Technische Mechanik II
Festigkeitslehre

Prof. Dr.-Ing. Peter Heinze
Hochschule Wismar
FB MVU
Satz in LaTeX: Marcus Biank

2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **4**
1.1 Spannungsbegriff, ebener Spannungszustand 6
1.2 Der räumliche Spannungszustand 10
1.2.1 Vorzeichen der Spannungen 11
1.2.2 Gleichheit einander zugeordneter Schubspannungen in orthogonalen Schnitten 12

2 Materialgesetz, Hook'sches Gesetz **14**
2.1 Der Zugversuch 15
2.2 Elastisches und Plastisches Werkstoffverhalten 18
2.3 Querkontraktion 20
2.4 Stoffgesetz für Gleitung 21
2.5 Verallgemeinertes Hook'sches Gesetz 22
2.5.1 Hooke'sches Gesetz für den ebenen Spannungszustand. . . 22
2.5.2 Hook'sches Gesetz für den räumlichen Spannungszustand 23
2.5.3 Berücksichtigung des Temperatureinflusses 23

3 Transformation der Spannungsmatrix **25**
3.1 Transformation des ebenen Spannungszustandes 25
3.1.1 Spannungen an Schnitten 25
3.1.2 Hauptspannungen 28
3.1.3 Mohr'scher Spannungskreis 30
3.2 Transformation des räumlichen Spannungszustandes 32

4 Zug, Druck und Scherung **35**
4.1 Zug 35
4.1.1 Beispiel Flaschenzug 36
4.1.2 Beispiel: Zugstab mit geschraubtem Anschluss 37
4.2 Druckbeanspruchung 37
4.2.1 Druckbeansprungen bei stabförmigen Körpern 37
4.2.2 Pressungen 38

5 Spannungshypothesen **41**
5.1 Hypothese von der Gestaltsänderungsenergie 42
5.1.1 Gestaltsänderung: 42
5.2 Die Schubspannungshypothese 43
5.3 Hauptspannungshypothese 43

5.4 Experimentell entwickelter Vergleichswert für Schweißnähte nach DIN 18800 (11.90) . . . 43

6 Spannungen aus Biegung und Normalkraft 45
6.1 Beanspruchung allein durch N . . . 46
6.2 Beanspruchung allein durch M_y . . . 46
6.3 Beanspruchung allein durch M_z . . . 49
6.4 Beanspruchung durch N, M_y und M_z . . . 50
6.4.1 Die Große Biegeformel . . . 51
6.4.2 Biegung stark gekrümmter Stäbe . . . 54
6.5 Normalspannungen σ_x von Verbundquerschnitten mit verschiedenen E-Moduln . . . 59
6.5.1 Der gewichtete Schwerpunkt . . . 59
6.5.2 Spannungen aus Normalkraft . . . 60
6.5.3 Spannungen aus dem Biegemoment . . . 60

7 Flächenmomente 62
7.1 Flächenmomente 1. Ordnung, statische Momente . . . 62
7.2 Flächenmomente 2. Ordnung . . . 64
7.2.1 Flächenmomente für ein rechtwinkliges Dreieck . . . 64
7.3 Transformation des Koordinatensystems . . . 67
7.3.1 Translation des Koordinatensystems . . . 67
7.3.2 Rotation des Koordinatensystems . . . 70
7.4 Tabellarische Ermittlung der Flächenmomente zusammengesetzter Querschnitte . . . 72

8 Differentialgleichung der Biegelinie 74
8.1 Allgemeine Differentialgleichung . . . 74
8.2 Berechnung der Biegelinie mit der Mohrschen Analogie . . . 76

9 Schubspannungen aus Querkraft 79
9.1 Allgemeine Betrachtungen . . . 79
9.2 Schubspannungen infolge von Querkraft am Rechteckquerschnitt 83
9.3 Schubspannungen infolge von Querkraft bei dünnwandigen Querschnitten . . . 87
9.4 Der Schubmittelpunkt . . . 88

10 Torsion 91
10.1 Wölbkrafttorsion . . . 93
10.2 St. Venant Torsion . . . 94
10.2.1 Kreis und Kreisquerschnitte . . . 95
10.2.2 Schubspannungen bei Torsion nicht kreisförmiger Vollquerschnitte . . . 99
10.2.3 Torsion dünnwandiger einfach geschlossener Querschnitte 100
10.2.4 Torsion dünnwandiger offener Profile . . . 106

11 Arbeitssatz 109
11.1 Eigenarbeit . . . 110
11.2 Verschiebungsarbeit . . . 111
11.3 Gilt das Superpositionsprinzip auch für Arbeiten? . . . 112
11.4 Bettischer Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungsarbeit . 113

11.5 Maxwellscher Satz 115
11.6 Aufgabenbeispiele 119

12 Kraftgrößenverfahren **123**
12.1 Beispiel für das Kraftgrößenverfahren 126
12.1.1 Statisch bestimmtes Hauptsystem 126
12.1.2 Superposition 128

13 Stabilitätsprobleme **130**
13.1 Die wichtigsten Stabilitätsfälle 131
13.2 Die Stabknickung 132
13.2.1 Der Eulersche Knickstab 132
13.2.2 Die Form der Knickbiegelinie 135
13.2.3 Eulerfälle 135
13.2.4 Ideale Knickspannung und Eulerhyperbel 136
13.2.5 Tetmajer Gerade 137
13.2.6 Stabilitätsnachweis 137

14 Literatur **139**

Kapitel 1

Einführung

In der Starrkörperstatik wurden ebene und räumliche statisch bestimmte Tragwerke behandelt. Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen werden die Auflagerreaktionen bestimmt und bei stabartigen Tragwerken können Schnittgrößen berechnet werden. Die Starrkörperstatik ist jedoch immer auf statisch bestimmte Systeme beschränkt.

In der *Elastostatik* wird durch die Einführung eines Materialgesetzes die Bestimmung des Kräftespiels im Inneren des Körpers und der Verformung möglich. Damit können auch statisch unbestimmte Tragwerke analysiert werden. Die *Festigkeitslehre* beschäftigt sich mit der Analyse der Beanspruchung der Tragstrukturen, sie hat letztlich die Frage zu beantworten, wie weit die tatsächliche Beanspruchung einer Konstruktion von der Beanspruchung entfernt ist, die zu ihrem Versagen führt.

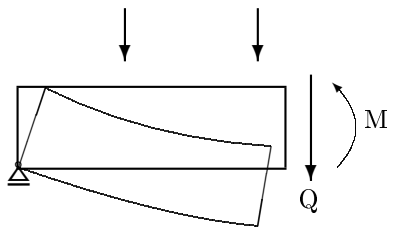
Ein Maß für die Beanspruchung eines Materialpartikels ist die mechanische Spannung. Diese Spannung, auf die in dem folgenden Kapitel näher eingegangen wird, ist im Allgemeinen durch Betrachtung der Gleichgewichtsbedingungen am verformten System zu bestimmen.

Glücklicherweise sind die Verformungen bei den meisten Tragwerken sehr klein, so dass es genügt, das Gleichgewicht am unverformten System anzuschreiben.

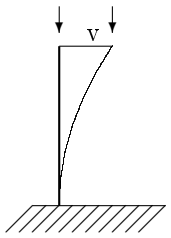
Man spricht hier von **linearer Theorie** oder **Theorie 1. Ordnung**.

Für einige Problemstellungen ist es jedoch erforderlich, das Gleichgewicht am verformten System zu betrachten und zu untersuchen, ob sich nach einer Störung des Gleichgewichtszustands wieder das ursprüngliche Gleichgewichtszustand einstellt. Zu diesen Problemen gehören die Stabilitätsprobleme, die mit der Theorie II. Ordnung behandelt werden.

Für folgenden Fall ist die lineare Theorie ausreichend:



Im Gegensatz dazu ist für Stabilitätsfälle die Theorie 2. Ordnung erforderlich, da das Einspannungsmoment infolge der Verschiebung v wächst, was wiederum eine Vergrößerung der Verschiebung zur Folge hat.



In den folgenden Kapiteln wird es dementsprechend um die Fragen gehen, was sind Spannungen?, welche Eigenschaften haben sie?, wie hängen sie mit den Verformungen zusammen?.

Die letzte Fragestellung führt uns zu Materialgesetzen, von denen das Hooke'sche Gesetz eine besondere Bedeutung hat.

Als weitere Fragen werden behandelt:

- Wie werden Spannungen bei Stabtragwerken bestimmt, wie Verschiebungen?
- Wie werden Spannungen aus Normalkraft, Biegemomenten und Querkräften zu Vergleichsspannungen zusammengefasst, um sie mit den Ergebnissen am einachsigen Zugversuch zu vergleichen?

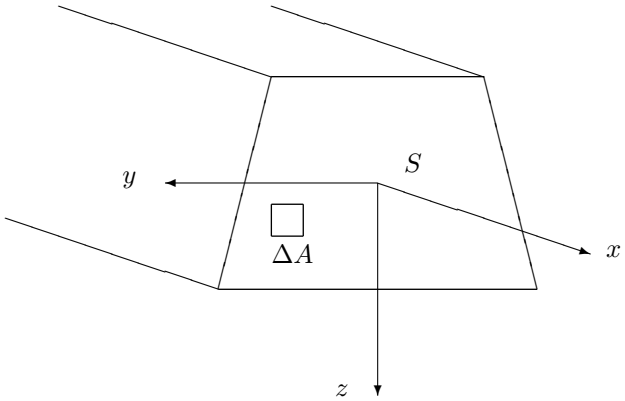
In den weiteren Kapiteln werden Methoden gezeigt, wie die Schnittgrößen bei statisch unbestimmten Systemen zu bestimmten sind.

Schließlich wird der Knickstab als einfaches Stabilitätsproblem behandelt.

1.1 Spannungsbegriff, ebener Spannungszustand

Auf einen Stabquerschnitt wirken im ebenen Fall **drei**, im räumlichen **sechs** Schnittgrößen.

Wir wollen uns zunächst darauf beschränken, dass auf dem Querschnitt einzig eine Normalkraft wirkt. Sie greift definitionsgemäß im Schwerpunkt der Querschnittsfläche an. Die Normalkraft muss von den Materialpartikeln des Querschnitts aufgenommen und weitergeleitet werden.



Auf ein Teilstück der Größe ΔA ($\Delta A \to 0$) wirke die Teilkraft ΔN.
Lässt man ΔA immer kleiner werden so wird aus dem Quotienten $\frac{\Delta N}{\Delta A}$ durch den Grenzübergang $\Delta A \to 0$:

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \sigma \tag{1.1}$$

Das Ergebnis des Grenzübergangs wird als mechanische Spannung σ bezeichnet. Die Dimension der Spannung ist Kraft durch Fläche, z.B. $\frac{kN}{cm^2}$; $\frac{N}{mm^2}$.

In den Werkstoffwissenschaften wird gern die Einheit Pascal (Pa) verwendet.

Es gilt die Beziehung:

$$1Pa \;=\; 1\frac{N}{m^2}\;; \qquad 1MPa \;=\; 1\frac{N}{mm^2}$$

Wirken die Spannungskomponenten parallel zur Stabachse, der x - Achse, so würden sie mit σ_{xx} oder abgekürzt σ_x bezeichnet.

Selbstverständlich muss die Summierung der Spannungen über den Querschnitt wieder die Normalkraft ergeben.

Es muss gelten:

$$\int_A \sigma_x \, d\bar{A} \;=\; N \tag{1.2}$$

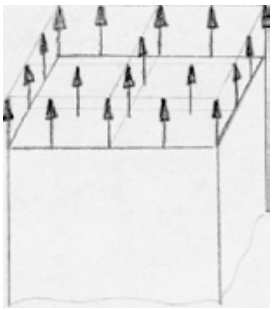


Abbildung 1.1: Gleichverteilte Normalspannungen

Andererseits darf wegen der Voraussetzung, dass nur Normalkraft wirke, auch kein Moment auftreten.

Es muss also auch gelten:

$$M_y \;=\; \int_A \sigma_x \cdot z \, d\bar{A} \;=\; 0 \tag{1.3}$$

$$M_z \;=\; -\int_A \sigma_x \cdot y \, d\bar{A} \;=\; 0 \tag{1.4}$$

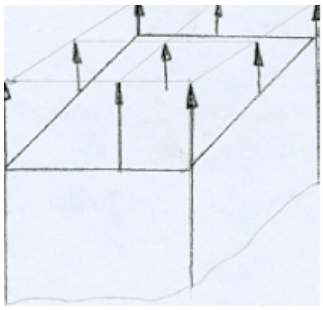


Abbildung 1.2: Linear verteilte Normalspannungen

Wir betrachten hier Spannungen infolge von Schnittgrößen bei Stäben. Stäbe sind solche Gebilde, bei denen zwei Ausdehnungen des Raumes (Breite und Höhe) klein gegenüber einer dritten Ausdehnung (Länge) sind.

Wie später noch gezeigt werden wird, sind die Bedingungen (1.2) bis (1.4) erfüllt, wenn die Spannungen konstant über den Querschnitt verteilt sind.

Bei Spannungen, die nur aus einer Normalkraft herrühren, gilt also

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

Greift nur ein Biegemoment M_y an und ist der Querschnitt zur Y- oder Z-Achse symmetrisch, so ergibt sich die Spannungsverteilung über der Höhe

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z,$$

worin I_y eine Querschnittsgröße ist, die **Flächenträgheitsmoment** genannt wird.

$$I_y = \int_A z^2 \, d\bar{A} \tag{1.5}$$

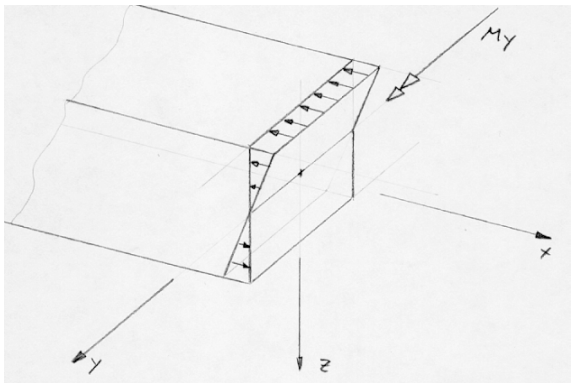


Abbildung 1.3: Spannungsverteilung bei Biegemomentenbelastung in y-Richtung

Bei einem zu einer Achse symmetrischen Querschnitt, der nur durch ein Biegemoment M_z beansprucht ist, ergibt sich die Spannungsverteilung zu

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y,$$

worin $I_z = \int_A y^2 \, d\bar{A}$ ist.

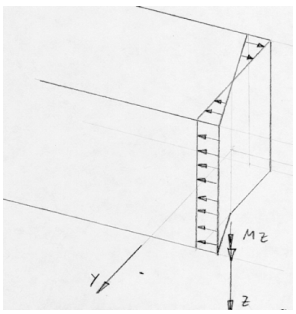


Abbildung 1.4: Spannungsverteilung bei Biegemomentenbelastung in z-Richtung

Die Normalkraft N und die Biegemomente M_y und M_z erzeugen also Spannungen im Querschnitt.

Diese Spannungen nennt man Normalspannungen σ_x; sie wirken auf der Schnittfläche, deren Flächenaußennormale parallel zur x - Achse steht und die Richtung der σ_x Spannung zeigt ebenfalls in Richtung der x - Achse.

Die Querkräfte Q_z erzeugen ebenfalls Spannungen, sie werden Schubspannungen τ_{xz} genannt.

Sie wirken auch auf die Schnittfläche, deren Außennormale die x - Achse ist, aber zeigen in die Richtung der z - Achse, daher ist ihr Name τ_{xz}. Die Schubspannungen wirken also in der Ebene nach der sie bezeichnet sind.

$$\int_A \tau_{xz} \, d\bar{A} = Q_z \tag{1.6}$$

Die Verteilung der Schubspannung infolge Querkraft über einen Rechteckquerschnitt ist **parabelförmig**:

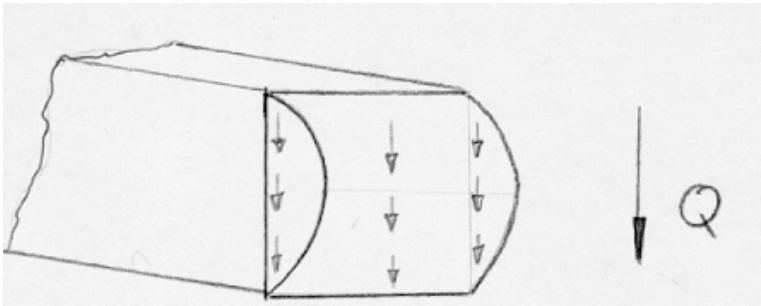


Abbildung 1.5: Schubspannungen

Über die Querschnittsbreite ist ihre Verteilung konstant, oben und unten geht sie auf Null und ihr Maximalwert ergibt sich zu

$$\tau_{xy,max} = 1.5 \cdot \frac{Q_z}{A}$$

Er liegt auf der Höhe des Flächenschwerpunktes.

Wie noch gezeigt werden wird, gibt es auch Schubspannungen τ_{zx}, die in der gleichen Größe auftreten.

Sie wirken in der Ebene, deren Flächennormale parallel zur z - Achse ist und zeigt in die x - Richtung.
Auch Torsionsmomente haben Schubspannungen zur Folge.

1.2 Der räumliche Spannungszustand

Bisher wurden die Spannungen eines Stabes betrachtet, der durch Biegemomente, die Querkraft Q_z und durch die Normalkraft belastet war.

Bei einem allgemein räumlich belasteten Körper können **neun** Spannungskomponenten auftreten, die sich jedoch auf **sechs** Komponenten reduzieren lassen.

