

# AZ MMB TÖRÉSI TESZT ALKALMAZÁSA HOSSZÚ REPEDÉSEK ESETÉN

## APPLICATION OF THE MMB FRACTURE TEST WITH LONG CRACK LENGTHS

Székrenyes András\*

### ABSZTRAKT

Az ún. mixed-mode bending, azaz vegyes módusú hajlító tesztet 1988-ban fejlesztették ki kompozit anyagok rétegek közötti szilárdságának vizsgálatára. Azóta számos tudományos közlemény jelent meg a tesztéről. Mindössze néhány éve jöttek rá, hogy a berendezést egy kisebb módosítással az eredetihez képest jóval nagyobb repedési hossz esetén is alkalmazhatjuk. Ebben a közleményben ennek részleteit mutatjuk be.

### ABSTRACT

The mixed-mode bending system was developed in 1988 to measure the interlaminar fracture toughness of composite materials. Since then large number of scientific paper was published on that test. It was discovered only few years ago, that with a small modification of the system it is possible to apply much larger crack lengths compared to the original apparatus. This work presents the details of the new setup.

**Kulcsszavak:** rétegek közötti törés, kompozit anyag, kísérlet, rúdelmélet

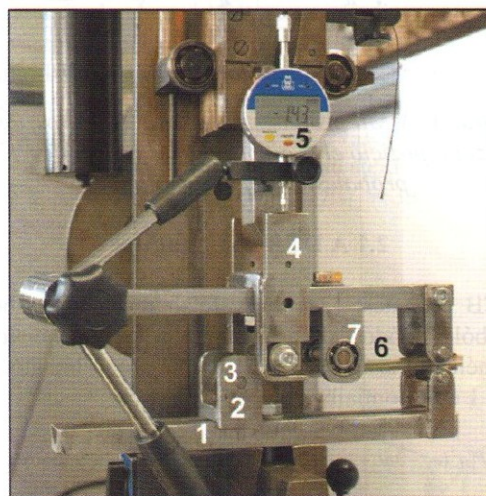
### 1. BEVEZETÉS

A kompozit anyagok rétegek közötti szilárdságának mérésére számos eszközt fejlesztettek ki az elmúlt évtizedekben. A rétegek közötti törés három alapvető módja: I-es vagy más néven nyitó módus, II-es vagy más néven párhuzamos elcsúszási módus és végül a III-as, vagy más néven keresztirányú elcsúszási módus [1]. Az alapvető módusok kombinációja is igen gyakori a műszaki életben. Az ASME szabvány [2] az ún. mixed-mode bending (MMB) típusú rendszert javasolja a vegyes I/II-es rétegek közötti szilárdság méréséhez. A módszert 1988-ban fejlesztette ki Reeder és Crews [3]. Az MMB tesztel kapcsolatban rengeteg tudományos közlemény fellelhető és számos módosított változata létezik. Tenchev és Falzon 2006-ban publikált művében [4] bemutatták, hogyan lehet alkalmazni az MMB tesztet olyan próbatestekre, amelyekben a repedési hossz jóval nagyobb az eredeti rendszerben megszokottnál képest. Munkájukban azonban számos hibát vettek, valamint nem mutatták be, hogyan lehet pontosítani a kísérleti

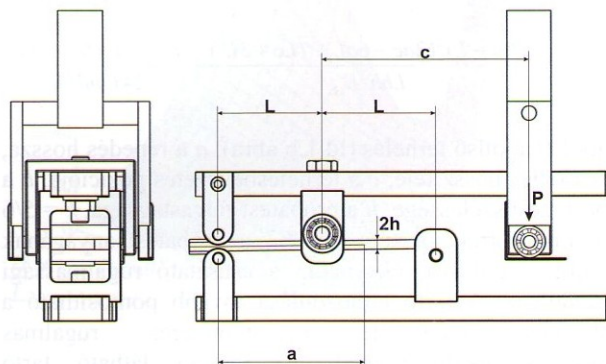
adatok feldolgozásához szükséges képleteket, illetve, hogyan lehet a teszt geometriai paramétereit megfelelően beállítani.

A jelenlegi cikk célja bemutatni a pontosított számításokat, valamint azt, hogy hogyan célszerű a módosított berendezést gyakorlatban is alkalmazni. Az MMB teszt a BME Gépészmérnöki Kar Műszaki Mechanikai Tanszékén is elérhető, a laboratóriumban készült berendezést mutatja az 1.a ábra, illetve legfontosabb részleteit az 1.b ábra.

a.



b.



