4.12) összefüggés nevezője mindig pozitív, tehát a karakterisztikus exponens előjelét csak a számláló határozza meg, tehát az egy főre eső zérus tőkemennyiség instabil, akkor és csak akkor, ha:

$$sAe^{-n\tau} > (\delta + n) , \quad (4.13)$$

itt megjegyzendő, hogy ez nem csak a karakterisztikus exponens lineáris közelítésére, hanem magára a karakterisztikus exponensre is igaz.

Jelen esetben viszont az instabil megoldás az érdekesebb közgazdasági szempontból. Ilyenkor a növekedési ütemét az egy főre eső tőkének lineáris közelítésben a (4.12) összefüggés határozza meg. Megfigyelhető, hogy ez a növekedési ütem kisebb, mint az időkésést nem tartalmazó esetben, mely eltérés akár több 10 %-os is lehet.

Vagyis a késeltetett AK modell esetén is létezhet a kibocsátásnak pozitív hosszú távú növekedési üteme akár exogén technikai haladás nélkül is. Az időkésést ezt a növekedési ütemet csökkentheti, akár szignifikánsan is.

4.2.3. Késeltetett tőkeamortizáció esete

Ebben a fejezetben azt az esetet vizsgáljuk, ahol a tőke amortizációja a kibocsátásával egyező mértékben jelenik meg később. Ezt a modellt leíró (lineáris) differenciálegyenlet a

$$\dot{k}(t) = (sA - \delta) \Lambda_1 k(t - \tau) - nk(t) . \quad (4.14)$$

Először itt is vizsgáljuk meg azt az esetet, ahol minden egy főre eső tőkeérték steady state, tehát

$$0 = (sA - \delta) \Lambda_1 - n , \quad (4.15)$$

aminek segítségével az idővel is dimenziótalanított mozgásegyenletet a

$$\kappa'(\tilde{t}) = n\tau (\kappa(\tilde{t} - 1) - \kappa(\tilde{t})) \quad (4.16)$$

formára lehet hozni. Ahol tulajdonképpen csak a jobboldali tag együtthatója különbözik a (4.7) összefüggéstől. Ezek alapján a 4.2.2 fejezetben vázolt gondolatmenet megismételhető és megállapítható

az, hogy ebben az esetben is Lyapunov értelemben lesz stabilis a kiválasztott egyensúlyi helyzet, vagyis a zavarás mértékétől függően fog eltávolodni az eredeti egyensúlyi helyzettől.

Ezek után vizsgálhatjuk azt az esetet, amikor az egyensúlyi helyzet egyértelmű. Késleltetett tőkeamortizáció esetén az egy főre eső tőke növekedési rátája:

$$\gamma_k = \tilde{\lambda} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = (sA - \delta) \Lambda_1 \frac{k(t-\tau)}{k(t)} - n = (sA - \delta) \Lambda_1 e^{-\tilde{\lambda}\tau} - n . \quad (4.17)$$

Ilyenkor az egy főre eső tőke növekedési rátájának lineáris közelítése:

$$\gamma_k = \tilde{\lambda}_1 = \frac{(sA - \delta) e^{-n\tau} - n}{1 + (sA - \delta) \tau e^{-n\tau}} . \quad (4.18)$$

Ez a modell akkor és csak akkor lesz instabil ha

$$(sA - \delta) e^{-n\tau} > n , \quad (4.19)$$

ahonnan láthatjuk, hogy ebben az esetben kisebb amortizáció (avagy munkaerő növekedési ráta) esetén is előfordulhat, hogy a gazdaság nem növekszik, hanem csökken. Emellett, ha növekszik is, akkor is lassabban növekszik, mint akár az időkésést nem tartalmazó, vagy akár az azonnali tőkeamortizációt feltételező modell esetén.

4.3. Technikai haladás az AK modellben

Exogén technológiai haladás bevezethető ezen modell esetén is, a 3. fejezetben használt módszer itt is alkalmazható. Az eredmények is hasonlóan alakulnak, a technológiai haladás növeli az endogén, pozitív hosszú távú növekedési ráta megvalósulását. Technikailag a 4.2. fejezet eredményeit meg lehet ismételni azzal a különbséggel, hogy minden n helyére $n + x$ -et helyettesítünk.

4.4. AK modell eredményei

Láthattuk, hogy a késleltetett AK modellek esetén is vagy egyensúlyi helyzetek csoportjait kaphatjuk, ahol a kezdeti feltételek döntenek el, hogy melyik egyensúlyi helyhez fog tartani a gazdaság, vagy egyéb esetben csak 0 tőke, így csak a 0 kibocsátás létezik, mint egyensúlyi megoldás, ami könnyebben válik instabillá. Azt itt meg kell jegyezni, hogy az első eset, csak egy bizonyos paraméterválasztás mellett lehetséges, mely a valóságban nem áll fenn (hiszen, ehhez szigorú egyenlőségnek kellene teljesülnie, lásd a (4.6) és (4.15) összefüggéseket).

Az időkésésnek azonban itt is van hatása a konvergencia sebességre, azonnali tőkeamortizáció esetén kisebb, míg késleltetett tőkeamortizáció esetén nagyobb. Ez a realitás talaján mozog, hiszen ha egy pozitív tőkeértéktől indulunk, az lassabban fog csökkenni (tehát közeledni a 0 egyensúlyi hely felé) akkor, ha a gazdaságban kevesebb tőke van. De azt ki kell jelenteni, hogy az időkésés mind a két esetben lassít a konvergencia sebességen.

A 8.3. mellékletben találhatóak numerikus szimulációk a tőkére vonatkozóan ehhez a modellhez, amelyek csak és kizárólag illusztrációs célokat szolgálnak a különböző esetek bemutatására. A numerikus szimulációk *Wofram Mathematica 10* szoftver *NDSolve* nevű beépített függvényének felhasználásával készültek.

5. HUMÁNTŐKE HATÁSA

Ebben a fejezetben a Mankiw – Romer – Weil – modell, továbbiakban MRW, alapján beépítésre kerül a modellünkbe a humántőke hatása (lásd. Mankiw et al. (1992)).

5.1. Mozgási egyenlet meghatározása

A mozgási egyenlet meghatározásához jelen esetben is a termelési függvényből indulunk ki, ahol a humán tőkét (H) is figyelembe vesszük az egyszerűség kedvéért a fizikai tőkével megegyező késséssel:

$$Y(t) = AK^\alpha (t-\tau) H^\beta (t-\tau) L^{1-\alpha-\beta} (t-\tau_L), \quad (5.1)$$

ahol az Inada - feltételekhez hasonlóan itt

$$\alpha, \beta > 0 \quad \text{és} \quad \alpha + \beta < 1 \quad (5.2)$$

feltételeket használjuk. Az (5.1) termelési függvényt intenzív formára hozva kaphatjuk a

$$y(t) = \Lambda_{1-\mu_L}^{\alpha+\beta} \Lambda_{\mu_L} Ak^\alpha (t-\tau) h^\beta (t-\tau), \quad (5.3)$$

összefüggést, ahol $h(t)$ az egy főre jutó humántőke aránya.

Emellett a fizika-, illetve a humántőke bővülésére a neoklasszikus modell felvetéseit érvényesítjük:

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= s_k Y(t) - \delta K(t - \tau_\delta), \\ \dot{H}(t) &= s_h Y(t) - \delta H(t - \tau_\delta), \end{aligned} \quad (5.4)$$

ahol s_k és s_h rendre a kibocsátás fizikai illetve humántőke beruházásra fordított állandó nagysága.