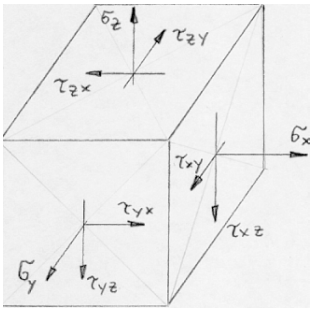
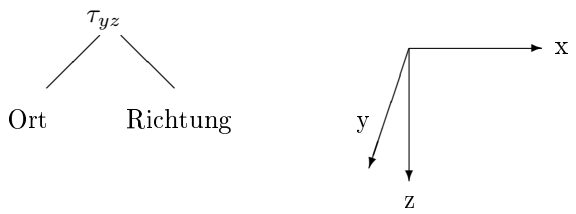


Abbildung 1.6: Räumlicher Spannungszustand

Es erscheinen drei Normalspannungen σ_x, σ_y und σ_z, die auch mit σ_{xx}, σ_{yy} und σ_{zz} bezeichnet werden.



σ_x wirkt auf der Fläche, deren Außennormale parallel zur x-Achse ist,

σ_y wirkt auf der Fläche, deren Außennormale parallel zur y-Achse ist, und σ_z entsprechend.

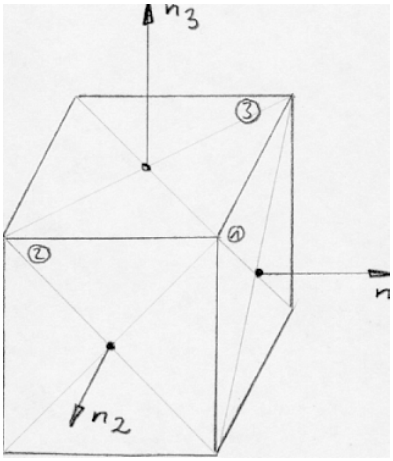


Abbildung 1.7: Normalspannungen

Die Normalspannungen wirken auch jeweils parallel zur Koordinatenachse, nach der sie indiziert sind.

Analog ist es mit den Schubspannungen; ihr erster Index gibt jeweils die Fläche an, auf der sie wirken, der zweite die Richtung, in der sie wirkt.

Die **9** Spannungen kann man auch zu einer Spannungsmatrix zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Auf der Hauptdiagonalen stehen die Normalspannungen, die anderen Elemente sind mit Schubspannungen besetzt und zwar so, dass der erste Index zeilenweise, der zweite Index spaltenweise hochgezählt wird.

1.2.1 Vorzeichen der Spannungen

In der Darstellung sind die Spannungen in positiver Richtung dargestellt.

Wie bei den Schnittgrößen wird auch bei den Spannungen der Begriff des positiven Schnittufers gebraucht.

Positiv ist ein Schnittufer, wenn die Außennormale in die positive Richtung der Koordinatenachse zeigt.

Positive Spannungen liegen vor, wenn am positiven Schnittufer die Spannungen in die positive Koordinatenrichtung zeigen.

Darum zeigen in der Darstellung nur die Spannungsvektoren σ_z, τ_{zx} und τ_{zy} in die negative Koordinatenrichtung, alle anderen in die positive.

Die positiven Normalspannungen sind stets Zugspannungen, die Schubspannungen laufen an den Ecken aufeinander zu oder voneinander weg.

1.2.2 Gleichheit einander zugeordneter Schubspannungen in orthogonalen Schnitten

Die folgende Betrachtung des Momentengleichgewichts am differentiellen Element zeigt, dass die Spannungsmatrix symmetrisch ist, und dass gilt:

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

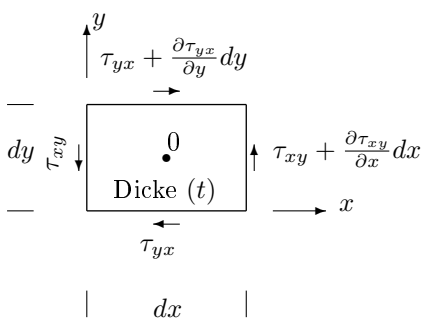


Abbildung 1.8: Schubspannungen in orthogonalen Schnitten

Die Skizze zeigt die Schubspannungen an einem Element der Größe $dx \cdot dy$ und der Dicke t.

An der linken und unteren Kante sind τ_{xy} und τ_{yx} angetragen, während an der rechten und der oberen auch die Zuwächse $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot dx$ und $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \cdot dy$ berücksichtigt wurden.

Bildet man das Momentengleichgewicht um 0 , so erhält man:

$$\tau_{xy}\, dy\, t\, \frac{dx}{2} - \tau_{yx}\, dx\, t\, \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\, d\, x\right) dy\, t\, \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}\, d\, y\right) dy\, t\, \frac{dy}{2} = 0$$

Die (nicht dargestellten) Normalspannungen liefern keinen Anteil, da ihre Teilresultierenden durch den Punkt 0 gehen.

Fasst man das Momentengleichgewicht zusammen und vernachlässigt die Terme, die von höherer Ordnung klein sind, so erhält man:

$\tau_{xy} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \; - \; \tau_{yx} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \; = \; 0,$ woraus folgt: $\tau_{xy} \; = \; \tau_{yx}$

Dieses Ergebnis lässt sich zum Satz von der Gleichheit einander zugeordneter Schubspannungen verallgemeinern:

In je zwei zueinander senkrechten Ebenen sind die zur Schnittlinie der Ebenen senkrechten Schubspannungen einander gleich.

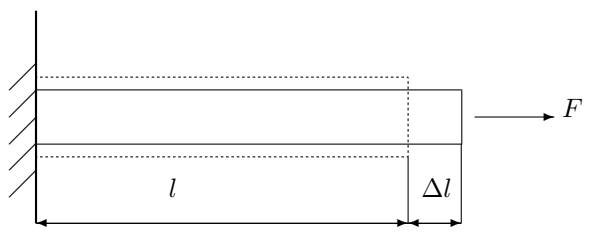
$$\tau_{xy} \; = \; \tau_{yx} \qquad \tau_{xz} \; = \; \tau_{zx} \qquad \tau_{yz} \; = \; \tau_{zy}$$

Kapitel 2

Materialgesetz, Hook'sches Gesetz

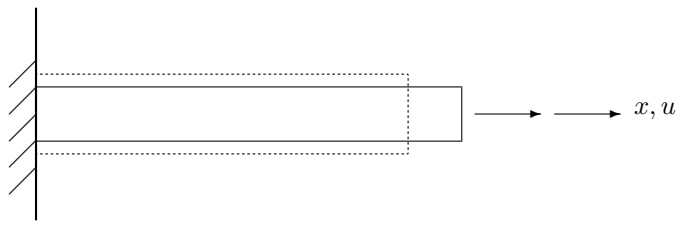
Das Materialgesetz (oder Stoffgesetz) beschreibt den Zusammenhang zwischen den Spannungen und einer Deformationsgröße, den Dehnungen.

Dehnung Der Quotient aus der Längenänderung Δl und der Ausgangslänge l heißt Dehnung ε. Betrachtet man einen Stab der Länge l, auf den die Zugkraft F wirkt,



so ist:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\text{neue Länge - alte Länge}}{\text{alte Länge}} \tag{2.1}$$



Betrachtet man den gleichen Stab unter gleicher Belastung und trägt die Verschiebung $u(x)$ über x auf, so erhält man

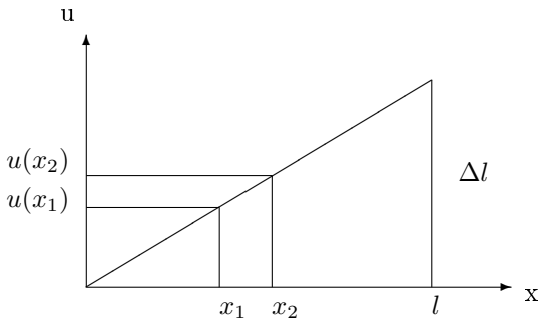


Abbildung 2.1: Verschiebung

An der Stelle $x = l$ liegt die die Verschiebung $u = \Delta l$ vor, an der Stelle x_1 erhält man die Verschiebung $u(x_1)$ und bei $x_2 = x_1 + \Delta x$ die Verschiebung $u(x_1 + \Delta x)$. Bildet man nun den Differenzenquotient an den Stellen x_1 und x_2 und macht den Grenzübergang $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$, so kommt man zur allgemeinen Formulierung:

$$\varepsilon(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Berücksichtigt man, dass die Verschiebung u auch eine Funktion der Koordinaten y und z sein kann und Verschiebungen auch in y und z-Richtung vorliegen können,so erhält man:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Die Dehnung $\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z$ ist die Änderung (partiellen Ableitung) einer Verschiebung $(u,\ v,\ w)$ in die zugeordnete Koordinatenrichtung $x,\ y,\ z$.

2.1 Der Zugversuch

Die Dehnungseigenschaften eines Materials werden durch einen genormten Zugversuch gewonnen. Hierbei wird die Kraft so langsam aufgebracht, dass ihr Dehnungszustand stets der Spannung entspricht (statische Lastaufbringung)

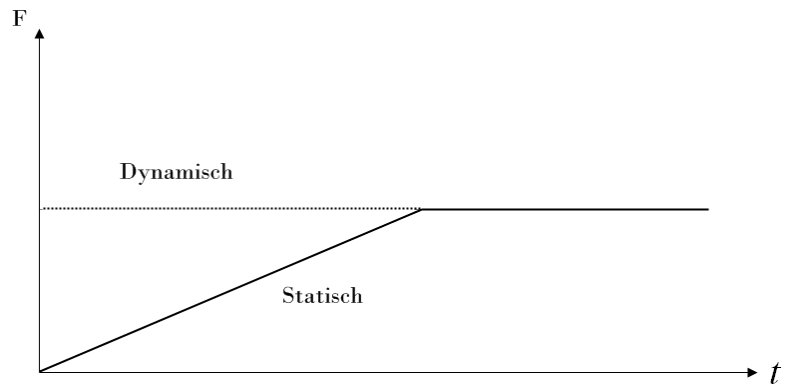


Abbildung 2.2: Lastaufbringung beim Zugversuch

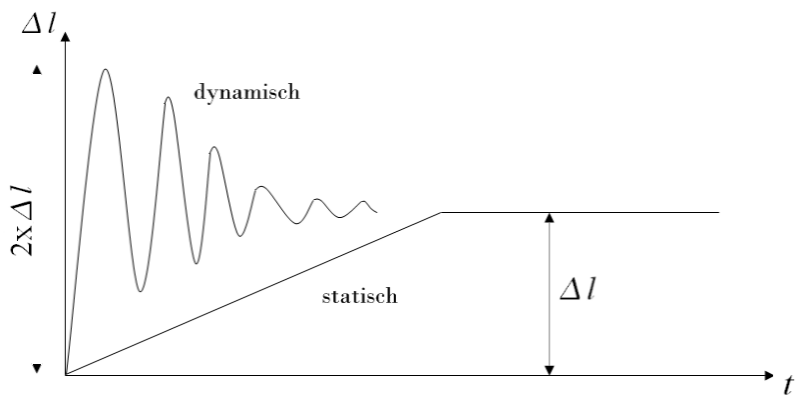


Abbildung 2.3: Verschiebung beim Zugversuch

Nach Aufbringen der vollständigen Last stellt sich die Verlängerung Δl_{stat}. ein. Brächte man die Last sofort in voller Größe auf (dynamische Lastaufbringung), so würde die Verlängerung Δl zunächst bis auf $2\Delta l_{stat}$ wachsen und schwingen. Infolge der Dämpfung werden die Amplituden geringer. Schließlich wird sich das gleiche Δl wie bei statischer Lastaufbringung einstellen.
Zur Auswertung des Zugversuchs wird die Dehnung ε über der zugehörenden Spannung aufgetragen. Diese Darstellung nennt man das Spannungs-Dehnungsdiagramm oder kurz $\sigma - \varepsilon$-Diagramm.

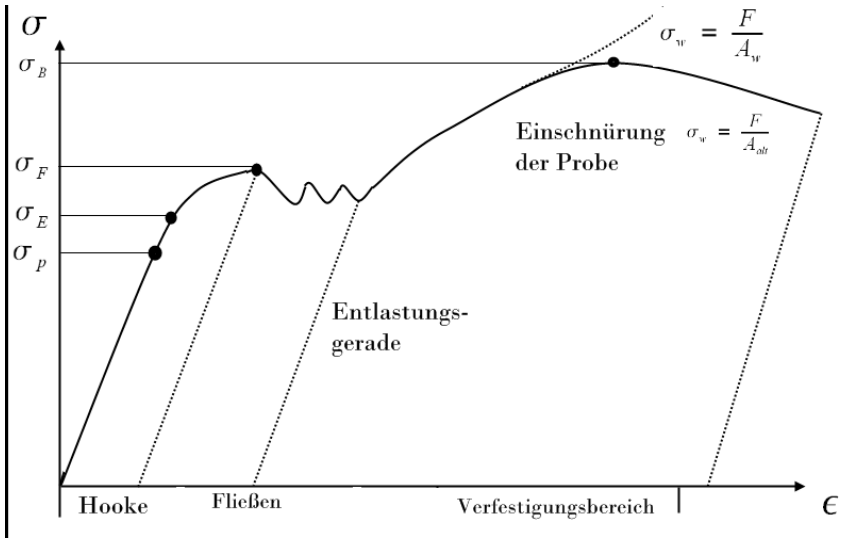


Abbildung 2.4: Spannungs-Dehnungsdiagramm

Betrachtet man das σ - ε - Diagramm bei Stahl S235, so finden sich folgende Bereiche.
Zunächst zeigt sich ein Bereich, bei dem die Spannungen σ geradlinig von ε abhängen. In diesem Proportionalitätsbereich, der bis zum Index P reicht gilt: $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Die Größe E nennt man den Elastizitätsmodul; sie ist für technische Anwendungen in weiten Bereichen konstant.

Diese Beziehung wurde von Robert Hooke (1635-1703) 1660 in Form eines Anagramms veröffentlicht (UT TENSIO SIC VIS) und gilt für viele technische Werkstoffe. Dem Proportionalitätsbereich schließt sich ein kleiner nichtlinearer Bereich bis zum Kennzeichen E an.

Nach einem weiteren nichtlinearen Ansteigen kommt das Kennzeichen F, die Fließgrenze, die Spannung fällt und steigt über wachsender Dehnung. Dieser Bereich wird Fließbereich genannt. Von der Werkstoffwissenschaft wird er mit einer Umstrukturierung des Kristallgitters erklärt.

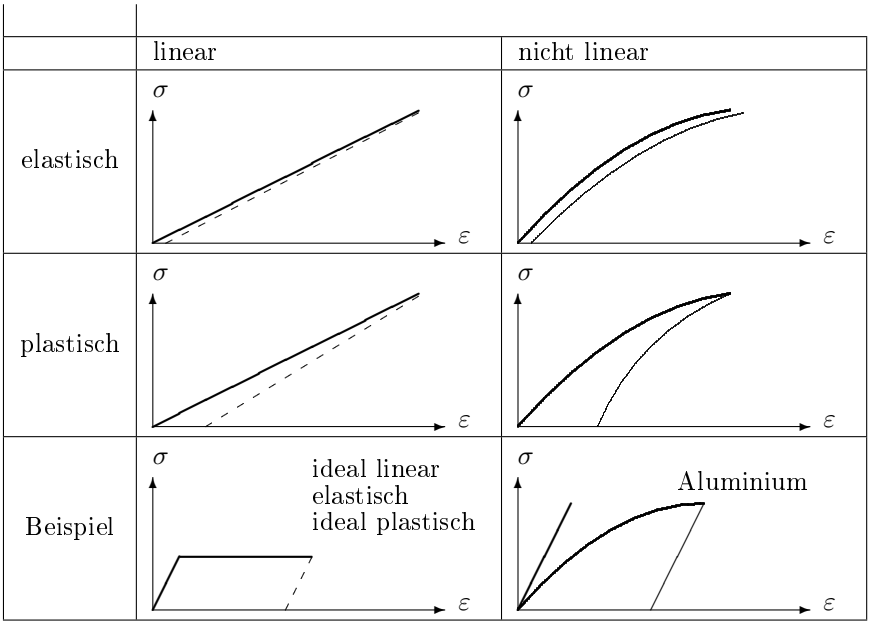
Dem Fließbereich schließt sich der Verfestigungsbereich an, in dem die Spannung wieder bis zum Bruch (Kennzeichen B) steigt. Kurz vor dem Bruch tritt eine Einschnürung des Querschnitts auf. Nach der größten Spannung fällt die Nennspannung (Kraft durch Ausgangsquerschnittsfläche) wieder ab, bis der Prüfkörper vollständig getrennt ist. Betrachtet man an Stelle der Ausgangsfläche die durch die Einschnürung stark kleiner werdende wirkliche Querschnittsfläche, so steigt die wirkliche Spannung bis zur endgültigen Trennung weiter an.

Vom Ursprung bis zur Elastizitätsgrenze ist der elastische Bereich. Steigert man die Spannung nicht höher als σ_E und fährt sie dann zurück, so kommt die Probe

wieder in ihre Ausgangskonfiguration zurück.

Der Bereich von der Elastizitätsgrenze bis zum Bruch wird plastischer Bereich genannt. Steigert man die Spannung bis in den plastischen Bereich und entlastet die Probe wieder, so ist die Entlastungsgerade eine Parallele zur Geraden im linear elastischen Bereich. Es bleibt eine bleibende Verformung.