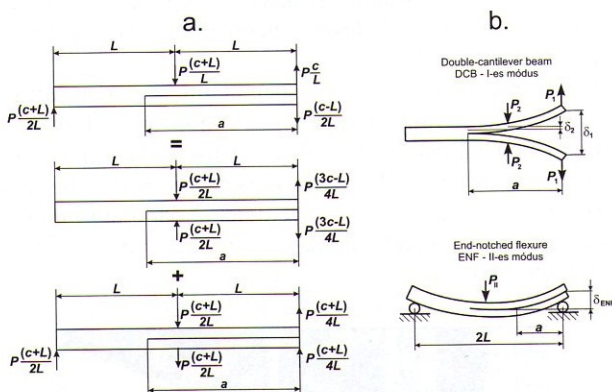
1. ábra. Az MMB teszt részletei (a: 1 – alap, 2 – támaszték, 3 – acélgörgő, 4 – erőbevezetés, 5 – digitális mérőóra, 6 – próbatest, 7 – golyóscsapágy) és geometriai paramétereit (b).

\* egyetemi adjunktus, BME Műszaki Mechanikai Tanszék

## 2. AZ ANALITIKUS MEGOLDÁS ÁTTEKINTÉSE

Az MMB teszt a jól ismert double-cantilever beam (DCB) és az end-notched flexure (ENF) típusú próbatetek kombinációja [2]. A 2.a és b ábrán látható superpozíciós séma alapján a terhelések:

$$\begin{aligned} P_I &= P \frac{3c-L}{4L}, & P_2 &= P \frac{c+L}{2L}, \\ P_{II} &= P \frac{c+L}{L} \end{aligned} \quad (1)$$



2. ábra. Az MMB próbatest terhelésének szétosztása a superpozíció elve alapján (a), a DCB és ENF próbatetek deformációja (b).

### 2.1 A DCB rész analízise

A DCB próbatest (2.b ábra, felső rajz) hajlításból és nyírásból adódó deformációja a Timoshenko-féle rüdelmélethez számolható [5]. A 2.a ábrán látható DCB model 1 és 2 pontjaiban az elmozdulások:

$$\delta_{TIM1} = \frac{P[a^2(ac-3aL+3Lc+3L^2)-L^2(c+L)]}{Lbh^3E_{11}} + \frac{P(3ac-9aL+6Lc+6L^2)}{12LbhG_{12}} \quad (2)$$

$$\delta_{TIM2} = \frac{P(a-L)^2(2ac-6aL+7Lc+3L^2)}{Lbh^3E_{11}} + \frac{P(a-L)(6c-18L)}{24LbhG_{12}}$$

ahol  $P$  a külső terhelés (ld 1.b ábra),  $a$  a repedés hossza,  $L$  a teljes hossz fele,  $c$  a terhelésbevezetés pozíciója,  $b$  a próbatest szélessége,  $h$  a próbatest félvastagsága,  $k = 5/6$  nyírási korrekciós tényező,  $E_{11}$  a próbatest anyagának hajlítómódulusa,  $G_{12}$  pedig a csúsztató rugalmassági modulusz. A tartó elmozdulása tovább pontosítható a Winkler-Pasternak-féle kétparaméteres rugalmas ágyazás alkalmazásával. A 3.ábrán látható tartó elmozdulásfüggvényére a következő differenciálegyenlet írható fel [6]:

$$w^{IV} - 2\eta^2 w'' + 4\beta^4 w = 0, \quad (3)$$

ahol:

$$2\eta^2 = \frac{k_G}{I_z E_{11}}, \quad 4\beta^4 = \frac{k_e}{I_z E_{11}}, \quad (4)$$

$$I_z = \frac{bh^3}{3}, \quad k_e = 2\frac{b}{h} E_{33}, \quad k_G = 4.08bh\sqrt{E_{11}E_{33}}.$$

Az 1 és 2 terhelési pontokban a kétparaméteres ágyazásból adódó elmozdulásnövekmények a  $v_0$  és  $\theta_0$  repedéscsúcban számolt elmozdulás, illetve szögelfordulás segítségével fejezhetők ki:

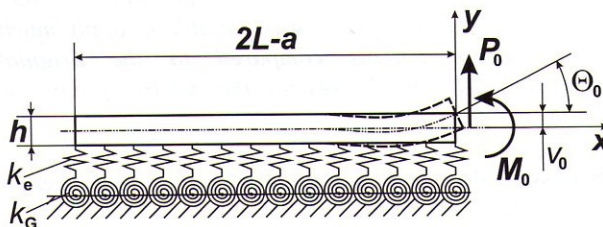
$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{M_0(3m_{32}^2 - m_{31}^2) + 2P_0m_{32}}{(m_{32}^2 + m_{31}^2)^2 I_z E_{11}}, \\ \theta_0 &= \frac{2M_0m_{32} + P_0}{(m_{32}^2 + m_{31}^2) I_z E_{11}}. \end{aligned} \quad (5)$$

ahol  $m_{31}$  és  $m_{32}$  a differenciálegyenlet karakterisztikus gyökei:

$$m_{31} = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta^2 - 2\eta^4}, \quad m_{32} = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta^2 + 2\eta^4}. \quad (6)$$

Az elmozdulások a terhelési pontokban így:

$$\delta_{WP1} = v_0 + \theta_0 a, \quad \delta_{WP2} = v_0 + \theta_0(a-L). \quad (7)$$



3. ábra. Kétparaméteres, rugalmas ágyazású tartó az MMB próbatest modellezéséhez.

Az ún. Saint-Venant-féle deformációt több cikkben is bemutatották [7]. Ehhez szükség van a repedéscsúcban ébredő hajlítónyomaték számítására:

$$M = P_1 a - P_2(a-L) = P \frac{a(c-3L) + 2L(c+L)}{4L}. \quad (8)$$

Ennek segítségével számolható ki a keresztmetszet szögelfordulása [7]:

$$\vartheta = \frac{6M}{bh^2 E_{11} \pi} \left( \frac{E_{11}}{G_{12}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6P[a(c-3L) + 2L(c+L)]}{4Lbh^2 E_{11} \pi} \left( \frac{E_{11}}{G_{12}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Az ebből származó elmozdulásnövekmények a  $P_1$  és  $P_2$  erők támadáspontjában:

$$\delta_{SV1} = \vartheta a, \quad \delta_{SV2} = \vartheta(a-L). \quad (10)$$

Végül, mindkét pontban összegezve az elmozdulásokat kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{TIM1} + \delta_{WP1} + \delta_{SV1}, \\ \delta_2 &= \delta_{TIM2} + \delta_{WP2} + \delta_{SV2}.\end{aligned}\quad (11)$$

## 2.2 Az ENF rész analízise

Az ENF típusú próbatest rugóállandója a hajlítási deformáció alapján [4]:

$$C_{ENF1} = \frac{(3a^2 - 18a^2L + 36aL^2 - 16L^3)}{8bh^3E_{11}}. \quad (12)$$

Ebben a próbatestben a repedéscsúcs nyírási deformációját is figyelembe lehet venni [8]. A nyírási deformációt a következő differenciálegyenlet írja le:

$$\frac{d^2\tau}{dx^2} - \rho^2\tau = 0, \quad \rho = \left(\frac{21G_{12}}{4E_{11}h^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Az egyenlet egyszerűen megoldható, majd abból a rugóállandót növelő tag is kifejezhető:

$$C_{ENF2} = \frac{a^3}{8bh^3E_{11}} f_{SH}, \quad (14)$$

ahol:

$$f_{SH} = 0.98 \left(\frac{c}{a}\right) \left(\frac{h}{a}\right) \left(\frac{E_{11}}{G_{12}}\right)^{\frac{1}{2}} - 0.43 \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left(\frac{E_{11}}{G_{12}}\right). \quad (15)$$

A teljes rugóállandó pedig:

$$C = C_{ENF1} + C_{ENF2}. \quad (16)$$

## 2.3 MMB teszt – szuperpozíció elve

Az MMB teszt teljes rugóállandója az eredmények szuperpozíciója alapján számolható ki. Az erők által végzett munka egyenlőségéből kapjuk, hogy:

$$P\delta = P_1 2\delta_1 - P_2 2\delta_2 + P_{II} \delta_{ENF}, \quad (17)$$

ahol  $\delta$  az 1.b ábrán látható  $P$  erő támadáspontjában számolt elmozdulás. Mivel  $2\delta_1 = C_1 P_1$ ,  $2\delta_2 = C_2 P_2$  és  $\delta_{ENF} = C_{ENF} P_{II}$ , így azt kapjuk, hogy:

$$C = \left(\frac{3c-L}{4L}\right)^2 C_1 - \left(\frac{c+L}{2L}\right)^2 C_2 + \left(\frac{c+L}{L}\right)^2 C_{ENF}. \quad (18)$$