A Solow -- Swan - modell analógiája alapján az MRW modellben a gazdaság fejlődését a következő két differenciálegyenlet írja le:

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= s_k \Lambda_{1-\mu_L}^{\alpha+\beta} \Lambda_{\mu_L} Ak^\alpha (t-\tau) h^\beta (t-\tau) - \delta \Lambda_{\mu_s} k(t - \tau_\delta) - nk(t), \\ \dot{h}(t) &= s_h \Lambda_{1-\mu_L}^{\alpha+\beta} \Lambda_{\mu_L} Ak^\alpha (t-\tau) h^\beta (t-\tau) - \delta \Lambda_{\mu_s} h(t - \tau_\delta) - nh(t). \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.2. A steady state és a konvergencia feltétele

Ezen modell is a gazdasági növekedést hivatott magyarázni, így az (5.5) egyenletek által meghatározott dinamikát fogjuk vizsgálni az egyensúlyi helyzetek és azok stabilitásának segítségével.

5.2.1. Egyensúlyi helyzet meghatározása

Az (5.5) gazdaságot leíró egyenletrendszernek két egyensúly helyzete létezik, akár csak az eredeti Solow – Swan - modellben:

$$k_0^* = 0, \quad h_0^* = 0 \quad \text{és} \quad (5.6)$$

$$k_1^* = \left(\frac{\Lambda_{1-\mu_L}^{\alpha+\beta} \Lambda_{\mu_L} \Lambda_{\mu_s}^{1-\beta} S_h^\beta}{\delta \Lambda_{\mu_\delta} + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}, \quad h_1^* = \left(\frac{\Lambda_{1-\mu_L}^{\alpha+\beta} \Lambda_{\mu_L} \Lambda_{\mu_s}^\alpha S_h^{1-\alpha}}{\delta \Lambda_{\mu_\delta} + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}.$$

ahol a triviális megoldásról (k_0^*, h_0^*) könnyen belátható, hogy instabil minden a (5.2) feltételeket kielégítő paraméterre.

A gazdaságilag releváns esetet vizsgálatához szükség lesz az egyensúlyi helyzet körül linearizált egyenletrendszerre:

$$\dot{\mathbf{X}}(\tilde{t}) = \mathbf{J}\mathbf{X}(\tilde{t}) + \mathbf{T}_1\mathbf{X}(\tilde{t}-1) + \mathbf{T}_2\mathbf{X}(\tilde{t}-\mu_\delta), \quad (5.7)$$

ahol az idővel való dimenziótanítás után a másodrendű mennyiségek:

$$\mathbf{X}(\tilde{t}) = \begin{bmatrix} \kappa(\tilde{t}) \\ \eta(\tilde{t}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = -\tau n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \tau (\delta \Lambda_{\mu_\delta} + n) \begin{bmatrix} \alpha - 1 & \beta \frac{S_k}{S_h} \\ \alpha \frac{S_h}{S_k} & \beta - 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{T}_2 = -\tau \delta \Lambda_{\mu_\delta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

ahol

$$\eta(\tilde{t}) := h(\tilde{t}\tau) - h_1^*. \quad (5.9)$$

5.2.2. Azonnali tőkeamortizáció esete

Azonnali tőkeamortizációt feltételezve az egyensúlyi megoldás közelében a modell viselkedése leírható a következőképpen:

$$\begin{bmatrix} \dot{\kappa}(\tilde{t}) \\ \dot{\eta}(\tilde{t}) \end{bmatrix} = \tau (\delta + n) \begin{bmatrix} \alpha - 1 & \beta \frac{S_k}{S_h} \\ \alpha \frac{S_h}{S_k} & \beta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa(\tilde{t}-1) \\ \eta(\tilde{t}-1) \end{bmatrix} - \tau (\delta + n) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa(\tilde{t}) \\ \eta(\tilde{t}) \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Hasonló módon itt is megkapható a karakterisztikus függvény:

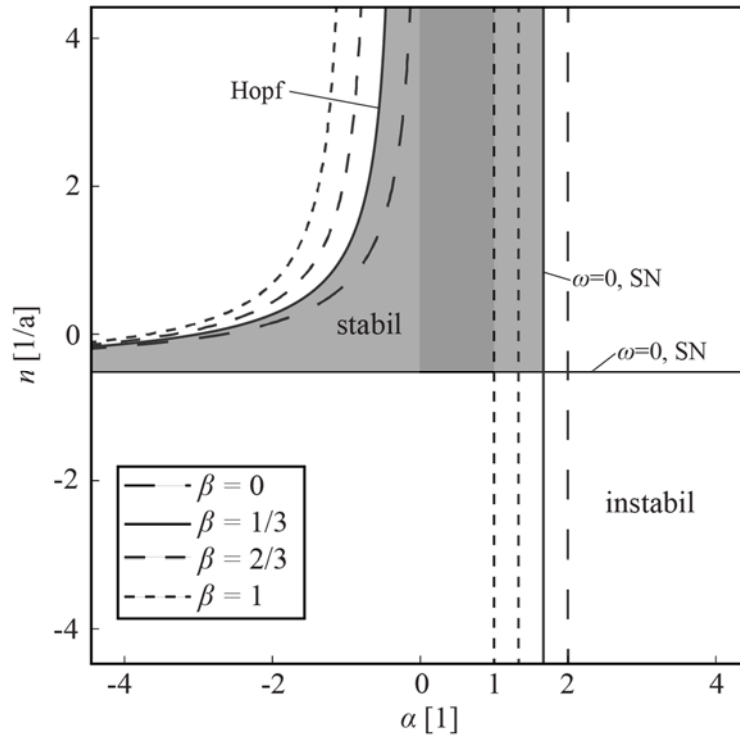
$$D(\lambda) = \lambda^2 + (\delta + n)(2 + e^{-\lambda}(2 - \alpha - \beta))\lambda + e^{-2\lambda}(e^\lambda + 1)\tau^2(\delta + n)^2(1 - \alpha - \beta + e^\lambda), \quad (5.11)$$

A $D(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletnek ebben az esetben is végtelen sok gyöke van a késleltetett tag miatt. Az alap Solow – modellhez hasonlóan ebben a rendszerben is találhatunk két darab nyereg - csomó bifurkációhoz tartozó paraméterválasztást:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{SN}} &= 2 - \beta, \\ n_{\text{SN}} &= -\delta. \end{aligned} \quad (5.12)$$

A D-szeparáció segítségével meghatározható Hopf – bifurkációs paraméterpárok származtatása ugyanúgy történik, de itt az egyenletrendszer mérete és a paraméterek száma is növekedett, így ennek

analitikus közlésétől eltekintünk. Fontos megjegyezni, hogy a stabilitás független attól, hogy a kibocsátásnak hányadrészét fordítjuk fizikai-, illetve humántőkére. Ezek alapján konstruálható egy stabilitási térkép, lásd 8. ábra.



8. ábra: A humán tőke részarányának a hatása a stabilitásra azonnali tőkeamortizáció esetén

A 8. ábrán, illetve az (5.12) összefüggésből is jól lehet látni, hogy ahogy a humán tőkének egyre nagyobb a részaránya a megtermelt jövedelemből, úgy egyre közelebb érünk az alap Solow – modellből nyert eredményekhez. Az kijelenthető, hogy a humán tőkének a bevezetése nincsen hatása a stabilitásra, hiszen amennyiben az Inada – feltételek által megszorított keretek között maradunk, csak akkor veszítheti el a stabilitását a vizsgált egyensúlyi helyzet, ha $n < -\delta$, tehát a munkaerő fogy, vagyis a népesség csökken. Az egyetlen különbség az, hogy a jobb alsó kvadránsban eddig létező stabil tartomány eltűnt, de ennek nincsen gyakorlati jelentősége.