2.2 Elastisches und Plastisches Werkstoffverhalten



- elastisch: Belastungskurve stimmt mit Entlastungskurve überein
- plastisch: Belastungskurve und Entlastungskurve stimmen nicht überein (bleibende Verformung)

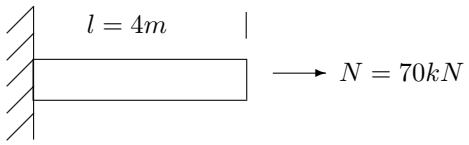
Reale Materialien haben elastische und plastische, lineare und nichtlineare Bereiche. Für die Bearbeitung mechanischer Probleme sind Idealisierungen notwendig. Oft genügt es mit dem Hooke'schen Gesetz $\sigma = E \cdot \varepsilon$ zu rechnen. Im Stahlbau wird mit linear elastischem und ideal plastischem Verhalten (bilineares σ - ε -Diagramm) gerechnet.

Der E-Modul ist eine Materialkonstante.

Material	E [N/mm²]	α_T [1/°C]
Stahl	$2,1 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	$0,7 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Beton	$0,3 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^{-5}$
Holz-Faser	$0,7...1,6 \cdot 10^4$	$2,2...3,1 \cdot 10^{-5}$
Gusseisen	$1,0 \cdot 10^5$	$0,9 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	$1,2 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
Messing	$1,0 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2.1: Übersicht über E-Module unterschiedlicher Werkstoffe

Beispiel:



geg: $N = 70kN$

$A = 10cm^2$

$E = 2,1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$

ges: Δl

Lösung: $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{70 \cdot 10^3 N}{10 \cdot 10^2 mm^2} = 70 \frac{N}{mm^2}$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{70 \mathrm{N/mm^2}}{2{,}1 \cdot 10^5 \mathrm{N/mm^2}} = 3,33 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \rightarrow \quad \Delta l = \varepsilon \cdot l = 3,33 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^3$$

$$\underline{\Delta l = 1,333mm}$$

2.3 Querkontraktion

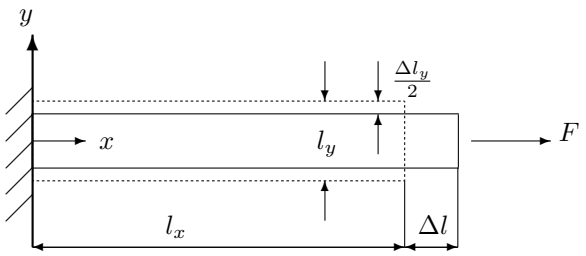


Abbildung 2.5: Querkontraktion

Betrachtet man die Verformungen eines Stab unter Zugkraft genauer, so zeigt sich, dass neben der Verlängerung Δl_x der Stab schmaler geworden ist.

Diese Verzerrung nennt nennt sie Querdehnung.

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} \tag{2.3}$$

Es gilt der Zusammenhang

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x$$

ν wird Querkontraktionszahl genannt. Bei Stahl gilt $\nu = 0,3$ bei Kunststoff $\nu \approx 0,4$. Es gelten die Grenzen der Querkontraktion

$$0 \leqslant \nu \leqslant 0,5$$

Der Wert $\nu = 0,5$ gilt beispielsweise für Gummi. Die Volumendehnung ε_v beträgt dann

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$$

.

2.4 Stoffgesetz für Gleitung

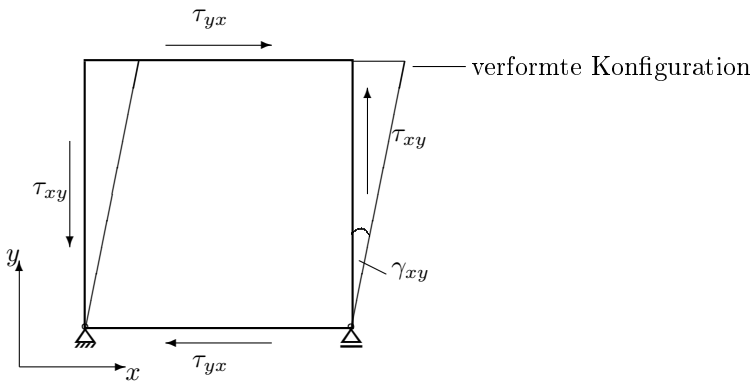


Abbildung 2.6: Gleitung

Wirken auf eine Scheibe ausschließlich Schubspannungen, so verändert sie ihre Form so, dass aus einem Rechteck ein Parallelogramm wird. Der Winkel, um den sie verzerrt wird, wird als Gleitwinkel oder Ingenieursgleitung γ_{xy} oder einfach **Gleitung** bezeichnet.
Wie bei den Normalspannungen σ_x und den Dehnungen besteht auch hier ein linearer Bereich für den gilt: $\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$ (mit dem Gleitmodul G). G ist ebenso wie E eine Materialkonstante.

E und G sind nicht unabhängig voneinander, ist der Werkstoff isotrop und homogenen so besteht der Zusammenhang:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \tag{2.4}$$

Für Stahl ergibt sich:

$$G = \frac{2,1 \cdot 10^4}{2 \cdot (1 + 0,3)} = 0,8077 \cdot 10^4 \ \mathrm{kN/cm^2}$$

Wie der Elastizitätsmodul hat der Gleitmodul die Einheit einer Spannung. Er wird auch häufig als **Schubmodul** bezeichnet.

2.5 Verallgemeinertes Hook'sches Gesetz

Es gilt für homogene isotrope elastische feste Körper

Homogenität:	gleiche Zusammensetzung des festen Körpers bis in die kleinsten Teile
	→ Dehnungen sind stetige Funktionen der Ortskoordinaten
Isotropie:	gleiche elastische Eigenschaften nach allen Richtungen

2.5.1 Hooke'sches Gesetz für den ebenen Spannungszustand.

Ein ebener Spannungszustand liegt vor, wenn nur in zwei Koordinatenrichtungen Spannungen wirken.

Beispiel:

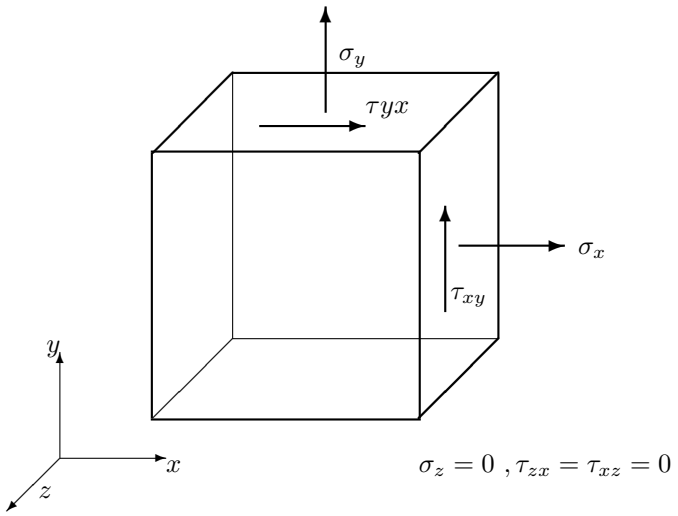


Abbildung 2.7: ebener Spannungszustand

Die Dehnungen setzen sich aus einem Anteil infolge der Normalspannung σ_x bzw. σ_y und einem aus der Querkontraktion infolge der Normalspannung σ_y bzw. σ_x zusammen:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} = \frac{-\nu \cdot \sigma_x + \sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_z = -\nu \cdot \frac{\sigma_x}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$

Es tritt auch eine Dehnung ε_z auf, obwohl (besser weil) in z-Richtung keine Spannung wirkt!

Die Spannungen ergeben sich daraus:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot (\nu \cdot \varepsilon_x + \varepsilon_y) \\
\sigma_z &= 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

2.5.2 Hook'sches Gesetz für den räumlichen Spannungszustand

In Erweiterung des ebenen Spannungszustandes ergibt sich für den räumlichen Spannungszustand:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)]
\end{aligned}$$

und die Spannungen als Funktion der Dehnungen ergeben sich:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{(1-2\cdot\nu)} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{(1-2\cdot\nu)} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] \\
\sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)} \cdot \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{(1-2\cdot\nu)} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.5.3 Berücksichtigung des Temperatureinflusses

Die Erwärmung eines Körpers führt zu dessen Ausdehnung. Diese Wärmeausdehnung folgt dem Gesetz $\varepsilon_T = \alpha_T \cdot \Delta T$ wobei der Wärmeausdehnungskoeffizient α_T in den uns interessierenden Temperaturbereichen eine Materialkonstante ist. Die Gleitungen werden durch die Erwärmung nicht verändert. Damit erhält das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz die Form:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \overbrace{\frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)]}^{\varepsilon_{elastisch}} + \overbrace{\alpha_T \cdot \Delta T}^{\varepsilon_{temp}} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] + \alpha_T \cdot \Delta T \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_T \cdot \Delta T \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{xy} \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{yz} \\
\gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \cdot \tau_{zx}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Kapitel 3

Transformation der Spannungsmatrix

3.1 Transformation des ebenen Spannungszustandes

3.1.1 Spannungen an Schnitten

Der ebene Spannungszustand ist dadurch gekennzeichnet, dass alle Spannungen in einer Ebene wirken.

Wie bereits gezeigt treten Dehnungen jedoch in **drei** Richtungen auf.

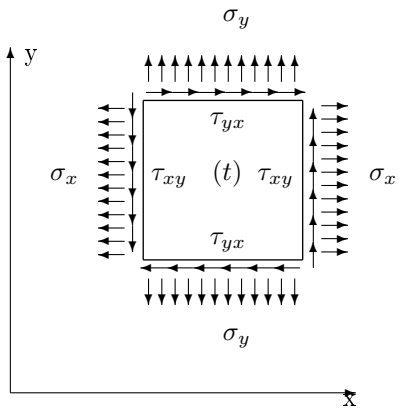


Abbildung 3.1: ebener Spannungszustand

Am dargestellten Element der Größe $dx \cdot dy$ und der Dicke t wirken die Spannungen σ_x, σ_y und τ_{xy}.

Die Spannungen seien über die Dicke t konstant verteilt und das Element sei im Gleichgewicht.

Führt man einen gedachten Schnitt unter dem Winkel φ durch das Element und trägt die dabei frei werdenden Spannungen σ_ξ und $\tau_{\xi\eta}$ an, so muss sich dieses Teilelement auch im Gleichgewicht befinden.

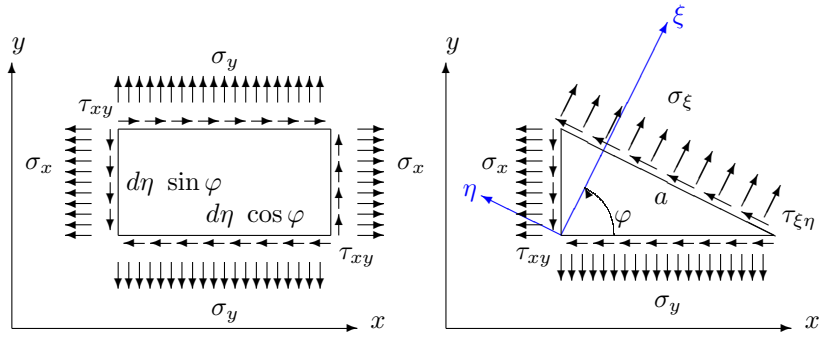


Abbildung 3.2: Spannungen an geschnittenem Element

Das Gleichgewicht in ξ-Richtung liefert:

$$\begin{aligned}\sum F_\xi \ = \ 0 \ = \ \sigma_\xi \cdot d\eta \cdot t - \sigma_y \cdot dx \cdot t \cdot \sin\varphi \\ -\tau_{xy} \cdot dx \cdot t \cdot \cos\varphi \\ -\sigma_x \cdot dy \cdot t \cdot \cos\varphi \\ -\tau_{xy} \cdot dy \cdot t \cdot \sin\varphi\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} dx &= d\eta \cdot \sin\varphi \\ dy &= d\eta \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

und nach einer Division durch $d\eta \cdot t$ erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_\xi - \sigma_y \cdot \sin^2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \\ &\quad -\sigma_x \cdot \cos^2\varphi - \tau_{xy} \cos\varphi \cdot \sin\varphi \\ \rightarrow \quad \sigma_\xi &= \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \cdot \sin^2\varphi + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

Das Gleichgewicht in η-Richtung liefert:

$$\begin{aligned}\sum F_\eta \;=\; 0 \;=\; & \tau_{\xi\eta} \cdot d\eta \cdot t - \sigma_y \cdot dx \cdot t \cdot \cos\varphi \\ & +\tau_{xy} \cdot dx \cdot t \cdot \sin\varphi \\ & +\sigma_x \cdot dy \cdot t \cdot \sin\varphi \\ & -\tau_{xy} \cdot dy \cdot t \cdot \cos\varphi\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} dx &= d\eta \cdot \sin\varphi \\ dy &= d\eta \cdot \cos\varphi \end{aligned}$$

und nach einer Division durch $d\eta \cdot t$ erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \tau_{\xi\eta} - \sigma_y \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + \tau_{xy} \cdot \sin^2\varphi \\ &\quad +\sigma_x \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - \tau_{xy}\cos^2\varphi \\ \rightarrow \quad \tau_{\xi\eta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \cdot\tau_{xy} \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \end{aligned}$$

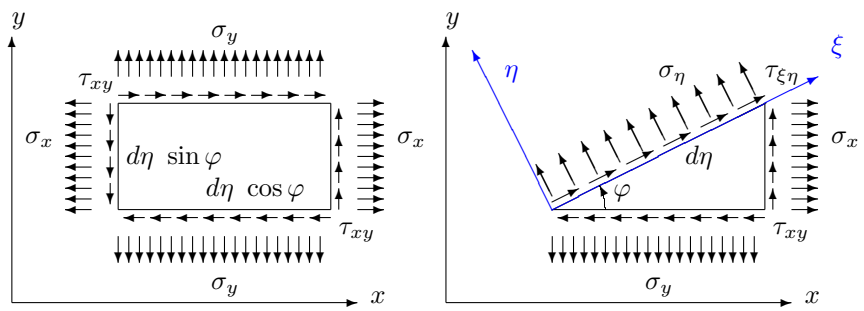


Abbildung 3.3: Spannungen an geschnittenem Element

Die Gleichgewichtsbetrachtung eines zweiten Schnittes liefert die Formeln:

$$
\begin{aligned}
\sigma_\xi &= \sigma_x \cdot \cos^2\varphi + \sigma_y \cdot \sin^2\varphi + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \\
\sigma_\eta &= \sigma_x \cdot \sin^2\varphi + \sigma_y \cdot \cos^2\varphi + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \\
\tau_{\xi\eta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \cdot\tau_{xy} \cdot (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Führt man die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\cos^2\varphi &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\varphi) \\
\sin^2\varphi &= \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\varphi) \\
\sin\varphi \cdot \cos\varphi &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi
\end{aligned}
$$

in (3.1) ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\sigma_\xi &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \\
\sigma_\eta &= \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \cos 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \\
\tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2} \cdot (\sigma_x - \sigma_y) \cdot \sin 2\varphi + \cdot\tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

In dieser Form findet man die Transformationsbeziehungen häufig in Formelsammlungen.

3.1.2 Hauptspannungen

Nach den Gleichungen (3.1) bis (3.2) sind die Normalspannungen σ_ξ und σ_η eine Funktion des Koordinatensystems oder des gewählten Drehwinkels φ.

Sie nehmen dort ein Extremum an , wo die erste Ableitung $\frac{d\sigma_\xi(\varphi)}{d\varphi}$ verschwindet.

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_\xi(\varphi)}{d\varphi} &= \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{2}\cdot(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{1}{2}\cdot(\sigma_x-\sigma_y)\cdot\cos 2\varphi+\tau_{xy}\cdot\sin 2\varphi\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot(\sigma_x-\sigma_y)\cdot 2\cdot(-\sin 2\varphi^*)+2\cdot\tau_{xy}\cdot\cos 2\varphi^* \;=^{!}\; 0 \\
(\sigma_x-\sigma_y)\cdot\sin 2\varphi^* &= 2\cdot\tau_{xy}\cdot\cos 2\varphi^* \\
\frac{\sin 2\varphi^*}{\cos 2\varphi^*} &= \frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \;=\; \tan 2\varphi^*
\end{aligned}$$

Der Winkel φ^* , bei dem die Normalspannungen extremal werden, ergibt sich zu:

$$\tan 2\varphi^* \;=\; \frac{2\cdot\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{3.3}$$

Setzt man (3.3) in (3.2) ein , so erhält man nach einigen Zwischenschritten die Extremalspannungen

$$\sigma_{1,2} \;=\; \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{3.4}$$

Für σ_1 ist das positive Vorzeichen zu verwenden:

$\sigma_1 \geq \sigma_2$

Der Winkel φ^* ist der Hauptspannungswinkel, unter dem die Normalspannungen extremal werden und die Schubspannungen verschwinden.

Die Schubspannungen werden mit der Bedingung $\frac{d\tau_{\xi\eta}}{d\varphi}=0$ extremal.

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau_{\xi\eta}}{d\varphi} &= \frac{d}{d\varphi}\left[-\frac{1}{2}\cdot(\sigma_x-\sigma_y)+\frac{1}{2}\cdot+\tau_{xy}\cdot\cos 2\varphi\right] \\
&= -\frac{1}{2}\cdot(\sigma_x-\sigma_y)\cdot 2\cdot\cos 2\varphi^{**}+2\cdot\tau_{xy}\cdot(-\sin 2\varphi^{**}) \;=^{!}\; 0 \\
(\sigma_x-\sigma_y)\cdot\cos 2\varphi^{**} &= -2\cdot\tau_{xy}\cdot\sin 2\varphi^{**} \\
\frac{\sin 2\varphi^{**}}{\cos 2\varphi^{**}} &= -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\cdot\tau_{xy}} \;=\; \tan 2\varphi^{**}
\end{aligned}$$

φ^{**} wird der Hauptschubspannungswinkel genannt.

Da $\tan 2\varphi^* = -\frac{1}{\tan 2\varphi^{**}}$ ist, liegt zwischen $2\varphi^*$ und $2\varphi^{**}$ ein Winkel von 90°, φ^* und φ^{**} bilden somit einen Winkel von 45°.