A repedésfeszítő erőt célszerű külön az I-es és II-es módusra is kiszámítani [2] alapján:

$$\begin{aligned}G_I &= \frac{12P^2}{b^2h^3E_{11}} \left(\frac{ac-3aL+2Lc+2L^2}{4L}\right)^2 + \frac{P^2}{b^2hkG_{12}} \left(\frac{c-3L}{4L}\right)^2 + \\ &+ \frac{12P^2}{b^2h^2E_{11}} \frac{(ac-3aL+2Lc+2L^2)(c-3L)}{16L^2\pi} \left(\frac{E_{11}}{G_{12}}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{12P^2a^2}{b^2h^2E_{11}} \left(\frac{c-3L}{4L}\right)^2 f_{WP},\end{aligned}\quad (19)$$

ahol:

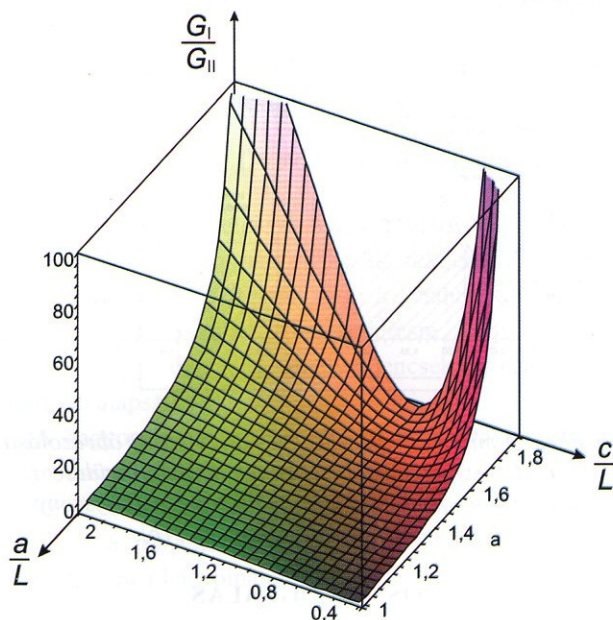
$$f_{WP} = 0.85 \left(\frac{h}{a}\right) \left(\frac{E_{11}}{E_{22}}\right)^{\frac{1}{4}} + 0.71 \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left(\frac{E_{11}}{E_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} - 1.69 \left(\frac{h}{a}\right) \left(\frac{L}{a}\right) \left(\frac{c+L}{3L-c}\right) \left(\frac{E_{11}}{E_{22}}\right)^{\frac{1}{4}}. \quad (20)$$

A II-es módusú repedésfeszítő erő [8] alapján:

$$G_{II} = \frac{9P^2(2L-a)^2}{16b^2h^3E_{11}} + \frac{P^2a^2}{16b^2h^2E_{11}} f_{SH}. \quad (21)$$

## 3. A GEOMETRIAI PARAMÉTEREK BEÁLLÍTÁSA

Az eredeti MMB próbatest egyik fontos tulajdonsága, hogy a  $G_I/G_{II}$  módarány változtatható a  $c$  távolság változtatásával. A módosított változatban ez szintén igaz, viszont a módarány a repedési hosszól is függ. A 4. ábrán láthatjuk, hogy hogyan változik a módarány az  $a/L$  és  $c/L$  arányokkal. A számításokat egy a BME Műszaki Mechanikai Tanszékén is többször vizsgált üvegszál erősítésű poliészter próbatestekre végeztük el, melynek rugalmas tulajdonságai:  $E_{11} = 33$  GPa,  $E_{22} = 7.2$  GPa,  $G_{12} = 3$  GPa.

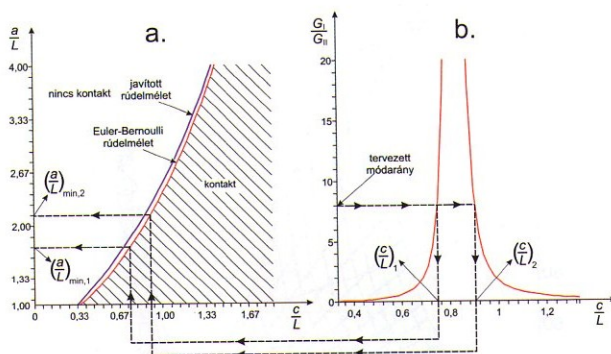


4. ábra. A módusok arányának változása az MMB próbatestnél az  $a/L$  és  $c/L$  viszonyok függvényében.