5.2.3. Késleltetett tőkeamortizáció esete

Késleltetett tőkeamortizáció esetén a vizsgált steady-state körüli kis zavarásokat figyelembevevő lineáris modellt a következőképpen írható:

$$\begin{bmatrix} \dot{\kappa}(\tilde{t}) \\ \dot{\eta}(\tilde{t}) \end{bmatrix} = \left(\tau \delta \Lambda_{\mu_s} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \frac{s_k}{s_h} \\ \alpha \frac{s_h}{s_k} & \beta \end{bmatrix} + \tau n \begin{bmatrix} \alpha - 1 & \beta \frac{s_k}{s_h} \\ \alpha \frac{s_h}{s_k} & \beta - 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \kappa(\tilde{t} - 1) \\ \eta(\tilde{t} - 1) \end{bmatrix} - \tau n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa(\tilde{t}) \\ \eta(\tilde{t}) \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Az ebből származtatható karakterisztikus egyenlet pedig

$$D(\lambda) = \lambda^2 + e^{-\lambda-n\tau} \left(n\tau e^{n\tau} (-\alpha - \beta + 2e^\lambda + 2) - \delta\tau(\alpha + \beta - 4) \right) \lambda + \tau^2 e^{-2(\lambda+n\tau)} \left(2\delta + (e^\lambda + 1)ne^{n\tau} \right) \left(ne^{n\tau} (-\alpha - \beta + e^\lambda + 1) - \delta(\alpha + \beta - 2) \right) \quad (5.14)$$

módon származtatható.

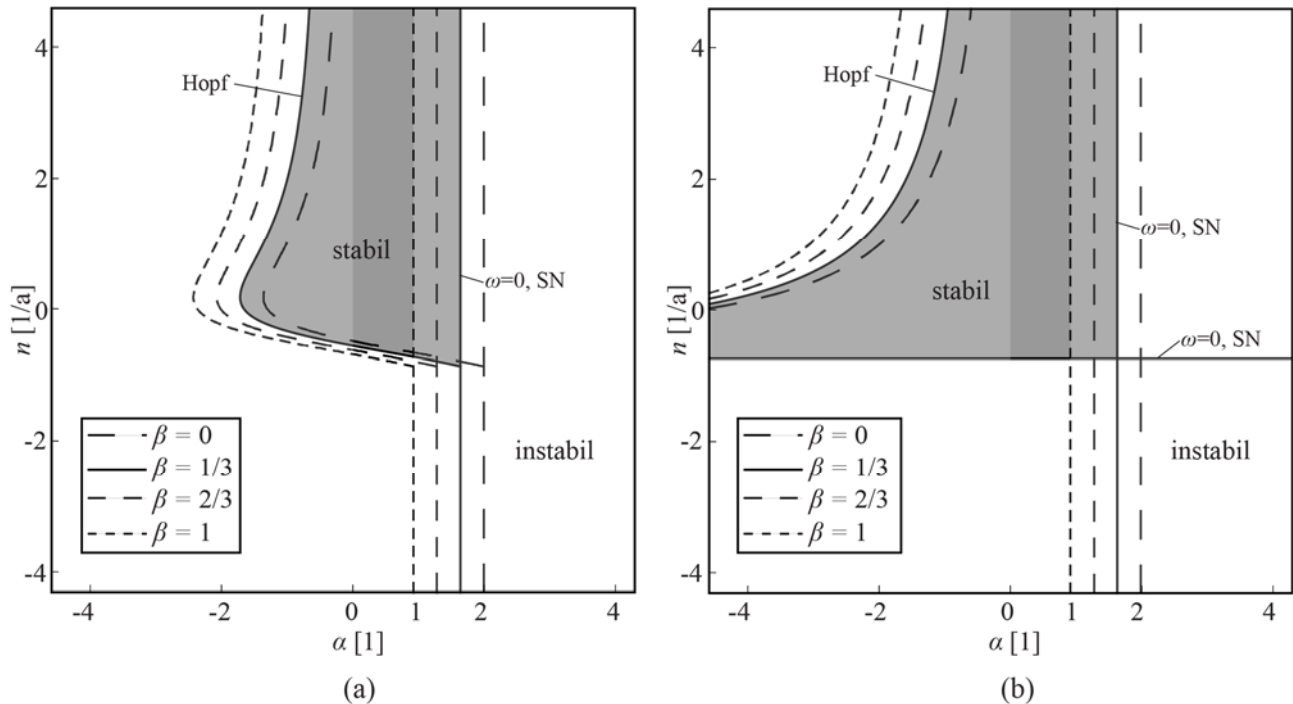
Nyereg-csomó bifurkációhoz tartozó paraméterpárokat itt is találhatunk, ezek az

$$\alpha_{SN} = 2 - \beta \quad (5.15)$$

és az

$$(n + \delta e^{-n\tau})_{SN} = 0 \quad (5.16)$$

egyenlet megoldása, mely n -re vonatkozóan zárt alakban nem adható meg. A Hopf-bifurkációhoz tartozó határok ebben az esetben nem fejezhetőek ki analitikusan zárt alakban, így azokat csak szemléltetjük a már megszokott stabilitási térképeken (lásd 9. ábra). A probléma bonyolultságát szemlélítve a karakterisztikus egyenlet valós, illetve képzetes része megtalálható a mellékletben.



9. ábra: A humán tőke részarányának a hatása a stabilitásra készleteltett tőkeamortizáció esetén, ahol (a) ábra azt az esetet mutatja, amikor létezik dinamikus stabilitásvesztés, $\delta=0.5$ 1/év és $\tau=1$ év, (b) pedig azt, amikor nem létezik ilyen a vizsgált tartományon belül, $\delta=0.5$ 1/év és $\tau=0.5$ év

Ebben az esetben is levonhatóak az egyszerű Solow - modell során megállapított következtetések, miszerint nagy késés, illetve amortizációs hányad esetén az (5.15) kifejezésben szereplő egyenletnek nem lesz valós megoldási, így az egyik stabilitásvesztési határ eltűnik. Ilyenkor elképzelhető az, hogy reális α érték mellett lépünk ki a stabil tartománnyal, úgy hogy az egyensúlyi helyzet dinamikusan veszítse el a stabilitását. Az ehhez szükséges paramétertartományok megegyeznek a 2. fejezetben tárgyaltakkal.

A 9. ábrán látható stabilitási térképeken látszik β hatása is melynek növekedése mellett a stabil tartomány egyre jobbra tolódik. Azt meg kell említeni, hogy ez nem változtat a stabilitási térkép szerkezetén, hiszen a jobb oldali SN határt is csak érinti a stabil tartomány széle szélsőséges β mellett, valamint a Hopf-bifurkációs határ, ami jellemzően ballról határolja a stabil területet is szintén csak érintheti, az általunk vizsgált $0 < \alpha < 1$ tartományt.

5.3. Technikai haladás az MRW modellben

A 3. fejezetben bemutatott modell és eddigi vizsgálataink alapján a technológiai haladás bevezetése az MRW modellbe nem okoz nehézséget. Hasonlóan kell eljárni, mint eddig, az eredmények is hasonlóak annak köszönhetően, hogy a technológiai haladást késés nélkül vezettük be a gyors információáramlásra hivatkozva.

A stabil tartományok ebben az esetben kvalitatíve nem változnának az $\alpha - n$ paraméterterén, csak a függőleges tengely (munka növekedési üteme n) tolódik el lefele. De ettől ugyanúgy található lesz dinamikus stabilitásvesztési határ is a modellben.

5.4. Humán tőke bevezetésének eredményei

A humán tőke bevezetése időkéssel a neoklasszikus modellbe esetünkben egyszerűsítve történt, miszerint azzal a feltételezéssel élünk, hogy a humán tőke azonos mértékű késleltetéssel rendelkezik, mint a fizikai tőke, amely természetesen nem feltétlenül igaz. Erre az egyszerűsítésre modellezési szempontból volt szükség, hiszen, így tudtuk redukálni az egyébként szép számmal rendelkező paraméterek számát, így könnyítve a vizsgálatok komplexségén. Az MRW modell nem csak a több paraméter miatt (például különböző megtakarítási ráták s_k és s_h), hanem a több változó miatt is bonyolultabbá teszi az elemzést. Ezért is került a karakterisztikus egyenlet valós és képzetes része $\lambda = \pm \omega$ esetére a 8.5 mellékletbe. Ezen felül a késleltetett tőkeamortizáció esetén a Hopf - bifurkációhoz tartozó határ analitikusan nem is határozható meg.