Die Hauptschubspannungen betragen:

$$\tau_{min,max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{3.5}$$

Die Normalspannungen haben unter dem Hauptschubspannungswinkel φ^{**} den Wert

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{3.6}$$

Wegen der Doppeldeutigkeit der Tangensfunktion ist es einfacher, den Hauptspannungswinkel mit

$$\boxed{\tan\varphi^* = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2}} \tag{3.7}$$

zu bestimmen.

Hierzu ist es allerdings die kleinere Hauptspannung σ_2 erforderlich.

3.1.3 Mohr'scher Spannungskreis

Für den ebenen Spannungszustand ist ein graphisches Verfahren zur Bestimmung der Hauptspannungen und des Hauptspannungswinkels oft nützlich. Hierzu wird mit Hilfe von σ_x, σ_y und τ_{xy} ein Kreis, der Mohr'sche Spannungskreis, konstruiert, aus dem sich die Spannungen für jeden Transformationswinkel ablesen lassen.
Es gilt:

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \tag{3.8}$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \tag{3.9}$$

$$\sigma_\xi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi + \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi \tag{3.10}$$

Nun wird der Winkel φ aus (3.9) und (3.10) eliminiert.

$(3.9)^2$:

$$\tau_{\xi\eta}{}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cdot \sin^2 2\varphi - 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi \cdot \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi + \tau_{xy}{}^2 \cdot \cos^2 2\varphi$$

$(3.10)^2$:

$$\left[\sigma_\xi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right]^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cdot \cos^2 2\varphi + 2 \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\varphi \cdot \tau_{xy} \cdot \sin 2\varphi + \tau_{xy}{}^2 \cdot \sin^2 2\varphi$$

$(3.9)^2 + (3.10)^2$:

$$\begin{aligned}\left[\sigma_\xi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{\xi\eta}{}^2 &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cdot (\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi) - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \tau_{xy} \\ &\quad + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \tau_{xy} + \tau_{xy}{}^2 \cdot (\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\end{aligned}$$

mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned}\left[\sigma_\xi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right]^2 + \tau_{\xi\eta}{}^2 &= \underbrace{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} \\ (X - X_M)^2 + (Y - Y_M)^2 &= r^2\end{aligned}$$

Dies ist eine Kreisgleichung!

Der Spannungszustand in einem Punkt einer Scheibe wird durch den Mohr'schen Spannungskreis beschrieben.

Zu jedem Schnitt (Winkel φ) gehört ein Punkt auf dem Kreis.

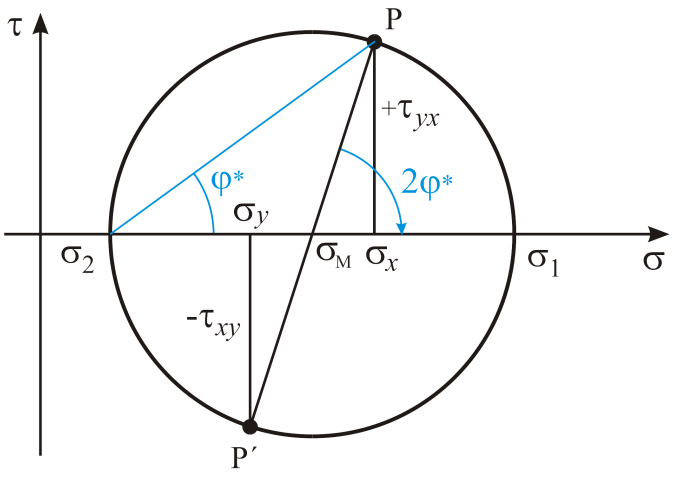


Abbildung 3.4: Mohr'scher Spannungskreis

Konstruktion:

σ_x und σ_y werden auf der horizontalen Achse aufgetragen,
die Schubspannung bei σ_x Vorzeichen gerecht eingetragen,
bei σ_y in umgekehrter Richtung . (P und P‘)
Der Schnittpunkt der Geraden $\bar{PP'}$ mit der σ- Achse ist der Mittelpunkt des Kreises.

3.2 Transformation des räumlichen Spannungszustandes

Analog zu (3.2) lässt sich der räumliche Spannungszustand transformieren.

$$\alpha_1 \quad \text{Winkel } x - \vec{e_\xi}$$

$$\beta_1 \quad \text{Winkel } y - \vec{e_\xi}$$

$$\gamma_1 \quad \text{Winkel } z - \vec{e_\xi}$$

$$\vec{e_\xi} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\beta_1 \\ \cos\gamma_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \end{bmatrix} \quad \vec{e_\eta} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_2 \\ \cos\beta_2 \\ \cos\gamma_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \end{bmatrix} \quad \vec{e_\xi} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \end{bmatrix}$$

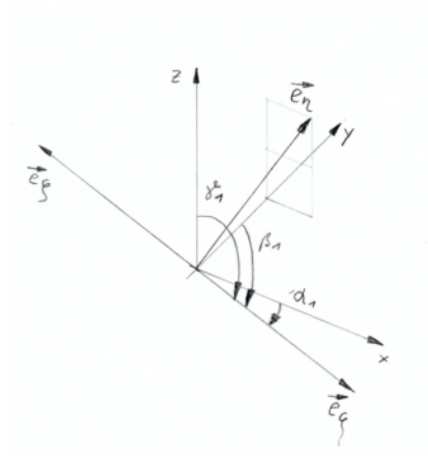


Abbildung 3.5: räumliche Spannungstransformation

$$T = \begin{bmatrix} \vec{e_\xi} & \vec{e_\eta} & \vec{e_\xi} \end{bmatrix}$$

$$T^t \cdot [\sigma] \cdot T = [\sigma]_{\xi\eta\xi} \tag{3.11}$$

mit

$$\vec{e_\xi} \times \vec{e_\eta} = \vec{e_\xi}$$

Auch im räumlichen Spannungszustand lässt sich eine Konfiguration finden, bei der die Schubspannungen verschwinden und die Normalspannungen extremal, d.h. zu den Hauptspannungen, werden.
Dazu ist die Lösung einer kubischen Gleichung in notwendig.
Die drei Wurzeln (Nullstellen) sind die drei Hauptspannungen.

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0 \tag{3.12}$$

mit

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \qquad \text{(Spur der Matrix)}$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - {\tau_{xy}}^2 - {\tau_{yz}}^2 - {\tau_{zx}}^2$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \qquad \text{(Determinante der Matrix)}$$

I_1, I_2, I_3 Invarianten der Spannungsmatrix,
da von der Drehung des Koordinatensystems unabhängig!

Kapitel 4

Zug, Druck und Scherung

In diesem Kapitel sollen zur Einführung in die Festigkeitslehre die einfachsten Beanspruchungen behandelt werden.

4.1 Zug

Ein Zylindrischer Stab mit der konstanten Querschnittsfläche A wird durch eine Normalkraft mit positivem Vorzeichen, einer Zugkraft F_z beansprucht. Die Kraft greift im Schwerpunkt der Querschnittsfläche an.

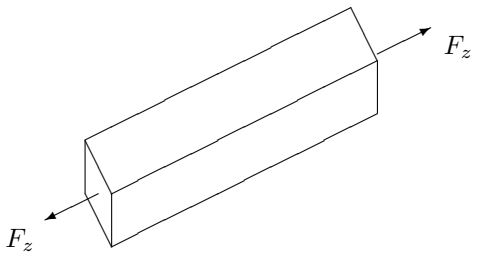


Abbildung 4.1: Zugstab

Bei Vernachlässigung von Querschnittssprüngen und Werkstoffinhomogenitäten kann von konstanter Spannungsverteilung über den Querschnitt ausgegangen werden Die Normalspannung σ kann damit durch

$$\boxed{\sigma = \frac{F_z}{A}}$$

bestimmt werden.
Die für den Ingenieur wichtige Frage ist, wie groß die Querschnittsfläche bei bekannten Beanspruchung F_z sein muss. Die Beantwortung dieser Frage nennt man die Bemessung.
Die auftretenden Spannung darf eine zulässige Spannung σ_{zul} nicht überschreiten.

$$\sigma \leq \sigma_{zul}$$

Diese zulässige Spannung wird aus einem spezifischer Kennwert des Werkstoffs, meist der Streckgrenze β_s abgeleitet.

$$\sigma_{zul} = \frac{\beta_s}{\nu}$$

Der Sicherheitsfaktor ν liegt zwischen $1,5$ und $2,5$, in Sonderfällen auch darunter und darüber. Er wird in den Normen und anderen technischen Regelwerken festgelegt.
Verfahren, bei denen die Tragsicherheitsnachweis durch den Vergleich der betragsmäßig höchsten auftretenden Spannung mit einer zulässigen Spannung erbracht wird, nennt man ein Verfahren nach dem Konzept der zulässigen Spannungen. Es gibt noch andere Konzepte, genannt sei das Konzept der Teilsicherheitsbeiwerte, bei dem auch die Wahrscheinlichkeit es Auftretens einer Beanspruchung und die Wahrscheinlichkeit der Unterschreitung einer Beanspruchbarkeit berücksichtigt wird.
Die Nachweisgleichung, oder wie es in einigen Vorschriften bezeichnet wird, das Nachweisformat lautet beim Konzept der zulässigen Spannungen:

$$\boxed{\sigma = \frac{F_z}{A} \leq \sigma_{zul}}$$

4.1.1 Beispiel Flaschenzug

Mit einem zweifach geschorenen Flaschenzug soll eine Masse langsam gehoben werden. Die zur Verfügung stehende Zugkraft beträgt $F_s = 11.9kN$ Es stehen Seile mit folgenden Querschnittsflächen zur Verfügung:

$$A_1 = 0.5cm^2 \text{ und } A_2 = 1.35cm^2$$

Die zulässige Spannung im Seil beträgt

$$\sigma_{zul} = 21kN/cm^2$$

Welches Seil kann eingesetzt werden?

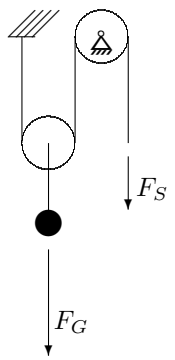


Abbildung 4.2: Flaschenzug

Nachweis Seil 1:

$$\sigma = \frac{11,9kN}{0.5cm^2} = 23,8kN/cm^2 \geq \sigma_{zul} \rightsquigarrow \text{unbrauchbar}$$

Nachweis Seil 2:

$$\sigma = \frac{11,9kN}{1.25cm^2} = 9,52kN/cm^2 \leq \sigma_{zul} \rightsquigarrow \text{brauchbar, Nachweis erbracht!}$$

4.1.2 Beispiel: Zugstab mit geschraubtem Anschluss

Ein Zugstab in einem Fachwerk ist an ein Knotenblech mit zwei Schrauben hintereinander angeschlossen. Durch das Bolzenloch mit dem Duchmesser d_ℓ wird der Querschnitt geschwächt, tragend wirkt nur der sogenannte Nettoquerschanitt:

$$A_n = A - t\ d_\ell$$

Die Kerbwirkung soll hier ebensowenig berücksichtigt werden wie verschiedene technologische Vorschriften in den Fachnormen, sie sind späteren Lehrveranstaltungen vorbehalten.

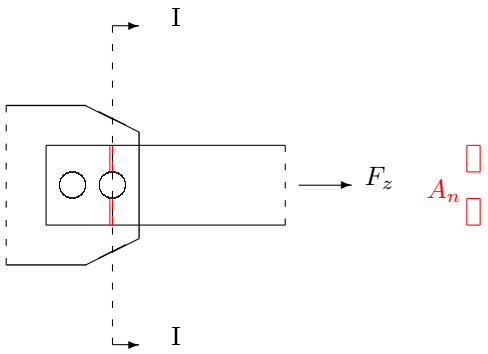


Abbildung 4.3: Nettoquerschnitt

Der Querschnitt ist im Schnitt I-I geschwächt, die Kraft F_z muss aber in voller Größe vom geschwächten Querschnitt A_n aufgenommen werden. Das Nachweisformat für den geschwächten Querschnitt ergibt sich somit zu:

$$\boxed{\sigma_n = \frac{F_z}{A_n} \leq \sigma_{zul}}$$

4.2 Druckbeanspruchung

4.2.1 Druckbeansprungen bei stabförmigen Körpern

Druckbeanspruchungen entstehen bei stabförmigen Bauteilen infolge einer Normalkraft mit negativem Vorzeichen.
Die Druckspannung ergibt sich zu

$$\sigma_d = \frac{F_d}{A}$$

Das Nachweisformat ist entsprechend

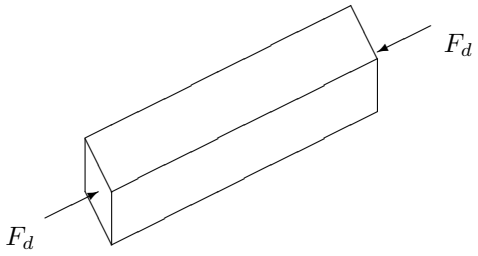


Abbildung 4.4: Druckstab

$$\boxed{|\sigma_d| = \frac{|F_d|}{A} \leq \sigma_{zul}}$$

Bei schlanken Stäben ist bei Druckbeanspruchung das Knicken zu beachten.

4.2.2 Pressungen

Wirken Druckspannungen in der Kontaktebene zwischen zwei Körpern spricht man von Pressung p.

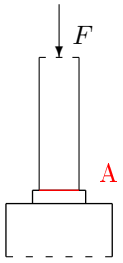


Abbildung 4.5: Pressung

Das Nachweisformat für Pressungen lautet:

$$\boxed{p = \frac{F}{A} \leq p_{zul}}$$

Die zulässige Pressung hängt von der Werkstoffpaarung und den Eigenschaften der Oberflächen ab.

Die Pressung von Lagerteilen ist von der Lagerart und dem Lagerspiel abhängig. In technischen Berechnungen ist ein vereinfachter Ansatz üblich:

$$\boxed{p = \frac{F}{\ell\, d} \leq p_{zul}}$$

Die zulässige Pressung ist den Unterlagen des Lagers zu entnehmen.

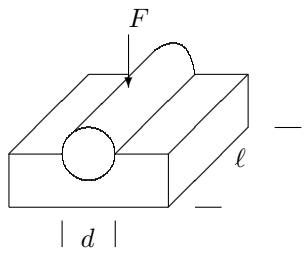


Abbildung 4.6: Lagerpressung

Der Lochleibungsdruck von Passschraubenverbindungen wird ebenso vereinfachend mit der Projektionsfläche ($t\ d$) angenommen:

$$\boxed{\sigma_\ell = \frac{F}{t\ d} \leq \sigma_{\ell\ zul}}$$

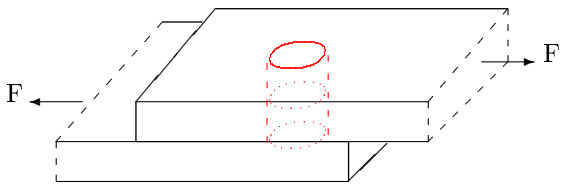


Abbildung 4.7: Lochleibungsdruck

Scherbeanspruchung tritt beispielsweise beim Stanzen und beim Abscheren von Bolzen auf. Zunächst soll das Stanzen behandelt werden.
Die Scherspannung ergibt sich zu:

$$\tau = \frac{F}{A_s}$$

mit der Scherfläche A_s

$$A_s = t\ \ell$$

Die erforderliche Stanzkraft ergibt sich zu:

$$\boxed{F_{erf} = A_s\ \tau_B}$$

Bolzenscherung ist bei Niet- und Schraubenverbindungen zu beachten. In Abb. 4.9 ist eine zweischnittige Verbindung dargestellt.
Die Scherfläche errechnet sich zu

$$A_s = n\ \frac{\pi\ d^2}{4}$$

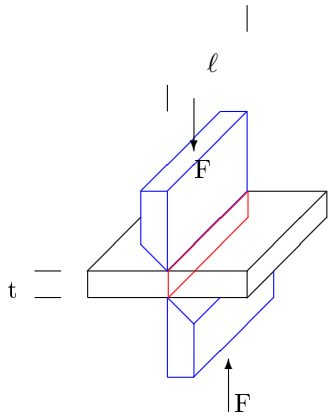


Abbildung 4.8: Stanze

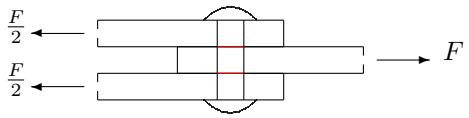


Abbildung 4.9: Abscheren

dabei ist n die Schnittigkeit der Verbindung. Da eine zweischnittige Verbindung vorliegt, ist n=2. Die Scherspannung ergibt sich zu:

$$\boxed{\tau_a = \frac{F}{A_s} \leq \tau_{zul}}$$

Der Festigketisnachweis einer Bolzenverbindung besteht aus drei Einzelnachweisen:

- Abscheren
- Lochleibung
- Nettoquerschnitt der Laschen

Kapitel 5

Spannungshypothesen

Mit den Methoden der Festigkeitslehre kann angegeben werden, durch welche Spannungen ein Bauteil beansprucht ist. Diese Spannungen müssen mit Ergebnissen von Versuchen verglichen werden, um beurteilen zu können, wie weit die Beanspruchung des Bauteils von der Beanspruchung entfernt ist, die zum Versagen führt.
Diese Versuche sind meist einachsige Zugversuche, deren Ergebnisse in Form eines $\sigma - \varepsilon -$ Diagramms dargestellt werden.