Az MMB teszt geometria paramétereit nem tetszőlegesen. A próbatesten csak akkor tudunk létrehozni repedéskinyílást, ha a DCB rész felső és alsó próbatestkarjai a középső erőbevezetéstől balra haladva nem érintkeznek (ld. 1.b ábra). A mechanikai modell alapján a feltétel:  $\delta_2 \geq 0$ . A (2) képlet második tagja alapján, a következőt kapjuk az  $a/L$  viszonyra:

$$\frac{a}{L} \geq -\frac{7c/L+3}{2(c/L-3)} \quad (22)$$

Megjegyezzük, hogy a (22) képletben csak az Euler-Bernoulli rúdelmélet eredményét vettük figyelembe, ami a (2) képletekben az első tagok. Az 5.a ábrán látható, hogy a pontosított megoldás ettől nem sokban tér el. A (22) képletet visszatéve a módarány képletébe (a (19) és (21) képletekből számolható) kapjuk az 5.b ábrán látható függvényt. Az 5.b ábra alapján a kísérlet megtervezésekor a kívánt módarány értékéből indulunk ki. Ez után ki kell számítani, hogy ehhez a módarányhoz milyen  $c/L$  viszony szükséges. Az 5.b ábra alapján látható, hogy minden módarány esetén két megoldásunk van. A megoldások és az 5.a ábra alapján visszszámolhatók a minimálisan szükséges repedési hosszak a kontakt elkerülése érdekében. Ebből az is következik, hogy a módarány változtatásához nem elég a  $c/L$  viszony (azaz tulajdonképpen a  $c$  paraméter) változtatása, hanem a repedési hosszt is változtatni kell. Mivel a pontosított megoldás egy kicsit nagyobb repedési hosszt írna elő a kontakt elkerüléséhez (ld. 5.a ábra), ezért a kísérlet tervezésekor célszerű a számított minimálisan szükséges repedési hosszt 5 %-al megnövelni.



5. ábra. A minimálisan szükséges  $a/L$  viszony ábrázolása a  $c/L$  viszony függvényében a kontakt elkerülése érdekében (a). A módarány változása a  $c/L$  viszony függvényében kontakt nélkül (b).

### ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a cikkben az MMB próbatest módosított változatát elemeztük és megmutattuk, hogy a rendszer geometriai paramétereit hogyan kell beállítani ahhoz, hogy a tervezett módarányt meg tudjuk valósítani. Az eredmények alapján a kívánt módarány eléréséhez a  $c/L$  viszony mellett a kontakt elkerüléséhez szükséges  $a/L$

viszonyt is meg kell állapítani. E két paraméter megfelelő beállításával az MMB teszt sikeresen alkalmazható hosszú repedések esetén is.

### SUMMARY

In this paper the modified version of the MMB test was analysed and it was shown how to set the geometrical parameters of the system in order to realize the designated mode ratio. To reach the desired mode ratio, it is necessary - apart from setting the  $c/L$  ratio - to set the proper  $a/L$  ratio eliminating contact between the specimen arms. By the proper adjustment of these two parameters it is possible to successfully apply the MMB test even for long cracks.

### KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A munka szakmai tartalma kapcsolódik a "Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műgyetemen" c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az ÚMFT TAMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 programja, valamint az OTKA T34040 pályázat és a Bolyai János Kutatási ösztöndíj támogatja.

### IRODALOMJEGYZÉK

- [1] H. BLUMENAUER, G. PUSCH. Műszaki törésmechanika. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [2] J.H. CREWS JR, J.R. REEDER. A mixed-mode bending apparatus for delamination testing. NASA Technical Memorandum 100662, August. 1988; 1-37.
- [3] ASTM D6671 - 01. (2001). Standard test method for mixed mode I-mode II interlaminar fracture toughness of unidirectional fibre reinforced polymer matrix composites, *Annual Book of ASTM Standards*, 100 Barr Harbor Drive, West Conshohocken, PA 19428, USA, Vol. 15.03.
- [4] R.T. TENICHEV, B.G. FALZON. A correction to the analytical solution of the mixed-mode bending (MMB) problem. *Composites Science and Technology* 2007;67:662-668
- [5] F. OZDIL, L.A. CARLSSON. Beam analysis of angle-ply laminate DCB specimens. *Composites Science and Technology* 1999;59:305-315
- [6] ROSA, DE M.A. Free vibrations of Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation. *Computers & Structures* 1995;57: 151-156.
- [7] R. OLSSON. A simplified improved beam analysis of the DCB specimen. *Composites Science and Technology* 1992;43: 329-338.
- [8] WANG J, QIAO P. NOVEL beam analysis of the end notched flexure specimen for mode-II fracture. *Engineering Fracture Mechanics* 2004;71: 219-231.