A modellből azt az eredményt kaphatjuk, hogy míg az egyensúlyi helyzetek függenek a humán- és fizikai tőkére vonatkozó megtakarítási rátáktól, addig ezek, az egyensúlyi helyzet stabilitására nem gyakorolnak hatást, függetlenül a tőkeamortizáció figyelembevételétől. Emellett azt is láthattuk, hogy a humán tőkének a részaránya a kibocsátásra nézve csak késleltetett tőkeamortizáció esetén befolyásolhatja a stabil tartományt, de ezt is csak viszonylag nagy időkések, illetve amortizációk esetén. Itt is kaphatunk egy kritikus időkést az amortizáció függvényében, melynél már késleltette tőkeamortizáció esetén sem befolyásolja a stabilitást, míg azonnali tőkeamortizáció esetén semmilyen paraméterállás mellett sem tudjuk változtatni a stabilitási határokat. Itt meg kell jegyezni, hogy a tág értelemben vett stabilitási határokat természetesen befolyásolja az egyéb paraméterek megválasztása. Ebben az esetben azonban, csak a $0 < \alpha < 1$ intervallumot helyezzük vizsgálataink középpontjába.

Emellett meg kell jegyezni, hogy kisebb időkésések és amortizációk esetén nem kapunk számottevő különbséget az azonnali, illetve a késleltetett amortizációval történő vizsgálatok között stabilitási szempontból, ahogyan azt a 7. ábrán is láthatjuk az egyszerű neoklasszikus modell esetére. Viszont nagy időkésés esetén, ahol létezik dinamikus stabilitásvesztés, ott az időjelben felfedezhetünk több frekvenciát is, emellett érdekesebb dinamikát (lásd 8.4 melléklet), melyek további vizsgálatra szorulnak.

A8.4. mellékletben találhatóak numerikus szimulációk a tőkére vonatkozóan ehhez a modellhez, amelyek csak és kizárólag illusztrációs célokat szolgálnak a különböző esetek bemutatására. A numerikus szimulációk *Wofram Mathematica 10* szoftver *NDSolve* nevű beépített függvényének felhasználásával készültek.

6. ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat során különböző modelleken keresztül mutattam be, hogy mi a hatása annak, ha egyes tényezők rendelkezésre állnak ugyan, de a termelésbe csak később kapcsolódnak be, ami egy közgazdasági szempontból védhető érv. Ahhoz, hogy ennek az időkésésnek a hatását be tudjam mutatni analitikus vizsgálatokat végeztem, melyeket precíz és pontos matematikai formalizmus segítségével hajtottam végre. Így a bonyolultabb, összetettebb modellek is kezelhetőek maradtak, illetve jól el tudtam különíteni az időkésés hatását. Valamint előnye a dolgozatnak, hogy nem az időkésés nélküli esetre már létező fundamentális egyenletet használtam fel, hanem gazdasági megfontolások alapján származtattam a késleltetett fundamentális egyenletet. Mivel ez a két egyenlet nem egészen egyezik meg, ezért állíthatjuk, hogy így elkerülhettük modellezési hibákat, melyek a végkövetkeztetésekre is hatással lehetnek.

A 2. fejezetben bemutatott alap neoklasszikus modell segítségével először megmutattam, hogy a késleltetett esetben is két darab egyensúlyi helyzet létezik: a nulla és egy pozitív steady state. A nulla megoldás megegyezik az időkésés nélküli modell zérus megoldásával, míg a gazdasági szempontból relevánsabb másik megoldás eltér az időkésés nélküli esethez képest. Ezt az eltérést vizsgálva megállapítottam, hogy az időkésésnek nem mindig negatív a hatása, tehát van olyan eset is, amikor az egyensúlyi megoldás magasabb késéssel, mint nélküle. Ez jellemzően attól függ, hogy a gazdaságban lévő munkaerőnek mennyi a késése, illetve, hogy az amortizációnak van-e késése vagy nincsen, továbbá az α értékétől. Belátható továbbá, hogy ez reális (negyed-fél éves) időkésést figyelembe véve akár elérheti az 5%-ot is. Természetesen a kibocsátásban lévő kellően magas tőke részarány mellett a késés nem javít, hanem ront, ahogyan ezt intuitívan várnánk.

Az egyensúlyi helyzetek létezése mellett egy másik, igen csak jelentős tulajdonság ezen egyensúlyi helyzetek stabilitása. A sima, időkésést nem tartalmazó esetben a zérus egyensúlyi helyzet bármilyen paraméterválasztás mellett instabil, míg a relevánsabb, pozitív egyensúlyi helyzet az Inada feltételek által szabott korlátok között mindig stabil volt. Ez a kép időkésés esetén árnyaltabb, de mindenképp előtérbe kell szögezni, hogy ebben az esetben sem függ a stabilitás a megtakarítási hányadtól, illetve munka késéstől, ami a steady state nagyságánál fontos szerepet játszott. Az időkéséstől alapvetően várt Hopf (dinamikus) stabilitásvesztési határokat, amikkel esetleg a konjunktúraciklusok részben magyarázhatóak lennének, ugyan szolgáltatotta a modell, de azonnali tőkeamortizáció esetén ezek a határok kívül esnek a vizsgált $0 < \alpha < 1$ tartományból. Ezzel ellentétben ilyen határokat találhatunk releváns területen akkor, ha a késleltetett tőkeamortizáció esetét vizsgáljuk. Tehát, ahogyan a melléklet numerikus szimulációi is mutatják, ebben az esetben előfordulhat az, hogy a gazdaság egy egyensúlyi érték körül leng, jól meghatározott amplitúdóval és periódusidővel. Aminek értéke ebben a csak demonstrációt szolgáló példában körülbelül 8 év. Ez a stabilitásvesztési forma viszont csak

viszonylag nagy időkésés és amortizációs ráta esetén képzelhető el, ami napjainkban nem reális, de 100 vagy 200 évvel ezelőtt, vagy akár elmaradottabb régiókban, ahol lassú a befektetések fejlődése (kellően nagy késések esetén kicsi amortizációs ráta is elegendő, de 20%-os amortizáció és 2 éves késés már okozhat problémát) koránt sem elképzelhetetlen. Ami viszont érdekes eredmény az az, hogy pozitív tőkeamortizáció esetén ez csak negatív népszerűség növekedési ütem párosulva képzelhető el, amíg negatív tőkeamortizáció esetén pedig egyáltalán nincsen ilyen. A szakirodalomban elfogadott értékek mellett kijelenthető, hogy nem létezik Hopf – bifurkáció, illetve innen kiinduló határciklus, mely magyarázná a konjunktúraciklusokat.

Ezen eredmények jó egyezőséget mutatnak a szakirodalomban található, már létező modellekkel, kivéve a már említett Guerrini-féle két darab modellt, ahol a kiindulási fundamentális egyenlet, vagy az egyensúlyi helyzet visszahelyettesítése hibás.

A dolgozat első részében részletesen levezetésre került, hogy a konvergencia sebességre, mind a tőkében, mind a kibocsátásban milyen hatása van az időkésésnek. Melyek alapján megállapítható, hogy az időkésés bevezetése csökkenti a konvergencia sebességet minden esetben. Ez a változtatás nem jelentős, kicsi időkésések esetén, maximum 3-4%, de ezen eredmények is figyelembe vehetőek lennének az ökonometriai vizsgálatok során

Az exogén technológiai haladást is beépítettem a modellbe, mely jelentősebb, új eredményeket nem szolgáltatott, hiszen a technológiai haladást késés nélkül illesztettük be a gyors információterjedésre hivatkozva. Természetesen lehetne vizsgálni a technológiában bekövetkező időkésést is, mely szintén későbbi tanulmányok kiindulópontja lehet. Amit viszont ezen vizsgálatok alapján is meg lehet erősíteni, hogy ugyan az egy főre eső GDP ebben az esetben itt is növekszik, akár csak a késés nélküli esetben. Ez azonban a probléma nincsen feloldva, mivel így a modellen kívülre kerülnek a hosszú távú gazdasági növekedés okozói.