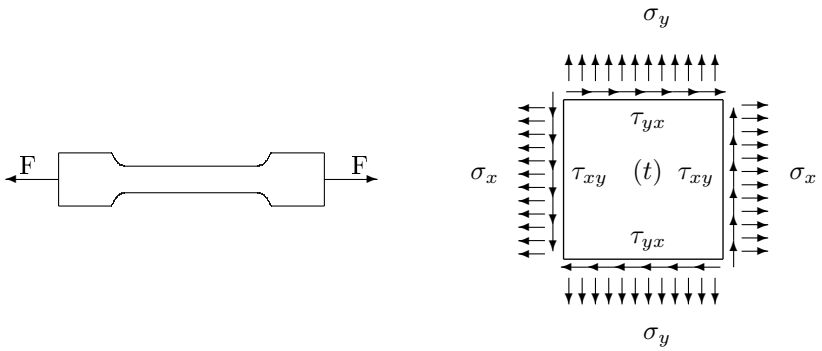


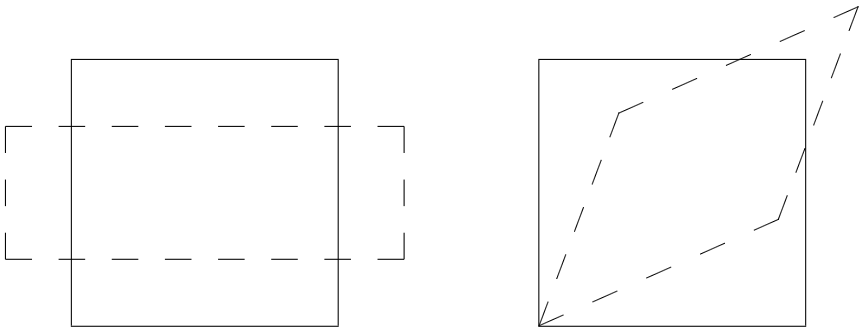
Abbildung 5.1: Proportionalitätsstab und ebener Spannungszustand

Bei den zu beurteilenden Bauteilen liegt aber selten eine reine Zugspannungsbeanspruchung vor, meist wirkt eine Kombination von verschiedenen Normal- und Schubspannungen.
Diese Beanspruchungskombination muss also so zusammengefasst werden, dass eine Vergleichsgröße entsteht, die dem Ergebnis aus dem einachsigen Versuch gegenübergestellt werden kann.
Diese Vergleichsgröße wird Vergleichsspannung genannt.
In der Vergangenheit gab es viele Hypothesen, wie diese Größe zu bestimmen ist. Einige davon sollen hier angeführt werden.

5.1 Hypothese von der Gestaltsänderungsenergie

Diese Hypothese, die auf Huber (1872-1950), von Mises (1883-1953) und Hencky (1885-1951) zurückgeht, geht davon aus, dass die Änderung der Gestalt eines Körpers, für die Zerstörung seines Gefüges maßgebend ist.
Die Vergleichsspannung nach der Hypothese der Gestaltsänderungsenergie berücksichtigt nur die Anteile aus dem Spannungstensor, die zur Änderung der Gestalt beitragen.

5.1.1 Gestaltsänderung:



Aus Würfel wird Quader Aus Quader wird Raute

Diese Vergleichsspannung, die meist als von Mises Spannung bezeichnet wird, ist besonders für zähe Werkstoffe geeignet und wird für nach DIN18800 (11.90) für Stahl eingesetzt.
Hat man bereits die Hauptspannungen vorliegen wird sie berechnet nach:

$$\sigma_v^{v.M} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \tag{5.1}$$

In dieser Form zeigt sich deutlich, dass die Änderung der Gestalt als maßgebend angenommen wurde. Man erkennt, dass der hydrostatische Spannungszustand mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ die Vergleichsspannung Null ergibt.
Oft werden die Hauptspannungen nicht bekannt sein, die von Mises Vergleichsspannung bestimmt man dann mit:

$$\sigma_v^{v.M} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \tag{5.2}$$

In vielen Fällen wirken nur σ_x- und τ_{xy}-Spannungen, dann vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$\boxed{\sigma_v^{v.M} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}} \tag{5.3}$$

5.2 Die Schubspannungshypothese

Die Schubspannungshypothese geht auf Tresca [1] zurück. Sie geht davon aus, dass durch Schubspannungen Gleitungen ausgelöst werden, die zum Fließen und damit zur Zerstörung des Materials führen. Daher ist sie vor allem für Material mit einem ausgesprochenen Fließbereich geeignet. Allerdings ist sie weitgehend von der Mises-Huber-Hencky-Hypothese verdrängt worden.
Verantwortlich für das Materialversagen ist nach der Schubspannungshypothese die maximale Schubspannung. Die entsprechende Vergleichsspannung beträgt das Doppelte der Hauptschubspannung:

$$\boxed{\sigma_v^{VS} = 2 \cdot \tau_{max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}} \tag{5.4}$$

5.3 Hauptspannungshypothese

Die Hauptspannungshypothese geht davon aus, dass für das Versagen des Materials die größte Normalspannung, die Hauptspannung, maßgeblich ist. Es gilt:

$$\boxed{\sigma_v^{VH} = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \tag{5.5}$$

Sie wird häufig in der Form

$$\sigma_v^{VH} = \frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_x + \sigma_y + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}\right] \tag{5.6}$$

angegeben Diese Hypothese, die auf Rankine (1861) und sogar auf Galilei (1564-1642) zurückgeht, liefert besonders für spröde Materialien zutreffende Ergebnisse.

5.4 Experimentell entwickelter Vergleichswert für Schweißnähte nach DIN 18800 (11.90)

In den vergangenen Jahrzehnten wurden umfangreiche Experimente durchgeführt, um das Versagen von Schweißnähten genauer erfassen zu können. Als Koordinatensystem dient die Richtung der Schweißnaht.

[1] Henri Édouard Tresca (* 12. Oktober 1814 in Dünkirchen; † 21. Juni 1885)

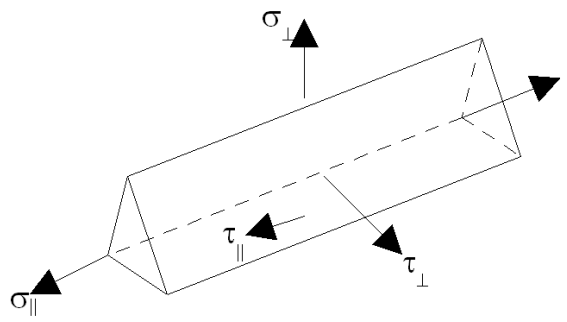


Abbildung 5.2: Spannungen in einer Schweißnaht

Es werden Normalspannungen parallel ($\sigma_{||}$) und senkrecht zur Schweißnaht ($\sigma_{\perp}$) und Schubspannungen $\tau_{||}$ und $\tau_{\perp}$ unterschieden, wobei sich $||$ und $\perp$ auf die Ausrichtung der Schweißnaht bezieht.
Um sich von den theoretisch abgeleiteten Vergleichsspannungen abzugrenzen, wird vom Vergleichswert $\sigma_{w,v}$ gesprochen.

$$\sigma_{w,v} = \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + \tau_{\perp}^2 + \tau_{||}^2} \tag{5.7}$$

Erstaunlich ist bei dieser experimentell gefundenen Formel, dass $\sigma_{||}$, die in Schweißnahtlängsrichtung wirkenden Normalspannungen, für die Festigkeit der Schweißverbindung ohne Einfluss sind.

Kapitel 6

Spannungen aus Biegung und Normalkraft

Im folgenden Kapitel soll (endlich) gezeigt werden, wie Spannungen bei Stäben aus aus Schnittgrößen ermittelt werden.
Es sollen folgende Voraussetzungen gelten:

- Der Stab habe einen über die Länge konstanten Querschnitt.
- Angreifende Schnittgrößen und die Querschnittsgeometrie sind im Hauptträgheitsachsensystem gegeben (Wenn der Querschnitt eine Symmetrieebene hat, und diese mit einer Koordinatenachse zusammenfällt, liegt ein Hauptachsensystem vor).
- Die Lastebene falle mit der Symmetrieebene überein.
- Die Stabachse sei im unbelasteten Zustand gerade.
- Die Querschnittsabmessungen (Höhe h, Breite b) seien klein gegenüber der Länge L. Als Anhalt kann dienen: $L > 5h$ und $L > 5b$.
- Der Querschnitt sei formtreu, d. h. er behält während der Verformung seine Querschnittsgestalt bei (aus einem Rechteckquerschnitt wird kein Parallelogramm). Diese Forderung wird gegebenenfalls durch Querschnittsschotte sichergestellt.
- Alle Querschnittsteile erfahren die gleiche Durchbiegung $w(x, z) = w(x)$
- Die Querschnitte bleiben während der Verformung eben, können sich aber Verdrehen.

Die letzte Annahme ist nach Jakob Bernoulli (1654-1704) *Bernoulli Hypothese* genannt. Sie gilt streng genommen für Querschnitte, die nur durch Biegemomente und nicht durch Querkräfte belastet sind. Unter der Einschränkung, dass die Querschnittsabmessungen klein gegenüber der Länge sind, stellt die daraus abgeleitete Theorie auch für querkraftbeanspruchte Stäbe eine gute Näherung dar.

Es wird von folgendem Koordinatensystem ausgegangen:

- x zeigt in Stabachse, die Verschiebung in x-Richtung heißt u
- z zeigt bevorzugt in Richtung der Schwerkraft, die Verschiebung in z-Richtung heißt w
- y bildet dazu ein Rechtssystem, so dass gilt: $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$, die Verschiebung in y-Richtung heißt v

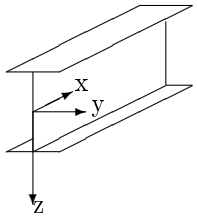


Abbildung 6.1: Koordinatensystem

6.1 Beanspruchung allein durch N

Die Integration der Spannung σ_x über den gesamten Querschnitt muss aus Gründen des Gleichgewichts die Normalkraft ergeben.

$$\int_A \sigma_x \, dA = N$$

Gleichzeitig müssen die Biegemomente M_y und M_z verschwinden. Das erreicht man, wenn die Normalspannungsverteilung konstant über den Querschnitt angenommen wird. Man erhält damit

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N}{A}} \tag{6.1}$$

6.2 Beanspruchung allein durch M_y

In diesem Abschnitt soll die Berechnung von Normalspannungen infolge eines Biegemoments M_y gezeigt werden.

Wenn ein ursprünglich gerader Balken mit konstanter Biegesteifigkeit von einem Biegemoment M_y belastet wird, so nimmt er die Form eines Kreisbogens an. In Abb. 6.2 ist A der Krümmungsmittelpunkt, ρ der Krümmungsradius. In Abb.6.3 ist ein differentielles Element mit dem Krümmungswinkel $d\alpha$ dargestellt, das gedanklich aus dem Balken heraus getrennt wurde. Die obere Faser des Balkens wird gestaucht, die untere gedehnt, während die Stabachse ihre ursprüngliche Länge beibehält. Die z-Koordinate beginnt in der Stabachse und zeigt nach unten. Eine Parallele zum rechten Rand wird an den linken Rand verschoben dargestellt. Man erkennt, dass eine Faser in der Höhe z um $\Delta l = d\alpha \; z$ länger geworden ist.

Die gekrümmte Stabachse hat die Länge $\rho \cdot d\alpha$. Das ist die „alte Länge“ (l_0). Damit kann man die Dehnung in jeder Höhe z angeben:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{z\ d\alpha}{\rho\ d\alpha} = \frac{z}{\rho} \tag{6.2}$$

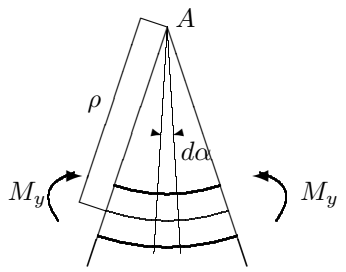


Abbildung 6.2: Biegelinie eines Stabes unter Biegemoment M_y

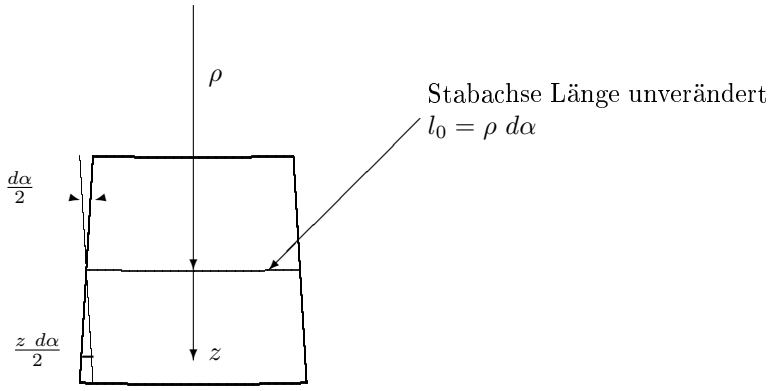


Abbildung 6.3: Differentielles Element

Mit dem Hooke'schen Gesetz und Gleichung 6.2 kann man auf die Spannungen schließen:

$$\sigma_x = E\ \varepsilon_x = E\ \frac{z}{\rho} \tag{6.3}$$

Man erkennt, dass die Spannungen linear über z verlaufen. Da die Normalkraft vereinbarungsgemäß verschwinden muss, gilt:

$$\int_A \sigma_x dA = 0 = \int_A E\ \frac{z}{\rho} dA$$

Der Elastizitätsmodul und auch der Krümmungsradius sind von der Koordinate z unabhängig und können vor das Integral gezogen werden:

$$\frac{E}{\rho} \int_A z dA = 0$$

Da weder E noch ρ stets Null sind, muss das Integral verschwinden. Der Ausdruck unter dem Integral ist das Statische Moment S_y, eine Querschnittsgröße, die nur dann zu Null wird, wenn der Ursprung des Koordinatensystem im Schwerpunkt liegt. Darum wird nun vereinbart, den Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt zu legen.

Aus Gründen des Gleichgewichts muss gelten:

$$\int_A \sigma_x z dA = M_y \tag{6.4}$$

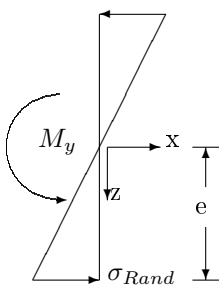


Abbildung 6.4: σ_x über z

σ_x ist eine lineare Funktion von z, die am Ursprung den Funktionswert Null hat.

Die Funktion

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{Rand}}{e}\ z \tag{6.5}$$

erfüllt diese Forderung. σ_{Rand} ist der Funktionswert der Normalspannung am unteren Rande bei z_{max}= e, dem Abstand vom Ursprung zum unteren Rand. Setzt man Gleichung 6.5 in Gleichung 6.4 ein, so erhält man:

$$\int_A \frac{\sigma_{Rand}}{e}\ z\ z\ dA = M_y = \frac{\sigma_{Rand}}{e} \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I_y} \tag{6.6}$$

Das Integral

$$\boxed{\int_A z^2 dA = I_y}$$

wird axiales Flächenträgheitsmoment oder Flächenmoment 2. Ordnung genannt. Durch Umstellung erhält man aus Gleichung 6.6:

$$\sigma_{Rand} = \frac{M_y}{I_y}\ e \tag{6.7}$$

Der Ausdruck $\frac{I_y}{e}$ wird Widerstandsmoment

$$W_y = \frac{I_y}{e}$$

genannt und ist bei symmetrischen Querschnitten oft in Tabellen angegeben. Damit erhält man für die Normalspannung am Rand:

$$\sigma_{Rand} = \frac{M_y}{W_y}$$

Wenn man Gleichung 6.7 in Gleichung 6.5 einführt kann man die Normalspannung σ_x an jeder Stelle x bestimmen:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z} \tag{6.8}$$

6.3 Beanspruchung allein durch M_z

Auch ein Biegemoment M_z erzeugt Normalspannungen σ_x.
Der Drehsinn des Biegemoments M_z richtet sich nach der Definition der Schnittgrößen: am positiven Ufer wirken sie in positive Koordinatenrichtung, d.h. von x nach y. Die positiven Spannungen $\int \sigma_x \; y \; dA$ erzeugen ein Moment, dessen Drehsinn in die negative y-Richtung zeigt (Abb. 6.5). Damit gilt für das Biegemoment M_z:

$$M_z = -\int_A \sigma_x \; y dA \tag{6.9}$$

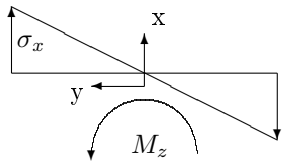


Abbildung 6.5: σ_x über y

Analog zum Biegemoment M_y ergeben sich die Normalspannungen aus einem Biegemoment M_z zu:

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \; y}$$

mit dem Flächenträgheitsmoment

$$\boxed{I_z = \int_A y^2 dA} \tag{6.10}$$

6.4 Beanspruchung durch N, M_y und M_z

Bei linearem Materialgesetz gilt das **Superpositionsgesetz**:
die Anteile der Spannungen aus den einzelnen Beanspruchungen können addiert werden, somit gilt:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}\, z - \frac{M_z}{I_z} y} \tag{6.11}$$

Die extremalen Spannungen treten an den Eckpunkten der Umhüllenden des Querschnitts auf.
Ist das Koordinatensystem, in dem die Belastungen gegeben sind, oder das Koordinatensystem, das den Querschnitt beschreibt, kein Hauptträgheitssystem, so müssen sowohl die Schnittgrößen als auch die Koordinaten der Eckpunkte der Umhüllenden des Querschnitts in das Hauptträgheitssystem transformiert werden.

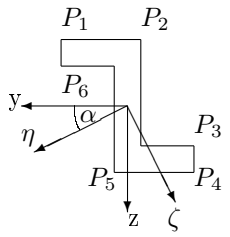


Abbildung 6.6: Querschnitt nicht im Hauptachsensystem

In Abb. 6.6 ist α der Winkel von der y-Achse zur η-Achse.
Die Biegemomente werden wie folgt transformiert:

$$\begin{bmatrix} M_\eta \\ M_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

Die Koordinaten P_{ix} und P_{iy} der Eckpunkte transformiert man mit der Vorschrift:

$$\begin{bmatrix} P_{i,\eta} & P_{i+1,\eta} \\ P_{i,\zeta} & P_{i+1,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i,y} & P_{i+1,y} \\ P_{i,z} & P_{i+1,z} \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

6.4.1 Die Große Biegeformel

In diesem Kapitel soll die Ermittlung von Normalspannungen aus Biegemomenten und einer Normalkraft in einem Koordinatensystem gezeigt werden, dessen Ursprung zwar im Schwerpunkt liegt, das aber kein Hauptachsensystem ist.

Die Transformation der Biegemomente und besonders der Geometrie auf das Hauptachsensystem ist arbeitsaufwändig und fehleranfällig, daher ist es oft von Vorteil die Normalspannungen direkt ohne Transformation berechnen zu können.

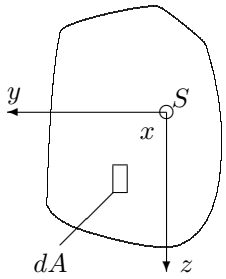


Abbildung 6.7: Große Biegeformel

Wie in den vorhergehenden Ausführungen wird vorausgesetzt, dass die Spannungen linear über den Querschnitt verteilt sind.

Macht man einen entsprechenden Ansatz,

$$\sigma_x(y,z) = a + b \cdot y + c \cdot z$$

so müssen die Integrale

$$\int_A \sigma_x dA \;=\; N$$

$$\int_A \sigma_x \cdot z dA \;=\; M_y$$

$$\int_A -\sigma_x \cdot y dA \;=\; M_z$$

die entsprechenden Schnittgrößen ergeben.

Setzt man den Ansatz

$$\sigma_x(y,z) = a + b \cdot y + c \cdot z$$

für N ein, so erhält man:

$$\int_A (a + b \cdot y + c \cdot z) dA \;=\; a \cdot A + b \int_A y \; dA + c \int_A z \; dA \;=\; N$$

die Integrale $\int_A y\ dA$ und $\int_A z\ dA$ werden statische Momente S_y bzw. S_z genannt.
Sie verschwinden, wenn der Ursprung des Koordinatensystems mit dem Schwerpunkt zusammenfällt.

Somit gilt:

$$a \cdot A \ = \ N$$

und daraus ergibt sich:

$$a \ = \ \frac{N}{A}$$

Für a ist demnach $\frac{N}{A}$ einzusetzen.

Nun soll der gleiche Weg mit $\int_A \sigma_x \cdot z\ dA \ = \ M_y$ beschritten werden:

$$\int_A (a + b \cdot y + c \cdot z) \cdot z\ dA \ = \ a \underbrace{\int_A z\ dA}_{S_y=0} + b \int_A y\ z\ dA + c \int_A z^2 dA \ = \ M_y$$

Das erste Integral ist wieder ein statisches Moment, das zu Null wird. Das zweite Integral ist ein Flächenmoment zweiter Ordnung; es wird Deviationsmoment I_{yz} genannt.

$$\boxed{I_{yz} \ = \ -\int y\ z\ dA}$$

Das Deviationsmoment verschwindet wenn das beschreibende Koordinatensystem ein Hauptachsensystem ist.
Auch das dritte Integral ist ein Flächenmoment zweiter Ordnung, das schon bekannte Flächenträgheitsmoment

$$I_y \ = \ \int_A z^2 dA$$

Somit liefert die zweite Gleichung:

$$-b \cdot I_{yz} + c \cdot I_y \ = \ M_y$$

Nun soll der gleiche Weg für $\int_A -\sigma_x \cdot y\ dA \ = \ M_z$ beschritten werden:

Für das Biegemoment M_z schreibt man:

$$M_z \ = \ -\int_A (a + b \cdot y + c \cdot z) \cdot y\ dA \ = \ -a \int_A y\ dA - b \int_A y^2 dA - c \int_A y\ z\ dA$$

Das erste Integral ist das statische Moment S_z, das zweite Integral das Flächenträgheitsmoment

$$I_z \ = \ \int_A y^2 dA$$

Das dritte Integral ist wieder das Deviationsmoment.

Somit erhält man aus der dritten Gleichung:

$$-b \cdot I_z - c \cdot (-I_{yz}) \;=\; M_z$$

Für die Bestimmung von b und c stehen zwei lineare Gleichungen zur Verfügung, die man zum Gleichungssystem zusammenfassen kann:

$$\begin{bmatrix} -I_{yz} & I_y \\ -I_z & I_{yz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Die Lösungen bestimmt man mit der Cramerschen Regel:

$$b \;=\; \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$c \;=\; \frac{-I_{yz} M_z - (-I_z) M_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \;=\; \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

Nun sind die Koeffizienten a, b und c bekannt.

Eingesetzt in $\sigma_x(y,z) = a + b \cdot y + c \cdot z$ ergibt sich die Normalspannung:

$$\boxed{\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y I_{yz} - M_z I_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \cdot z} \tag{6.14}$$

Diese Beziehung wird auch die **große Biegeformel** (GBF) oder lange Biegeformel genannt.

6.4.2 Biegung stark gekrümmter Stäbe

In den bisherigen Ausführungen ist davon ausgegangen worden, dass die Achse des Stabes gerade, oder wenigstens abschnittsweise gerade oder nur schwach gekrümmt ist. Nun sollen die Biegespannungen bei einem stark gekrümmten Stab (z.B. Kranhaken) mit konstantem Querschnitt untersucht werden [1].

- Es wird weiterhin davon ausgegangen, dass die Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte gültig ist,
- dass das Hooke'sche Gesetz gültig ist,
- dass das System in den Hauptachsen beschrieben ist.
- Biegemoment und Normalkraft werden nicht auf den Schwerpunkt der Querschnittsfläche, sondern auf die (noch unbekannte) Dehnungsmulllinie des nur durch ein Biegemoment belasteten Stabes bezogen.

In der Skizze ist ein differentielles Stück mit dem Winkel $d\varphi$ des gekrümmten Stabes gezeigt.
Die Bezeichnungen sind:

R_s: Abstand vom Krümmungsmittelpunkt zum Flächenschwerpunkt des gekrümmten Stabes

R: Abstand vom Krümmungsmittelpunkt zur Spannungs-und Dehnungsnulllinie des gekrümmten Stabes

ρ: Koordinate beginnend an Krümungsmittelpunkt

z: Koordinate in ρ-Richtung, jedoch beginnend an der Spannungsnulllinie ($z = \rho - R$)

[1] nach Leipholz S. 60 ff

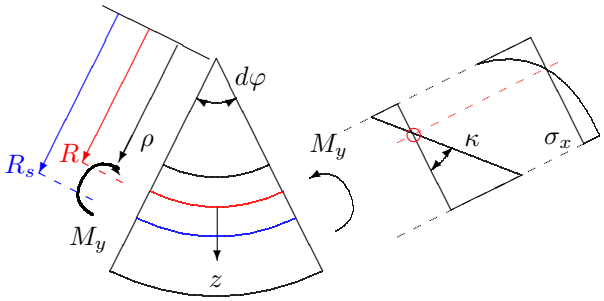


Abbildung 6.8: Biegung des gekrümmten Stabes

Bestimmung vom R

Infolge der Wirkung des Biegemoments stehen zwei normal auf der Stabachse angeordnete Querschnitte, die vor der Belastung im Winkel von $d\varphi$ zueinander standen, unter der unter der Wirkung von M im Winkel von $d\varphi + \kappa$ zueinander. Die z-Achse beginnt, wie schon erwähnt, an der noch unbekannten Dehnung- und Spannungsnulllinie.
Die ursprüngliche Länge einer Faser beträgt $\ell_0 = \rho\ d\varphi$, die Verlängerung der gleichen Faser beträgt $\Delta\ell = z\ \kappa$. Die Dehnung beträgt damit:

$$\varepsilon = \frac{z\ \kappa}{\rho\ d\varphi}$$

nämlich Verlängerung $z\ \kappa$ dividiert durch alte Länge der Faser $\rho\ d\varphi$.
Bei Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes kann die Spannung angegeben werden:

$$\sigma = E\ \varepsilon = E\ \frac{z\ \kappa}{\rho\ d\varphi} \tag{6.15}$$

Wegen der Bedingung, dass der Stab nicht durch Normalkraft belastet ist, kann angeschrieben werden:

$$N = \int \sigma dA = \int E\ \frac{z\ \kappa}{\rho\ d\varphi}\ dA = \frac{E\ \kappa}{d\varphi}\ \int \frac{z}{\rho} dA = 0 \tag{6.16}$$

Nun wird die Koordinate z in ρ überführt:

$$z = \rho - R$$

und man erhält:

$$\frac{E\ \kappa}{d\varphi}\ \int \frac{\rho - R}{\rho}\ dA = 0 = \underbrace{\int dA}_{A} - \int \frac{R}{\rho} dA$$

$$R \int \frac{1}{\rho}\ dA - A = 0 \tag{6.17}$$

Damit kann die Höhe der Nulllinie bestimmt werden:

$$\boxed{R = \frac{A}{\int \frac{dA}{\rho}}} \tag{6.18}$$

Bestimmung der Dehnsteifigkeit und ε_{x0}

Nachdem die Höhe der Dehnungsnulllinie und damit auch R bekannt ist, kann für die Dehnung ε_x angegeben werden:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0}\ \frac{R}{\rho} + \kappa\ z\ \frac{R}{\rho} \tag{6.19}$$

Der Term $\frac{R}{\rho}$ stellt die Veränderung der „alten Länge“ im Verhältnis zur „alten Länge“ in der Höhe der Dehungsnulllinie dar.
Die Normalkraft ergibt sich zu:

$$N = \int \sigma_x\ dA = \int E\ \varepsilon_x\ dA \tag{6.20}$$

bei konstantem Elastizitätsmodul kann E vor das Integral gezogen werden:

$$N = E \int \left(\varepsilon_{x0}\ \frac{R}{\rho} + \kappa\ z\ \frac{R}{\rho}\right)\ dA \tag{6.21}$$

Das Integral besteht aus zwei Summanden, der zweite verschwindet wegen Gleichung 6.17. Der erste ergibt:

$$N = E \int \varepsilon_{x0}\ \frac{R}{\rho}\ dA = \varepsilon_{x0}\ \underbrace{E\ R \int \frac{1}{\rho}\ dA}_{EA} \tag{6.22}$$

worin das Integral die verallgemeinerte Dehnsteifigkeit EA ist.
Damit ist

$$\varepsilon_{x0} = \frac{N}{EA} \tag{6.23}$$

Bestimmung der Biegesteifigkeit und κ

Das Biegemoment M ergibt sich zu:

$$M_y = \int \sigma_x\ z\ dA = E \int \varepsilon_x\ z\ dA \tag{6.24}$$

$$M_y = E \int \left(\varepsilon_{x0}\ \frac{R}{\rho}\ z + \kappa\ z^2\ \frac{R}{\rho}\right)\ dA \tag{6.25}$$

Diesmal verschwindet der erste Summand wegen Gleichung 6.17, der zweite ergibt:

$$M_y = \kappa\ E\ R \int z^2\ \frac{1}{\rho}\ dA \tag{6.26}$$

Mit $z = \rho - R$ erhält man:

$$M_y = \kappa\ E\ R \int \frac{\rho^2 - 2\ \rho\ R + R^2}{\rho}\ dA \tag{6.27}$$

durch Umstellung gewinnt man:

$$M_y = \kappa\ \underbrace{E\ R \int \left(\rho - 2\ R + \frac{R^2}{\rho}\right)\ dA}_{EJ} \tag{6.28}$$

Die verallgemeinerte Biegesteifigkeit EJ liefert dann die Krümmung:

$$\boxed{\kappa = \frac{M_y}{EJ}} \tag{6.29}$$

Bestimmung der Normalspannungen

Damit können die Normalspannungen bestimmt werden:

$$\sigma_x = E\ \varepsilon_x = E\ \left(\varepsilon_{x0}\ \frac{R}{\rho} + \kappa\ (\rho - R)\ \frac{R}{\rho}\right) \tag{6.30}$$

Der Verlauf der Normalspannung σ ist hyperbolisch. Die Spannungsnulllinie liegt nicht im Flächenschwerpunkt wie es bei ungekrümmten allein biegebeanspruchte Stäben der Fall ist.

Beispiel

Ein rechteckiger stark gekrümmter Stab sei durch ein Biegemoment $M = -90\ Nm$ beansprucht. Die Querschnittsfläche betrage $h = 20mm$, $b = 10mm$ Der Innenradius R_i betrage $R_i = 10mm$.
Der Radius der Spannungsnullinie R wird nach Gleichung 6.18 bestimmt:

$$\boxed{R = \frac{A}{\int \frac{dA}{\rho}}}$$

Mit dem Inkement der Fläche

$$dA = b\ d\rho$$

und der Querschnittsfläche

$$A = b\ h$$

ergibt sich :

$$R = \frac{b\ h}{\int_{R_i}^{R_a} b\ \frac{d\rho}{\rho}} = \frac{h}{\ln \frac{R_a}{R_i}} = \frac{20mm}{\ln \frac{30mm}{10mm}} = 18.2mm$$

Die Dehnsteifigkeit, (die in dieser Aufgabe nicht erforderlich ist) ergibt sich zu

$$EA = 4.2\ 10^{12}\ N$$

und die Biegesteifigkeit zu

$$EJ = 1.3726\ 10^{15}\ Nmm^2$$

Die sich daraus ergebenden Spannungen sind in Abb 6.9 dargestellt und der Lösung nach der Biegetheorie des geraden Stabes gegenübergestellt. Der Einfluß der Krümmung ist deutlich zu erkennen. Am Innenrand kommt des zu höheren, am Aussenrand zu kleineren Spannungen als beim geraden Stab.

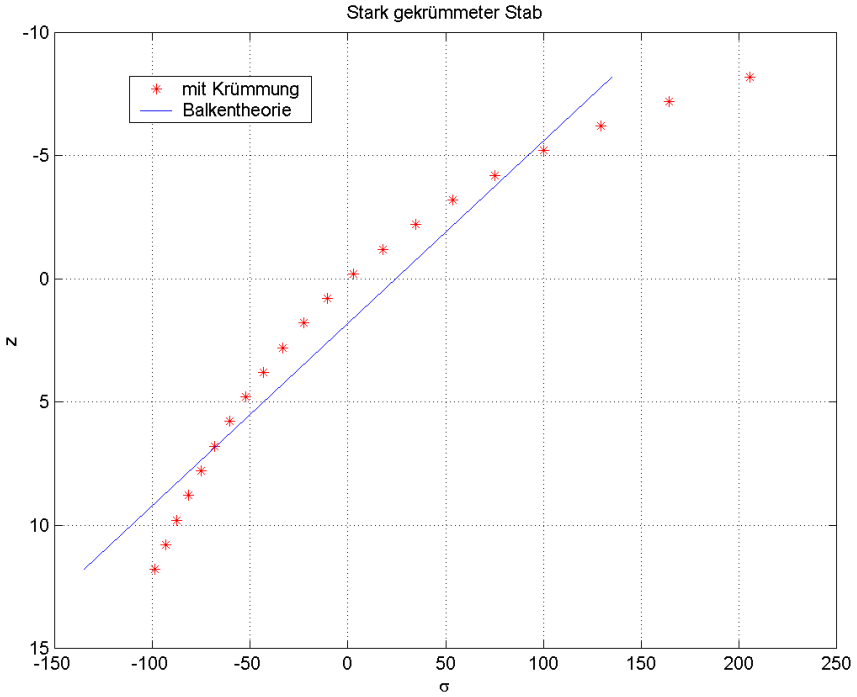


Abbildung 6.9: Biegungspannung des gekrümmten Stabes

6.5 Normalspannungen σ_x von Verbundquerschnitten mit verschiedenen E-Moduln

Wie der Name vermuten lässt, wirken bei Verbundquerschnitten verschiedene Werkstoffe miteinander. Die Verbindungsfuge kann Schubspannungen übertragen und sichert das Zusammenwirken. Es wird davon ausgegangen, dass verschiedene aber abschnittsweise konstante E-Moduln im Querschnitt vorhanden sind.

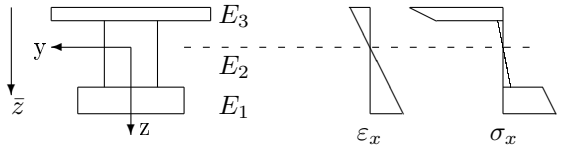


Abbildung 6.10: Verbundquerschnitt

Wie beim Querschnitt mit konstanten E-Modul kann, Balkenverhältnisse vorausgesetzt, vom Ebenbleiben der Querschnitte ausgegangen werden, weiterhin wird die Gültigkeit es Hooke'schen Gesetztes vorausgesetzt. Dann liegt ein abschnittsweise linearer Spannungsverlauf über die z-Koordinate vor. Im Gegensatz zu einem Querschnitt mit konstantem E-Modul muss bei Querschnitten mit verschiedenen E-Moduln der Koordinatenursprung im gewichteten Schwerpunkt liegen. Wenn der Querschnitt auch hinsichtlich der E-Moduln symmetrisch ist, liegt auch der gewichtete Schwerpunkt auf der Symmetrieachse.