Az úgynevezett AK modellek vizsgálatával is foglalkoztam, ahol vagy csak Lyapunov értelemben stabil egyensúlyi helyzetek csoportjáról beszélhetünk, vagy csak a nulla tőke lehet egyensúlyi helyzet. Ez utóbbi a fontosabb, hiszen az első esetből bármilyen kis paraméter-bizonytalanság mellett kimozdulunk. A második esetben viszont az időkésés stabilizálja a zérus egyensúlyi helyzetet, ami egy részről érdekes, hiszen azt gondolhatnánk, hogy az egyensúlyi helyzet egyre instabilabbá kellene váljon növekvő késés mellett. Másrészről ez számunkra a rosszabb eset, hiszen ez azt jelenti, hogy könnyebben alakul ki olyan helyzet, amikor nincs növekedés, sőt csökkenés van. Mindezekkel együtt az AK modellek családja nem tartható magyarázó erejűnek.

A dolgozat végén foglalkoztunk a humántőke bevezetésével, ahol ennek a bonyolultságára való tekintettel egyszerűsítettük a modellt: a humántőkének és a reáltőkének a késése megegyezik. Így

is komplex matematikai összefüggéseket kaphattunk csak, ahonnan a Hopf-bifurkációhoz tartozó stabilitási határ nem is minden esetben határozható meg explicit módon. Itt is hasonló eredmények állapíthatók meg, mint az egyszerű neoklasszikus modell esetén, a stabilitás itt sem függ a megtakarítási rátáktól, akár a reál-, akár a humántőkére vonatkoztatva. Hasonlóan csak késleltetett amortizáció esetén léphet fel dinamikus (Hopf) stabilitásvesztés, ahol található határciklus. Ebben az esetben látható, hogy a humántőke részarányát a kibocsátásban leíró paraméter segítségével arrébb tolhatjuk a stabil tartományt, de az Inada - feltételek mellett így sem határolja a stabil tartományt dinamikus határ.

Jogosan vetődhet fel a kérdés, hogy az időkésés állandó-e, ahogyan azt mi feltételeztük. Természetesen ez nem állandó, hiszen magától értetődik, hogy ha egy gazdaság fejlettebb, akkor a folyamatok is gyorsabban zajlanak le, könnyebb a kapcsolatteremtés, vagy akár nagyobb a bizalom. Ezek nyomán azt lehet feltételezni, hogy minél nagyobb a tőke értéke (minél nagyobb/fejlettebb a gazdaság) annál kisebb a késés mértéke. Ez viszont egy még összetettebb differenciálegyenlet típushoz vezet, az úgynevezett state-dependent delay-t tartalmazóra. Ennek matematikai háttere, ugyan fiatal, de kidolgozott (lásd Hartung & Turi (2000) és Hartung (2005)), melynek már ipari alkalmazása is megjelent, Insperger et al. (2005). Ezek nyomán a jelenlegi modellünk egyszerűen kiterjeszthető, mely szintén a későbbi munkák halmazát bővíti.

7. IRODALOMJEGYZÉK

- Arnol'd, I. V. (1992). *Ordinary Differential Equations* (Third Edit.). Springer-Verlag.
- Asea, P. K., Zak, P. J. (1997) Time-to-build and cycles, *Working Paper: International finance and macroeconomics*
- Barro, R. J., Sala-i-Martin, X. (2004) *Economic Growth*, The MIT Press
- Bianca, C., Ferrara, M., & Guerrini, L. (2013). Hopf bifurcations in a delayed-energy-based model of capital accumulation. *Applied Mathematics and Information Sciences*, **7**, 139–143. doi:10.12785/amis/070116
- Bianca, C., Guerrini, L. (2014). Existence of Limit Cycles in the Solow Model with Delayed-Logistic Population Growth. *The Scientific World Journal*.
- Domar, E. (1946) Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment. *Econometrica*, **14.**, April, 137-147.
- Dombi, Á. (2014) Növekedéspolitika, MSc oktatási segédlet, BME ÜTI
- Faria, T. (2001) Stability and Bifurcation for a Delayed Predator–Prey Model and the Effect of Diffusion. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **254**(2), 433-463.
- Ferrara, M., Guerrini, L., & Sodini, M. (2014). Nonlinear dynamics in a Solow model with delay and non-convex technology. *Applied Mathematics and Computation*, **228**, 1–12.
- Gantmacher, F. (1975). *Lectures in Analytical Mechanics*. MIR Publisher, Moscow, Russia.
- Guerrini, L. (2012a) Constant population growth rate and time to build: the Solow model case, *Economics Bulletin*, **30**, 3260-3265.
- Guerrini, L. (2012b) The Solow-Swan Model with Kaldor-Pasinetti Saving and Time Delay. *Applied Mathematical Sciences*, **6**(72), 3569 - 3573.
- Guerrini, L. (2012c) Delay Differential AK Model with Non-positive Population Growth Rate. *Applied Mathematical Sciences*, **6**(72), 3575–3577.
- Guerrini, L. (2013a) Hopf bifurcation in endogenous labor shift model under dual economy, *International Journal of Mathematical Analysis*, **7**, 1257-1262.
- Guerrini, L. (2013b) Analysis of an Economic Growth Model with Variable Carrying Capacity, *International Journal of Mathematical Analysis*, **7**, 1263-1270.
- Harrod, R. F. (1942) *Toward a Dynamic Economics: Some Recent Developments of Economic Theory and their Application to Policy*. London: Macmillan.