6.5.1 Der gewichtete Schwerpunkt

Um diesen gewichteten Schwerpunkt zu bestimmen, wird eine willkürliche Koordinate $\bar{z}$ festgelegt.
Der kinematische Zusammenhang zwischen Verschiebung und Dehnung wird durch folgendes Bild dargestellt:

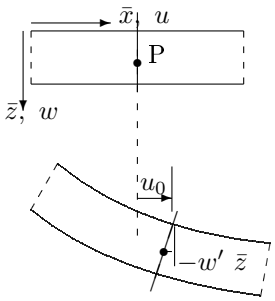


Abbildung 6.11: Kinematik des Verbundquerschnitts

Bezogen auf das willkürliche Koordinatensystem $\bar{x} - \bar{z}$ erfährt ein Punkt P die Verschiebung in x-Richtung

$$u = u_0 - w'\ \bar{z} \tag{6.31}$$

Die Dehnung ε_x wir dann:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_0' - w''\bar{z} \tag{6.32}$$

Die Normalspannung σ_x wird mit dem Hooke'sche Gesetz $\sigma_x = E\varepsilon_x$ bestimmt:

$$\sigma_x = E\ u_0' - E\ w''\bar{z} \tag{6.33}$$

Die Normalkraft ergibt sich damit zu:

$$N = \int \sigma_x\ dA = \underbrace{\int E\ u_0' dA}_{N} - \underbrace{\int E\ w''\bar{z}\ dA}_{0} \tag{6.34}$$

Während das erste Integral bereits vollständig die Normalkraft ergibt, muss das zweite Integral verschwinden, da die Krümmung keinen Anteil an der Normalkraft erbringt.
Nun wird davon Gebrauch gemacht, dass der Elastizitätsmodul abschnittsweise konstant ist, damit kann das Integral in eine Summe verwandelt werden, $\bar{z}_i$ bezeichnet die Koordinate des Schwerpunktes des Einzelteils.

$$0 = \int E\ w''\bar{z}\ dA = w''\ \sum E_i\ A_i\ \bar{z}_i \tag{6.35}$$

Um welches Maß $\bar{z}_s$ muss das willkürliche Koordinatensystem verschoben werden, um Gleichung 6.35 zu erfüllen? Die auf den gewichteten Schwerpunkt bezogenen Koordinaten werden mit z_i bezeichnet. Es wird die Transformation

$$z_i = \bar{z}_i - \bar{z}_s \tag{6.36}$$

eingeführt.

$$\sum E_i\ A_i\ (\bar{z}_i - \bar{z}_s) -> \sum E_i\ A_i\ \bar{z}_i = \sum E_i\ A_i\ \bar{z}_s \tag{6.37}$$

Der Schwerpunkt liegt damit bei

$$\boxed{\bar{z}_s = \frac{\sum E_i\ A_i\ \bar{z}_i}{\sum E_i A_i}} \tag{6.38}$$

6.5.2 Spannungen aus Normalkraft

Aus Gleichung 6.34 ist bekannt:

$$N = \int \sigma_x\ dA = \int E\ \varepsilon_{x0}\ dA = \varepsilon_{x0} \sum E_i\ A_i = \frac{\sigma_{xk}}{E_k} \sum E_i\ A_i$$

$$\boxed{\sigma_{xk} = E_k \frac{N}{\sum E_i\ A_i}} \tag{6.39}$$

6.5.3 Spannungen aus dem Biegemoment

Das Biegemoment M_y ergibt sich zu:

$$M_y = \int \sigma_x\ z dA \tag{6.40}$$

Die Koordinate z ist im Sinne des gewichteten Schwerpunkts zu verstehen. Mit dem Hooke'schen Gesetz und mit Gleichung 6.32

$$\varepsilon_x = u_0' - w''\ z$$

erhält man

$$M_y = \int E\ u_0' z\ dA - \int E\ w''\ z^2\ dA$$

Das erste Integral wird wegen Gleichung 6.35 zu Null, somit bleibt das zweite Integral:

$$M_y = -w''\ \int E\ z^2\ dA$$

Das Integral wird zur Summe gewandelt:

$$\int E\ z^2 dA = \sum E_i\ J_{yi}$$

$$M_y = -w''\ \sum E_i\ J_{yi} -> \ -w'' = \frac{M_y}{\sum E_i\ J_{yi}}$$

mit

$$\sigma_x = E_k \varepsilon_x$$

und

$$\varepsilon = -w''\ z = \frac{M_y}{\sum E_i\ J_{yi}} z$$

erhält man:

$$\boxed{\sigma_x = E_k\ \frac{M_y}{\sum E_i\ J_{yi}} z} \tag{6.41}$$

Kapitel 7

Flächenmomente

7.1 Flächenmomente 1. Ordnung, statische Momente

Für die Berechnung der Normalspannungen aus Biegung sind Flächenmomente notwendig.
Im Folgenden sollen Hilfsmittel zu ihrer Berechnung bereitgestellt werden.

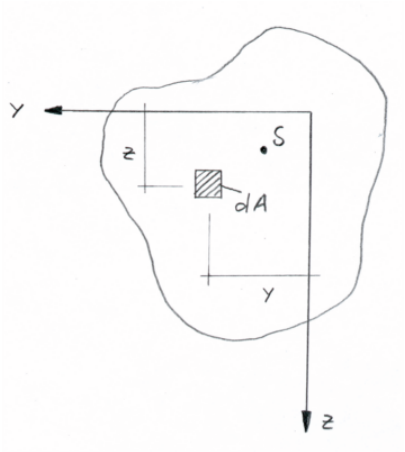


Abbildung 7.1: Flächenmomente 1. Ordnung

Das Statische Moment ist ein Flächenmoment 1. Ordnung.

Es ist das Produkt aus der Fläche und dem Abstand zur Bezugsachse.
Das Statische Moment um die y – Achse hat den Abstand z,
das Statische Moment um die z – Achse den Abstand y.

Somit ergibt sich:

$$S_y = \int_A z \, dA \quad , \quad S_z = \int_A y \, dA \tag{7.1}$$

Die Dimension der Statischen Momente ist Länge^3, eine gebräuchliche Einheit ist cm^3.
Man kann sich die Fläche eines Querschnittes in seinen Schwerpunkt konzentriert vorstellen.

Damit gilt auch:

$$S_y = A \cdot z_S \quad , \quad S_z = A \cdot y_S \tag{7.2}$$

mit den Koordinaten y_S und z_S des Schwerpunktes.

Wenn das Koordinatensystem bereits im Schwerpunkt liegt, werden $y_S = 0$ und $z_S = 0$ und die Statischen Momente S_y und S_z verschwinden.

Diesen Zusammenhang (7.1) und (7.2)kann man auch benutzen, um die Schwerpunktskoordinaten zu bestimmen.

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{S_z}{A} = \frac{\int_A y \, dA}{A} \\ z_S &= \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A z \, dA}{A} \end{aligned} \tag{7.3}$$

Oft ist ein Querschnitt aus mehreren Teilflächen zusammengesetzt, deren Schwerpunktslage bekannt ist.

Dann können die Statischen Momente mit

$$\begin{aligned} S_y &= \sum_i A_i \cdot z_{Si} \\ S_z &= \sum_i A_i \cdot y_{Si} \end{aligned} \tag{7.4}$$

bestimmt werden.

z_{Si} und y_{Si} sind die Schwerpunktskoordinaten der Teilflächen.

Der Schwerpunkt des Gesamtquerschnittes ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
y_S &= \frac{S_z}{A} \\
z_S &= \frac{S_y}{A}
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

mit $A = \sum_i A_i$ der Fläche des Gesamtquerschnittes.

7.2 Flächenmomente 2. Ordnung

Bei der Ermittlung der Normalspannungen bei Stäben infolge von Biegemomenten sind die Flächenträgheitsmomente

$$
\begin{aligned}
I_y &= \int_A z^2 dA && \text{Trägheitsmoment um die } y\text{-Achse} \\
I_z &= \int_A y^2 dA && \text{Trägheitsmoment um die } z\text{-Achse} \\
I_{yz} &= -\int yz\ dA && \text{Deviationsmoment}
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

erforderlich.

Ein weiteres Flächenträgheitsmoment ist das polare Trägheitsmoment.

$$
I_P = \int_A r^2 dA \tag{7.7}
$$

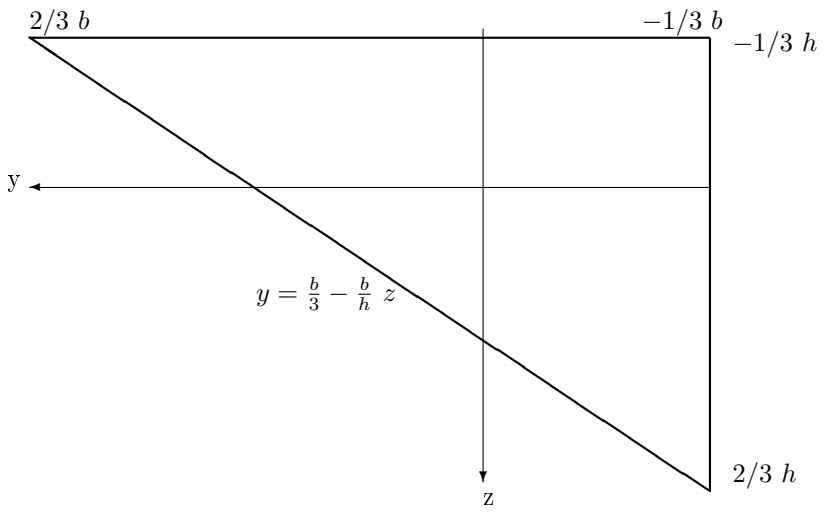
mit $r^2 = y^2 + z^2$ wird daraus:

$$
I_P = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y \tag{7.8}
$$

Die Dimension der Flächenträgheitsmomente zweiter Ordnung ist Länge^4. Eine gebräuchliche Einheit ist cm^4. Flächenträgheitsmomente für Normprofile sind in Tabellenbüchern angegeben.

7.2.1 Flächenmomente für ein rechtwinkliges Dreieck

Für das dargestellte rechtwinklige Dreieck mit der Breite b und der Höhe h sollen die Flächenmomente bestimmt werden. Das Koordinatensystem ist im Schwerpunkt angeordnet.



Flächenträgheitsmoment um die y-Achse

Das Flächenträgheitsmoment um die y-Achse ist:

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

das Flächendifferential dA wird durch

$$dA = \bar{b}(z)\ dz$$

ersetzt. Die von der Höhe abhängige lokale Breite wird zur Unterscheidung mit $\bar{b}$ bezeichnet. Damit gilt:

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_h z^2\ \bar{b}\ dz$$

Der funktionelle Zusammenhang mit z lautet:

$$\bar{b} = \frac{b}{h}\ (\frac{2}{3}h - z)$$

und damit ergibt sich für I_y:

$$I_y = \int_z z^2\ \frac{b}{h}\ (\frac{2}{3}h - z)dz$$

$$I_y = \int_{z=-\frac{1}{3}h}^{z=\frac{2}{3}h} \frac{b}{h}\ (\frac{2}{3}h\ z^2 - z^3)dz$$

Die Auswertung des Integrals liefert:

$$I_y = \left[\frac{b}{h}\ (\frac{2}{9}h\ z^3 - \frac{1}{4}z^4)\right]_{z=-\frac{1}{3}h}^{z=\frac{2}{3}h}$$

Das Einsetzen der Grenzen liefert:

$$\boxed{I_y = \frac{b\ h^3}{36}}$$

Flächenträgheitsmoment um die z-Achse

Das Flächenträgheitsmoment um die z-Achse wird analog berechnet. Es wird nur das Ergebnis angegeben:

$$\boxed{I_z = \int_A y^2 dA = \frac{b^3\ h}{36}}$$

Deviationsmoment

Das Deviationsmoment ist definiert durch:

$$J_{yz} = -\int_A y\ z$$

Mit

$$dA = dy\ dz$$

wird daraus ein Doppelintegral:

$$J_{yz} = -\int_{z=-\frac{1}{3}h}^{z=\frac{2}{3}h} \int_{y=-\frac{1}{3}b}^{y=\frac{1}{3}b-\frac{b}{h}\ z} y\ z\ dy\ dz \tag{7.9}$$

die Ausführung des inneren Integrals liefert:

$$J_{yz} = -\int_{z=-\frac{1}{3}h}^{z=\frac{2}{3}h} z\ \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-1/3b}^{b/3-b/h\ z} dz \tag{7.10}$$

Einsetzen der Grenzen:

$$J_{yz} = -\int_{z=-\frac{1}{3}h}^{z=\frac{2}{3}h} z\ \frac{1}{2}\left[(\frac{b}{3} - \frac{b}{h}\ z)^2 - (-\frac{1}{3}b)^2\right]\ dz \tag{7.11}$$

$$J_{yz} = -\int_{z=-\frac{1}{3}h}^{z=\frac{2}{3}h} z\ \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{3^2} - \frac{2}{3}\frac{b^2}{h}\ z + \frac{b^2}{h^2}\ z^2 - \frac{b^2}{3^2}\right]\ dz \tag{7.12}$$

$$J_{yz} = -\int_{z=-\frac{1}{3}h}^{z=\frac{2}{3}h} z\ \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}\frac{b^2}{h}\ z + \frac{b^2}{h^2}\ z^2\right]\ dz \tag{7.13}$$

z wird in die Klammer gezogen

$$J_{yz} = -\int_{z=-\frac{1}{3}h}^{z=\frac{2}{3}h} \left[-\frac{1}{3}\frac{b^2}{h}\ z^2 + \frac{1}{2}\frac{b^2}{h^2}\ z^3\right]\ dz \tag{7.14}$$

und die Integration ausgeführt:

$$J_{yz} = -\left[-\frac{1}{3^2}\frac{b^2}{h}\ z^3 + \frac{1}{2\times 4}\ \frac{b^2}{h^2}\ z^4\right]_{z=-\frac{1}{3}h}^{z=\frac{2}{3}h} \tag{7.15}$$

Das Einsetzen der Grenzen liefert:

$$J_{yz} = -\left[-\frac{1}{9}\frac{b^2}{h}\,\frac{8}{27}h^3 + \frac{1}{8}\frac{b^2}{h^2}\,\frac{16}{81}h^4 - \left[-\frac{1}{9}\frac{b^2}{h}(-\frac{1}{27})h^3 + \frac{1}{8}\frac{b^2}{h^2}\frac{1}{81}h^4\right]\right] \tag{7.16}$$

$b^2\ h^2$ wird ausgeklammert:

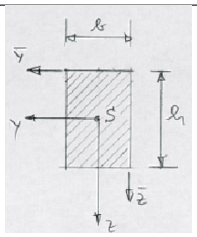
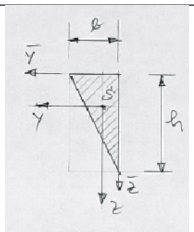
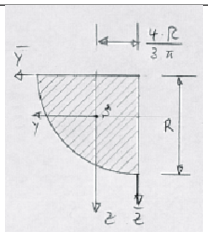
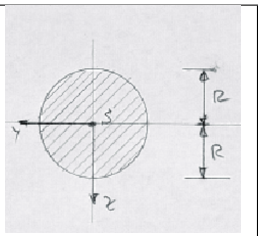
$$J_{yz} = -b^2\ h^2\left[-\frac{1}{9}\,\frac{8}{27} + \frac{1}{8}\,\frac{16}{81} - \left[-\frac{1}{9}(-\frac{1}{27}) + \frac{1}{8}\,\frac{1}{81}\right]\right] \tag{7.17}$$

und auf den gemeinsamen Hauptnenner erweitert:

$$J_{yz} = -b^2\ h^2\frac{-8\times 8 + 3\times 16 - 8\times 1 - 1\times 3}{3\times 8\times 81} \tag{7.18}$$

$$J_{yz} = \frac{1}{72}\ b^2\ h^2 \tag{7.19}$$

Flächenmomente wichtiger Querschnitte

				
J_y	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\left[\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right] R^4$	$\frac{\pi}{4}R^4$
J_z	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{b^3h}{36}$	$\left[\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right] R^4$	$\frac{\pi}{4}R^4$
$J_{\bar{y}}$	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{\pi}{16}R^4$	
$J_{\bar{z}}$	$\frac{b^3h}{3}$	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{\pi}{16}R^4$	
J_{yz}	0	$\frac{b^2h^2}{72}$	$\left[\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right] R^4$	0
$J_{\bar{y}\bar{z}}$	$-\frac{b^2h^2}{4}$	$-\frac{b^2h^2}{24}$	$-\frac{R^4}{8}$	

7.3 Transformation des Koordinatensystems

Häufig sind die Querschnittsflächen aus Einzelflächen zusammengesetzt, deren Flächenmomente bekannt sind. Dann ist es gut, wenn man eine Methode hat, die die Flächenmomente von einem Koordinatensystem in ein anders zu transformieren, das heißt zu verschieben und gegebenenfalls zu drehen.

7.3.1 Translation des Koordinatensystems

Die Berechnung der Flächenmomente auf ein verschobenes Koordinatensystem wird nach dem **Satz von Steiner**[1] durchgeführt, der nun hergeleitet werden soll.