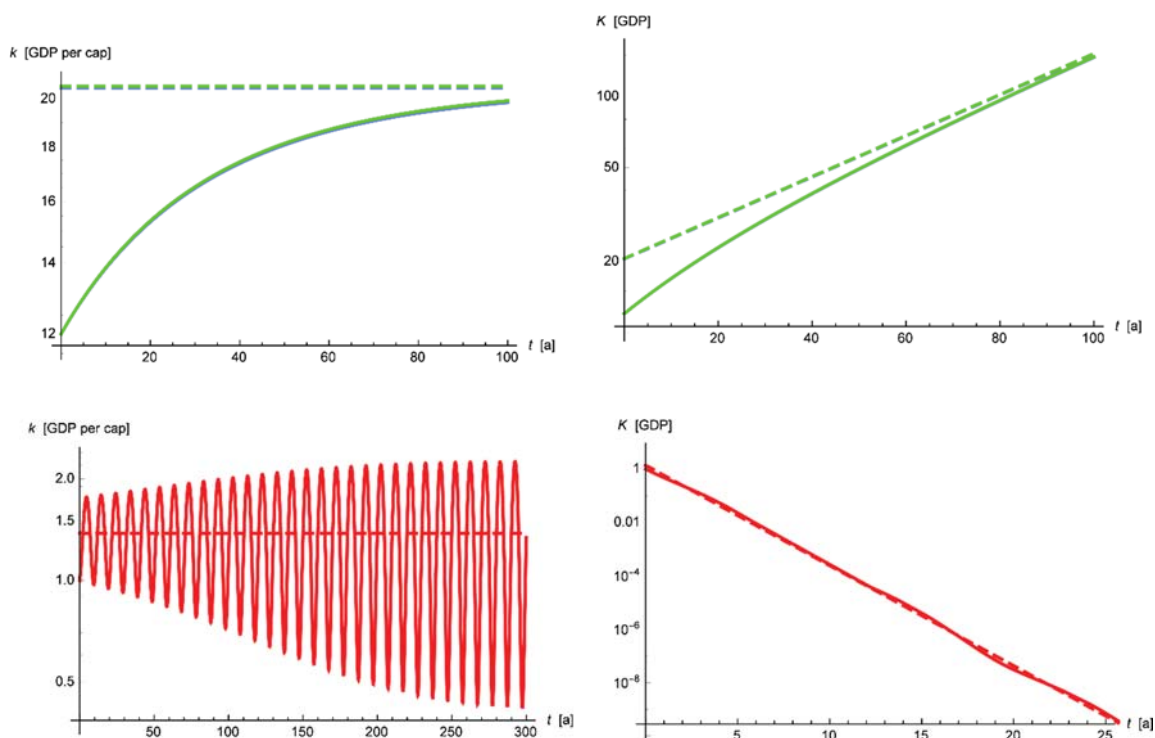
- Hartung, F. & Turi, J. (2000). Linearized stability in functional differential equations with state-dependent delays. *In Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations* **1**, 416–425
- Hartung, F. (2005). Linearized stability in periodic functional differential equations with state-dependent delays. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **174**(2), 201–211. doi:10.1016/j.cam.2004.04.006
- Hayes, N. D. (1950) Roots of the transcendental equations associated with a certain differential-difference equation. *J London Math Soc* **25**, 226–232.
- Hicks, J. (1932) *The theory of wages*. London: Macmillan
- Insperger, T., Stepan, G. (2011) *Semi-discretization for time-delay systems: stability and engineering applications*, Springer
- Insperger, T., Stepan, G., Hartung, F., & Turi, J. (2005). State dependent regenerative delay in milling processes. *Proceedings of 2005 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*
- Krawiec, A., Szydłowski, M. (2009). Investment delay and economic system dynamics. *In Delayed Complex Systems, International Workshop, 5-9 October 2009, Dresden, Germany.*
- Kuznetsov, Y. A. (1998). Elements of Applied Bifurcation Theory. (Second Edi.) *Applied Mathematical Sciences*. Springer.
- Mankiw, N. G., Romer, D., Weil, D. (1992) A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, **107**, 407-437.
- Robinson, J. (1938) The Classification of Inventions. *Review of Economic Studies*, **5**, 139–142.
- Solow, R. M. (1956) A contribution to the theory of economic growth, *Quarterly Journal of Economics*, **70**, 65-94.
- Solow, R. M. (1969) Investment and Technical Change. In Kenneth J. Arrow et al., eds., *Mathematical Methods in the Social Sciences*. Palo Alto, CA: Stanford University Press.
- Stepan, G. (1989) *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*. Longman Scientific & Technical
- Stepan, G. (2009) Delay effects in the human sensory system during balancing. *Phil. Trans. R. Soc. A*, **367**(1891), 1195–1212.
- Szydłowski, M. (2003) Time to build in dynamics of economic models II: models of economic growth. *Chaos, Solitons and Fractals*, **18**, 355-364.

Swan, T. W. (1956) Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, **32**, 334-361.

Uzawa, H. (1961) Neutral Inventions and the Stability of Growth Equilibrium. *Review of Economic Studies*, **28**, 117-124.

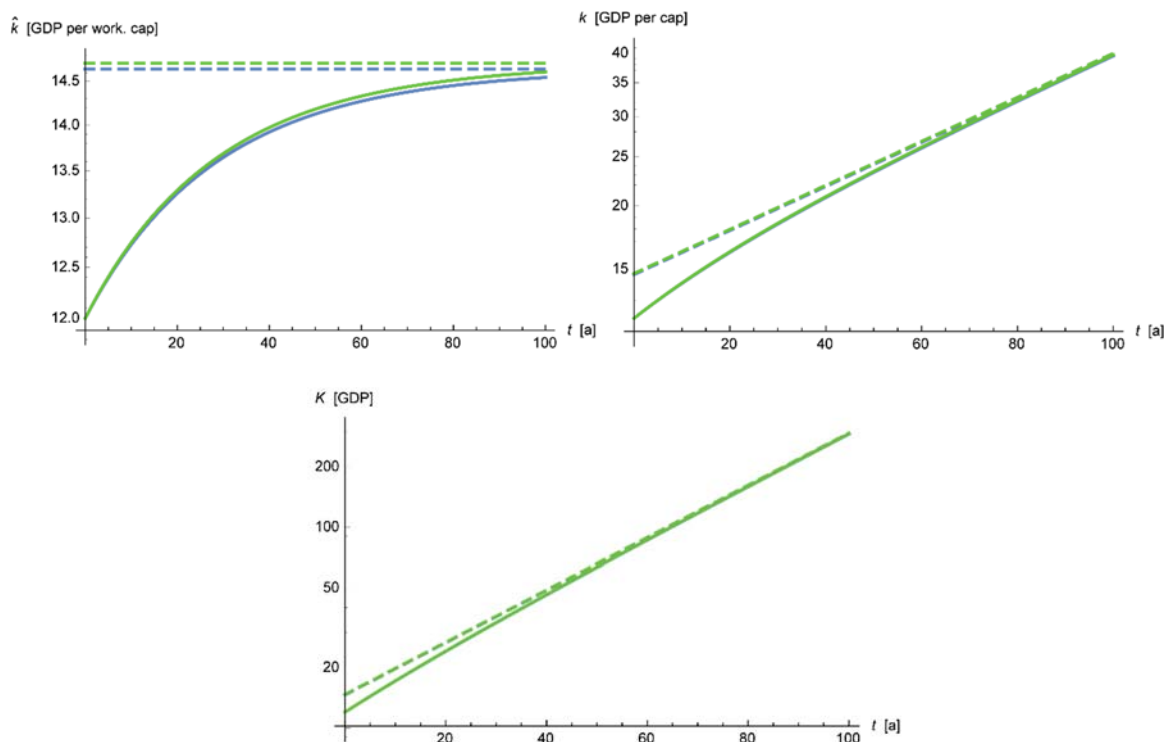
8. MELLÉKLET

8.1. Numerikus szimulációk tőkefelhalmozás modelljéhez



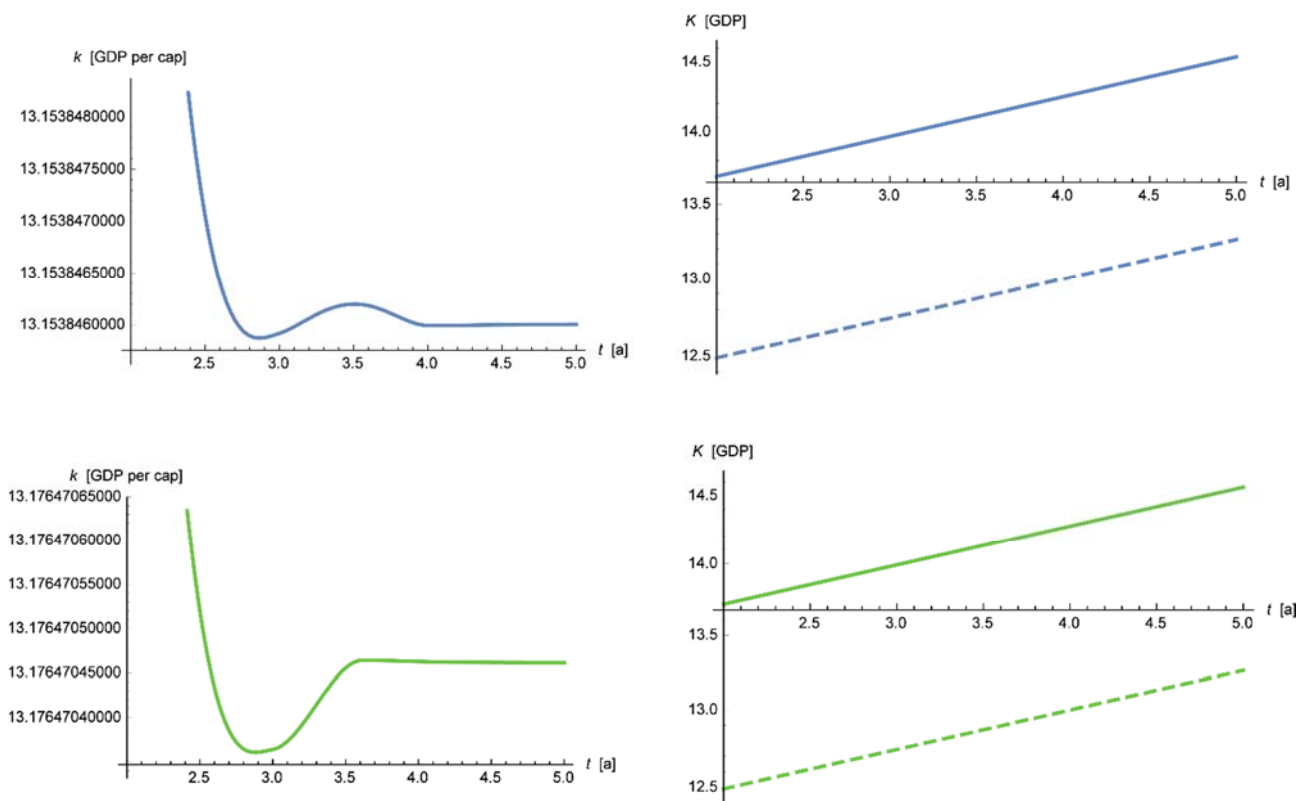
10. ábra: Időbeli numerikus szimulációs eredmények a késletetett Solow – Swan modellhez, ahol a kék görbék az azonnali amortizációs esetre, a zöld görbék a késletetett amortizációs esetre vonatkoznak, míg a piros görbék egy dinamikus instabil esetet szemléltetnek

8.2. Numerikus szimulációk A technológiai haladás modelljéhez

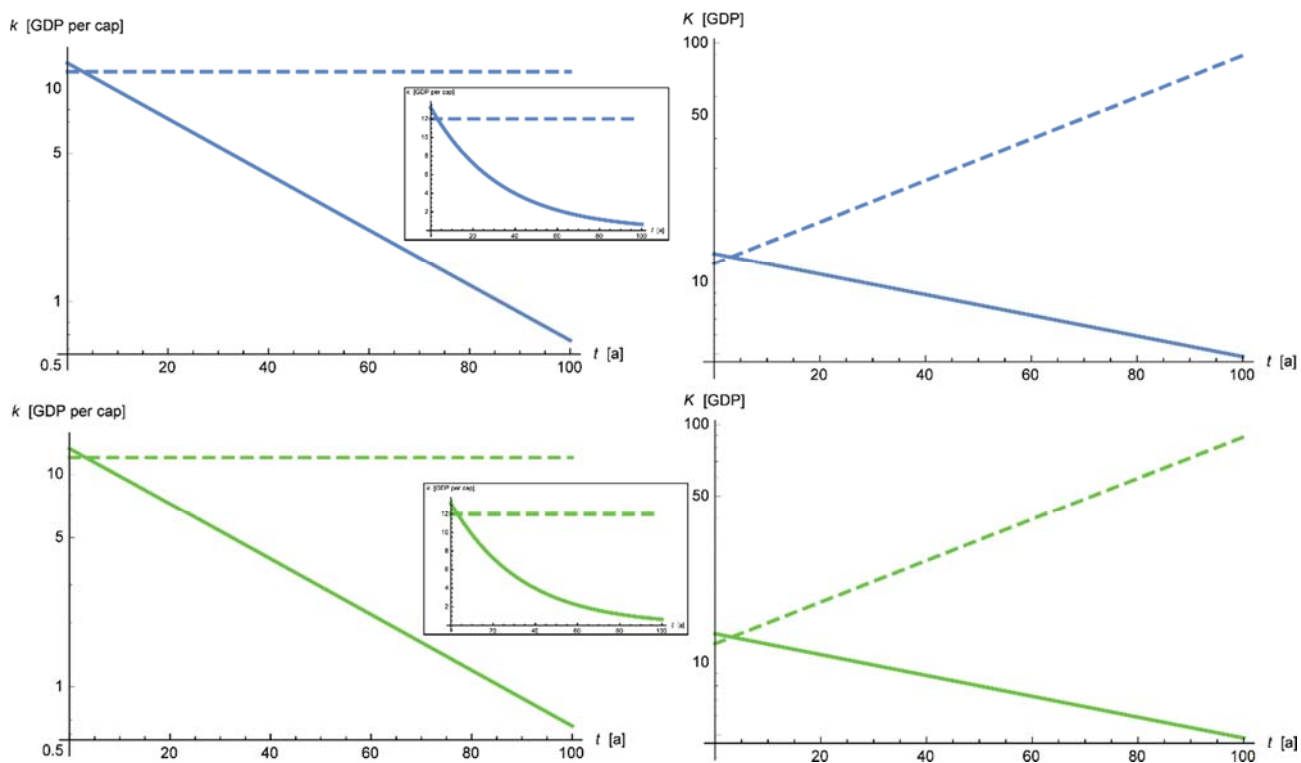


11. ábra: Időbeli numerikus szimulációs eredmények a késletetett exogén technológiai haladás modelljéhez, ahol a kék görbék az azonnali amortizációs esetre, a zöld görbék a késletetett amortizációs esetre vonatkoznak

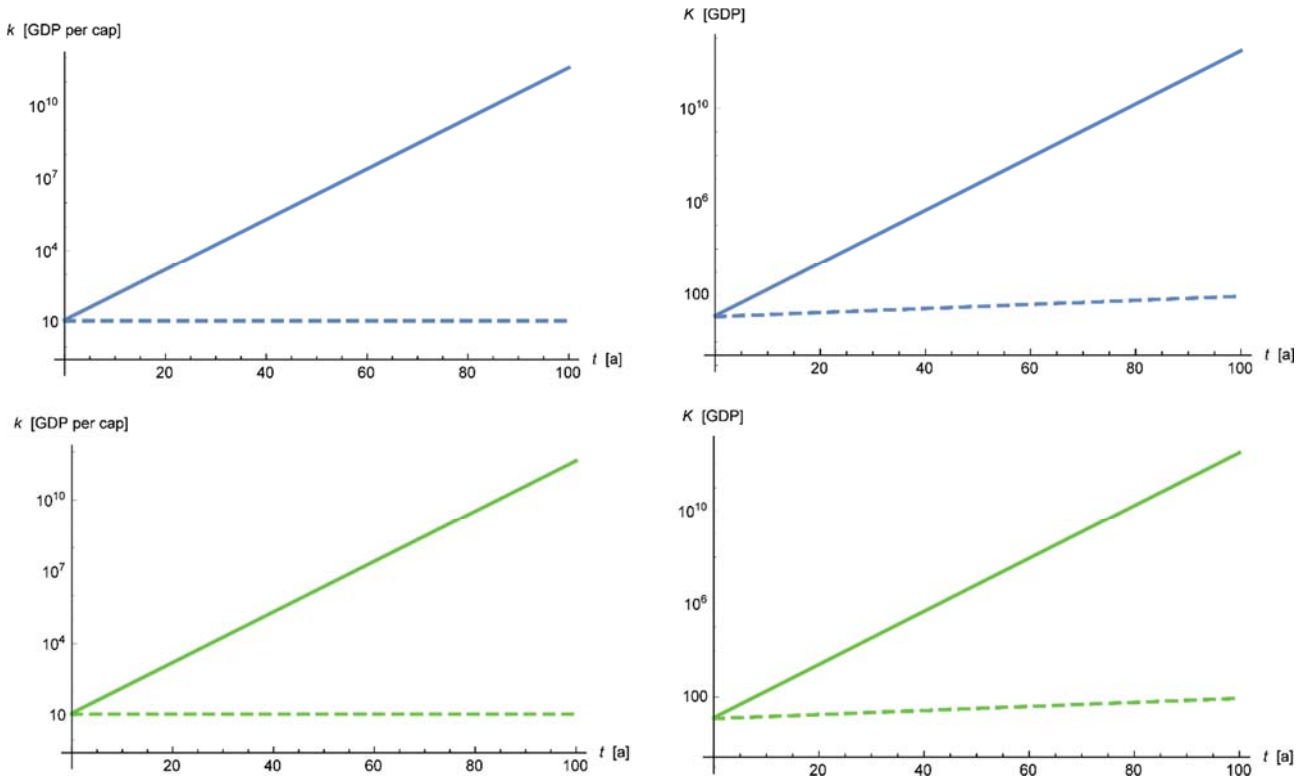
8.3. Numerikus szimulációk AK modellhez



12. ábra: Időbeli numerikus szimulációs eredmények a késleltetett AK modellhez Lyapunov stabil esetre, ahol a kék görbék az azonnali amortizációs esetre, a zöld görbék a késleltetett amortizációs esetre vonatkoznak

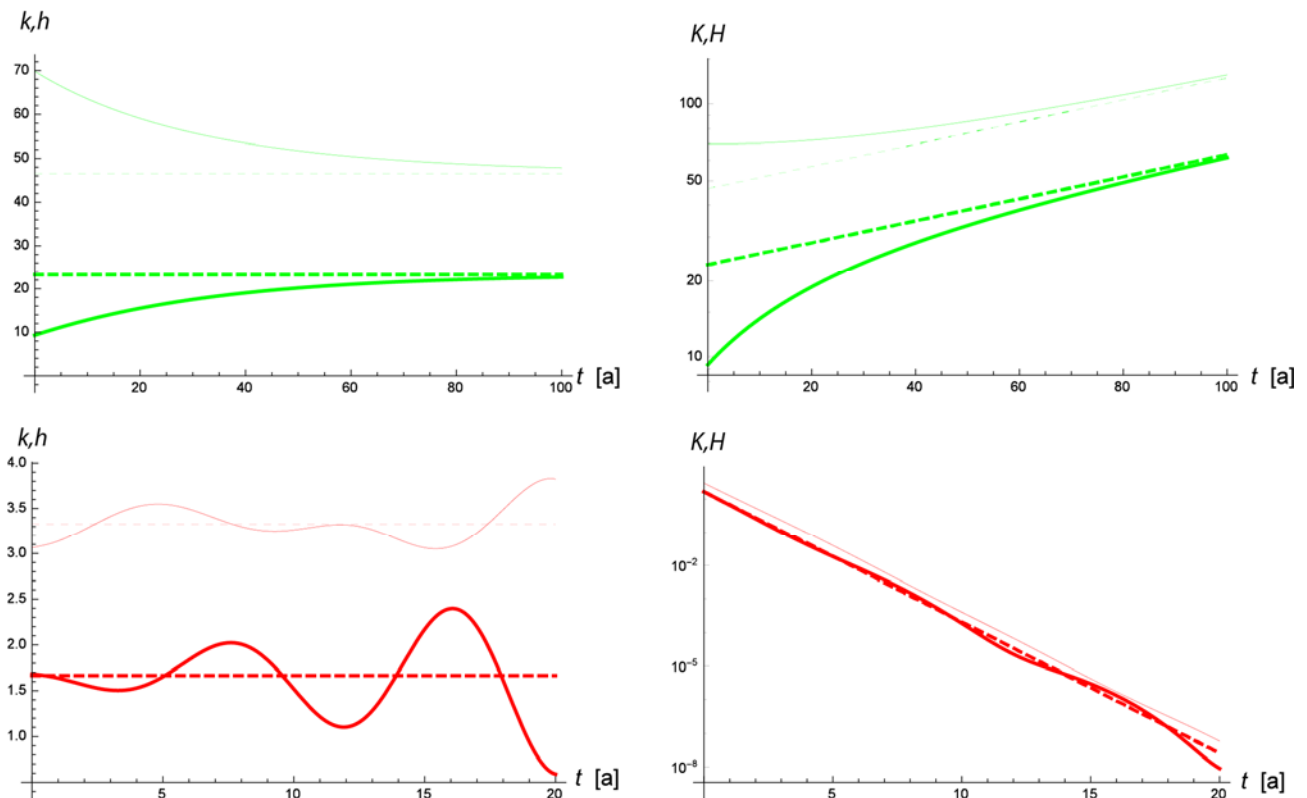


13. ábra: Időbeli numerikus szimulációs eredmények a késleltetett AK modellhez aszimptotikusan stabil esetre, ahol a kék görbék az azonnali amortizációs esetre, a zöld görbék a késleltetett amortizációs esetre vonatkoznak



14. ábra: Időbeli numerikus szimulációs eredmények a késleltetett AK modellhez instabil esetre, ahol a kék görbék az azonnali amortizációs esetre, a zöld görbék a késleltetett amortizációs esetre vonatkoznak

8.4. Numerikus szimulációk a humántőke hatására



15. ábra: Időbeli numerikus szimulációs eredmények a késleltetett MRW modellhez, ahol a zöld görbék egy stabil, míg a piros görbék egy dinamikus instabil egyensúlyi helyzet körüli dinamikát mutatnak; illetve a vastag vonalak tartoznak a fizikai tőkéhez, míg a vékonyak a humántőkéhez; valamint a folytonos vonalak jelölik a rendszer adott kezdeti feltételéből indított viselkedés a szaggatottak pedig az egyensúlyi helyzetet

8.5. Karakterisztikus egyenlet valós és képzetes része (MRW)

Az időkésést is tartalmazó MRW modell azonnali tőkeamortizációt feltételező variánsánál a karakterisztikus egyenlet valós, illetve képzetes része a következőképpen alakul:

$$R(\omega) = \tau(\delta + n)((2 - \alpha - \beta)\omega \sin \omega + \tau(2 - \alpha - \beta)(\delta + n) \cos \omega - \tau(\alpha + \beta - 1)(\delta + n) \cos(2\omega)) + \tau^2(\delta + n)^2 - \omega^2, \quad (8.1)$$

$$S(\omega) = \tau(\delta + n)((2 - \alpha - \beta)\omega \cos \omega + \tau(\delta + n)((\alpha + \beta - 2) \sin \omega + (\alpha + \beta - 1) \sin(2\omega)) + 2\omega).$$

Míg ugyanezeket a mennyiségeket a késleltetett tőkeamortizáció esetében a következő formában írhatjuk:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \tau^2 \cos(2\omega) (\delta^2(\alpha + \beta - 2) - n^2(\alpha + \beta - 1)) - n^2 \tau^2 (\alpha + \beta - 2) \cos(\omega) + n^2 \tau^2 + \\ &+ \omega \sin(\omega) \tau (-\delta(\alpha + \beta - 4)e^{-n\tau} - n(\alpha + \beta - 2)) + \delta n \tau^2 (\alpha + \beta - 4) (-e^{-n\tau}) \cos(\omega) + \\ &+ \delta \tau^2 e^{-n\tau} \cos(2\omega) (\delta(\alpha + \beta - 2)(\sinh(n\tau) - 3 \cosh(n\tau)) + n\tau(-3\alpha - 3\beta + 4)) - \omega^2, \\ S(\omega) &= 2\delta^2 \tau^2 (\alpha + \beta - 2) \sin(2\omega) \cosh^2(n\tau) + 2n\tau\omega + (\delta \sinh(n\tau) - 1)(\alpha + \beta - 4)\omega \tau \cos \omega + \\ &+ n\tau^2 \sin \omega (n(\alpha + \beta - 2) - \delta\tau(\alpha + \beta - 4) \sinh(n\tau)) - 4\delta\tau^2 (\alpha + \beta - 2) \sin(2\omega) \sinh(n\tau) + \\ &+ \tau^2 \sin(2\omega) (n - 2\delta \sinh(n\tau))(n(\alpha + \beta - 1) - \delta\tau(\alpha + \beta - 2) \sinh(n\tau)) + \delta\tau \cosh(n\tau) + \\ &+ n\tau^2 \sin \omega ((6\alpha + 6\beta - 8) \cos \omega + \alpha + \beta - 4) + \omega n \tau^2 \cos \omega (2 - \alpha - \beta). \end{aligned} \quad (8.2)$$