[1] Jakob Steiner (* 18. März 1796 in Utzenstorf; † 1. April 1863 in Bern), Schweizer Mathematiker

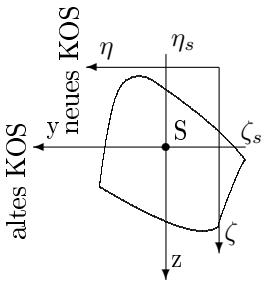


Abbildung 7.2: Translation des Koodinatensystems

In Abbildung 7.2 ist die Fläche, das im Schwerpunkt liegende alte und das neue Koordinatensystem dargestellt. Die Koordinaten des Schwerpunktes im $\eta - \zeta$-System sind η_s und ζ_s. Die Fläche A, die Flächenmomente I_y, I_z und I_{yz} sind, erkennbar am Index, bezogen auf das in Schwerpunkt liegende alte Koordinatensystem bekannt. Zwischen den Koordinatensystemen besteht die Beziehung

$$\eta = y + \eta_s$$

$$\zeta = z + \zeta_s \tag{7.20}$$

Das Flächenträgheitsmoment bezogen auf das $\eta - \zeta$-System errechnet sich nach:

$$I_\eta = \int_A \zeta^2 dA$$

Nun wird die Transformationsbeziehung Gleichung 7.20 eingesetzt:

$$I_\eta = \int_A (z + \zeta_s)^2 dA$$

und der binomische Ausdruck ausmultipliziert:

$$I_\eta = \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I_y} + \underbrace{\int_A 2\ z\ \zeta_s dA}_{2\zeta_s \int_A z dA} + \underbrace{\int_A \zeta_s^2 dA}_{\zeta^2\ A}$$

Der erste Summand ergibt das Flächenträgheitsmoment I_y bezogen auf die y-Achse, der dritte Summand ergibt das Produkt aus der Fläche mit dem Quadrat Schwerpunktsabstands ζ_s. Der mittlere Term bedarf noch einer Erläuterung: das Produkt 2 ζ_s ist konstant und kann vor das Integral gezogen werden, das bestimmte Integral $\int_A z dA = S_y$ ist das statische Moment bezogen auf die y-Achse, es wird zu Null, da vereinbarungsgemäß der Koordinatenursprung im Schwerpunkt angeordnet ist. Damit ergibt sich das Flächenträgheitsmoment bezogen auf die y-Achse zu:

$$\boxed{I_\eta = I_y + \zeta_s^2\ A} \tag{7.21}$$

Der erste Summand wird **Eigenanteil**, der zweite Summand **Steiner-Anteil** genannt.

Für I_ζ ergibt sich entsprechend:

$$\boxed{I_\zeta = I_z + \eta_s^2 \; A} \tag{7.22}$$

Das Deviationsmoment ergibt sich zu:

$$I_{\eta\zeta} = -\int_A \eta\zeta dA$$

Setzt man die Transformationsbeziehung ein erhält man:

$$I_{\eta\zeta} = -\int_A (y + \eta_s)(z + \zeta_s) dA$$

Die Ausmultiplikation liefert:

$$I_{\eta\zeta} = \underbrace{-\int_A y \; z \; dA}_{I_{yz}} - \zeta_s \underbrace{\int_A y dA}_{S_z=0} - \eta_s \underbrace{\int_A z dA}_{S_y=0} - \eta_s \; \zeta_s \underbrace{\int_A dA}_{A}$$

damit gilt für $I_{\eta\zeta}$:

$$\boxed{I_{\eta\zeta} = I_{yz} - \zeta_s \; \eta_s \; A} \tag{7.23}$$

Die Gleichungen 7.21, 7.22 und 7.23 werden als **Satz von Steiner** bezeichnet. Der Satz von Steiner setzt voraus, dass das alte Koordinatensystem den Ursprung im Schwerpunkt hat.

Flächenmomente aus zusammengesetzten Querschnitten

Wie schon eingangs erwähnt, kann man mit dem Satz von Steiner die Trägheitsmomente eines aus Einzelflächen bestehenden Querschnitts berechnen, wenn die Trägheitsmomente der Einzelflächen bekannt sind.

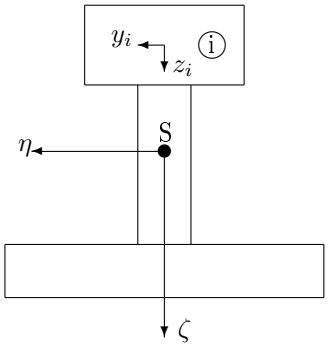


Abbildung 7.3: Zusammengesetzter Querschnitt

Die Trägheitsmomente für das Gesamtsystem bestimmt man:

$$
\begin{aligned}
I_\eta &= \sum_n I_y + \sum_n \zeta_{si}^2 \; A_i \\
I_\zeta &= \sum_n I_z + \sum_n \eta_{si}^2 \; A_i \\
I_{\eta\zeta} &= \sum_n I_{yz} - \sum_n \eta_{si}\zeta_{si} \; A_i
\end{aligned} \tag{7.24}
$$

A_i sind die Teilflächen, η_{si} und η_{si} sind die Schwerpunktskoordinaten der Teilflächen im η-ζ-Koordinatensystem, dessen Ursprung im Gesamtschwerpunkt liegen muss.

7.3.2 Rotation des Koordinatensystems

Neben einer Verschiebung kann auch eine Drehung des Bezugskoordinatensystems erforderlich sein. In diesem Zusammenhang wird auch der Begriff der Hauptträgheitsachsen näher erläutert.

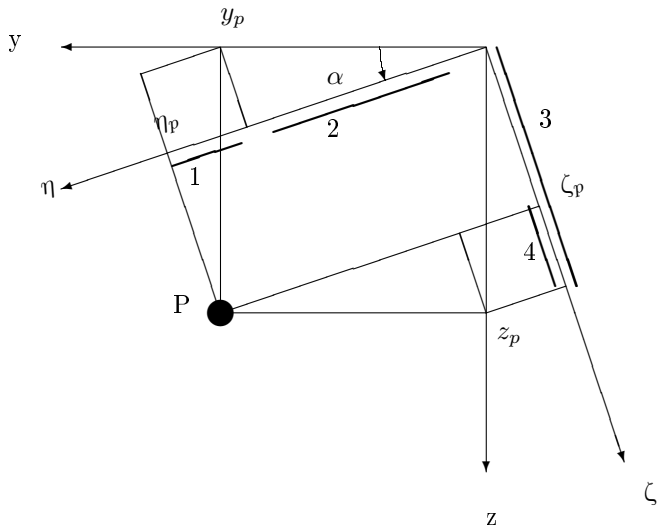


Abbildung 7.4: Rotation des Koordinatensystems um den Winkel α

Die Beziehung zwischen $x-y$- und $\eta-\zeta$-System ist durch

$$
\begin{aligned}
\eta &= \underbrace{y \;\cos\alpha}_{2} + \underbrace{z \;\sin\alpha}_{1} \\
\zeta &= -\underbrace{y \;\sin\alpha}_{4} + \underbrace{z \;\cos\alpha}_{3}
\end{aligned} \tag{7.25}
$$

gegeben.

Die Transformationsgleichungen 7.25 werden in die Flächenträgheitsmomente eingesetzt:

$$I_\eta = \int_A \zeta^2 dA = \int_A (-y\ \sin\alpha + z\ cos\alpha)^2 dA$$

der binomische Ausdruck wird aufgelöst und die Konstanten vor das Integral gezogen:

$$I_\eta = \sin^2\alpha \underbrace{\int_A y^2\ dA}_{I_z} + 2\ \sin\alpha\ \cos\alpha \underbrace{\int_A -yz\ dA}_{I_{yz}} + \cos^2\alpha \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I_y}$$

Die Teilintegrale sind bekannt und I_η kann angegeben werden:

$$\boxed{I_\eta = \sin^2\alpha\ I_z + \sin\alpha\cos\alpha\ 2\ I_{yz} + \cos^2\alpha I_y} \tag{7.26}$$

Entsprechend erhält man für I_ζ:

$$\boxed{I_\zeta = \cos^2\alpha\ I_z - \sin\alpha\cos\alpha\ 2\ I_{yz} + \sin^2\alpha I_y} \tag{7.27}$$

Für $I_{\eta\zeta}$ ergibt sich:

$$\boxed{I_{\eta\zeta} = \sin\cos\alpha\ (I_z - I_y) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha)\ i - yzI_y} \tag{7.28}$$

Die Transformationsvorschrift hat den gleichen Aufbau wie die der Spannungen, man identifiziert σ_x mit I_y, σ_y mit I_z und τ_{xy} mit I_{yz}.
Wie bei den Spannungen führt man die trigonometrischen Beziehungen

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$

und

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$$

ein und man erhält die Transformationsregeln bezogen auf den doppelten Winkel:

$$\begin{aligned} I_\eta &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos(2\alpha) + I_{yz}\ sin(2\alpha) \\ I_\eta &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos(2\alpha) - I_{yz}\ sin(2\alpha) \\ I_{\eta\zeta} &= -\frac{I_y - I_z}{2}\sin(2\alpha) + I_{yz}\ cos(2\alpha) \end{aligned} \tag{7.29}$$

Nun sollen die Hauptträgheitsachsen und der Hauptträgheitswinkel bestimmt werden. Rotiert man das Koordinatensystem um den Hauptträgheitswinkel (α^*) so werden sie extremal.

Man gewinnt den Hauptträgheitswinkel durch Nullsetzen der Ableitung von I_η bezüglich α:

$$\frac{dI_\eta}{d\alpha} = -\sin(2\alpha)\ (I_y - I_z) + 2\ cos(2\alpha)\ I_{yz} = 0$$

man erhält

$$\tan(2\alpha^*) = \frac{\sin(2\alpha^*)}{\cos(2\alpha^*)} = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

Die Hauptträgheitsmomente ergeben sich zu:

$$\boxed{I_{12} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{I_y - I_z}{2}\right]^2 + (I_{yz})^2}} \tag{7.30}$$

Dabei ist anlalog zu den Spannungen für I_1 das positive Vorzeichen zu nehmen.

$$\boxed{I_1 \geq I_2}$$

Das Deviationsmoment $I_{\eta\zeta}$ verschwindet analog zu den Schubspannungen unter dem Hauptträgheitswinkel α^*.
Wegen der Doppeldeutigkeit des $\arctan(2\alpha^*)$ ist es zweckmäßiger, den Hauptträgheitswinkel über die Beziehung

$$\boxed{\tan\alpha^* = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2}} \tag{7.31}$$

zu bestimmen.

7.4 Tabellarische Ermittlung der Flächenmomente zusammengesetzter Querschnitte

1	2	3	4	5	6	7	7	9	10	11	12	13	14	16	16
i	A_i	$\bar{y}_{s1}$	$\bar{z}_{si}$	$A_i\bar{y}_{si}$	$A_i\bar{z}_{si}$	y_{si}	z_{si}	$A_i y_{si}$	$A_i z_{si}$	$A_i\ y_{si}^2$	$A_i z_{si}^2$	$A_i y_{si} z_{si}$	I_{yi}	I_{zi}	I_{yzi}
1															
2															
3															
$\sum$	$\sum$	-	-	$\sum$	$\sum$	-	-	$\sum$	$\sum$	$\sum$	$\sum$	$\sum$	$\sum$	$\sum$	$\sum$

Ist ein Querschnitt aus mehreren Teilflächen zusammengesetzt und sind die Querschnittswerte der Teilflächen bekannt, so lassen sich die Werte für den Gesamtquerschnitt auf folgende Weise bestimmen.
Oben ist ein Tabellenkopf angegeben, mit dessen Hilfe man Schwerpunkt und Flächenmomente übersichtlich berechnen kann.

1. Als erstes wählt man ein willkürliches Koordinatensystem $\bar{x} - \bar{z}$. Wenn der Querschnitt eine Symmetrieachse hat, ist es vorteilhaft, eine der willkürlichen Koordinaten auf diese Symmetrieachse zu legen.

2. In der ersten Spalte werden die Teilflächen mit Nummern bezeichnet.

3. In der zweiten Spalte stehen die zugehörigen Querschnittsflächen. Damit die Zahlen eine angenehme Größenordnung haben, ist es günstig als Einheit [cm] zu wählen. Man addiert die zweite Spalte.

4. In Spalte 3 und 4 werden die Koordinaten der Schwerpunkte der Teilflächen im $\bar{x} - \bar{z}$-System eingetragen. Hierbei ist auf das Vorzeichen zu achten.

5. In Spalte 5 und 6 werden die statischen Momente $S_{\bar{z}}$ und $S_{\bar{y}}$ durch die Produkte $A_i\ \bar{y}_{si}$ und $A_i\ \bar{z}_{si}$ gebildet und die Summen gebildet. Man erhält $S_z = \sum A_i \bar{y}_{is}$ und $S_y = \sum A_i \bar{z}_{is}$.

6. Nun können die Schwerpunktskoordinaten bestimmt werden: $\bar{y}_s = \frac{A_i\ \bar{y}_{si}}{\sum A_i}$ und $\bar{z}_s = \frac{A_i\ \bar{z}_{si}}{\sum A_i}$.

7. Die Schwerpunkte der Einzelflächen werden in das Schwerpunktkoordinatensystem transformiert: $y_{si} = \bar{y}_{si} - \bar{y}_s$ und $z_{si} = \bar{z}_{si} - \bar{z}_s$.

8. Spalten 9 und 10 dienen der Kontrolle. In ihnen wird das auf den Schwerpunkt bezogen statische Moment gebildet. Es sollte Null ergeben.

9. In den Spalten 11, 12 und 13 werden die Steineranteile berechnet.

10. In den Spalten 14 bis 16 werden die Eigenanteile eingetragen.

11. Die auf das y-z-System bezogenen Trägheitsmomente errechnet man : $I_y = \sum A_i\ z_{si}^2 + \sum I_{yi}$ bzw. $I_z = \sum A_i\ y_{si}^2 + \sum I_{zi}$

Die Hauptträgheitsmomente bestimmt man nach Gleichung 7.30:

$$\boxed{I_{12} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{I_y - I_z}{2}\right]^2 + (I_{yz})^2}}$$

und den Hauptachsenwinkel nach Gleichung 7.31:

$$\boxed{\tan \alpha^* = \frac{I_{yz}}{I_y - I_2}}$$

Kapitel 8

Differentialgleichung der Biegelinie

8.1 Allgemeine Differentialgleichung

Es gelten folgende Annahmen:

Querschnitt und E-Modul seien konstant längs der Stabachse

Schnittgrößen und Querschnittswerte liegen im Hauptachsensystem vor.

Die Querschnittsabmessungen sind klein gegenüber der Länge

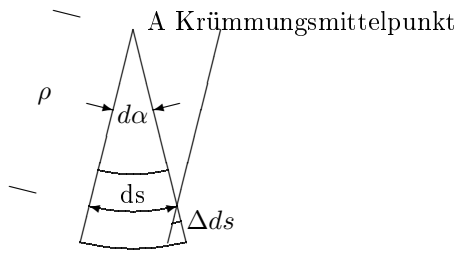


Abbildung 8.1: Differentielles Elements eines Stabes unter M_y

Das differentielle Element eines verformten Stabes unter Momentenbelastung ist in Abb. 8.1 dargestellt. Der Krümmungsmittelpunkt ist A, der Krümmungsradius ρ. Die z-Koordinate beginnt im Schwerpunkt und zeigt nach unten.
Mit Hilfe des Strahlensatzes kann man angeben:

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{\Delta ds}{z}$$

der Ausdruck umgeformt:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon_x = \frac{z}{\rho}$$

Die Einführung des Hooke'schen Gesetzes ($\sigma = E\ \varepsilon$) liefert:

$$\frac{\sigma_x}{E} = \frac{z}{\rho}$$

Nun wird das Materialgesetz für den Biegebalken eingeführt:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{J_y} z$$

$$\frac{\frac{M_y}{J_y} z}{E} = \frac{z}{\rho}$$

nach Division durch z erhält man:

$$\frac{M_y}{E\ J_y} = \frac{1}{\rho}$$

Der Ausdruck $1/\rho$ ist die Krümmung, die genau genommen beträgt:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{w''}{(\sqrt{1+w'^2})^3}$$

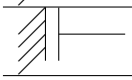
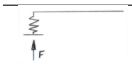
w' ist die Neigung des Stabes. Bei kleinen Verschiebungen sind sie klein, jedenfalls sehr viel kleiner als 1, daher kann die Krümmung mit guter Näherung als

$$\frac{1}{\rho} = -w''$$

angenommen werden.
Als Beziehung zwischen Biegemoment und verformter Balkenachse (Biegelinie)erhält man somit:

$$\frac{M_y}{E\ J_y} = -w'' \tag{8.1}$$

Die bei der Integration auftretenden Integrationskonstanten sind mit Hilfe der Randbedingungen zu bestimmen:

Symbol	Bezeichnung	W	$\frac{dw}{dx}$	M	Q
	Festlager	0	-	0	-
	Loslager	0	-	0	-
	Einspannung	0	0	-	-
	Einspannung mit Querkraftgelenk	-	0	-	0
	Freies Ende	-	-	0	0
	Federlager	$\frac{F}{c}$		0	

Wenn sich die Momentenlinie nicht für den ganzen Stab geschlossen darstellen lässt, weil Auflager, Gelenke oder Sprünge oder Knicke in der Belastungsfunktion vorliegen, ist die Integration abschnittweise vorzunehmen.

Die zusätzlichen Integrationskonstanten sind mit Übergangsbedingungen zu bestimmen.

8.2 Berechnung der Biegelinie mit der Mohrschen Analogie

Wie im letzten Kapitel dargestellt, gilt der Zusammenhang:

$$\int q(x)dx = -Q(x)$$

$$\int Q(x)dx = M(x)$$

und

$$\int \frac{M(x)}{E\ J(x)}dx = -w'(x)$$

$$\int w'(x)dx = w(x)$$

Man erkennt, dass sich die Differentialbeziehung zwischen Belastungsfunktion q und dem Biegemoment M und zwischen dem durch die Biegesteifigkeit dividierten Biegemoment M und der Biegelinie w wiederholt. Das hat zu folgender Überlegung geführt:
Wenn man $\frac{M(x)}{E(x)\ J(x)}$ als Belastung auffasst, man spricht von der zweiten Belastung, traditionell geschrieben in alter deutscher Schrift q und dafür das Biegemoment bestimmt, traditionell geschrieben alt deutsch M, erhält man die zweite Momentenlinie, die der Biegelinie entspricht. Das einzige worauf man achten muss ist, dass die Randbedingungen richtig eingearbeitet werden

Beispiel:

Ein Träger auf zwei Stützen mit konstanter Biegsteifigkeit ($EJ = const$) und der Länge L ist mittig mit einer Kraft F belastet.

Die Durchbiegung in der Mitte beträgt $w_{max} = \frac{1}{48E\ J}F\ L^3$. Dieses Ergebnis soll mit der Mohrschen Analogie nachvollzogen werden:

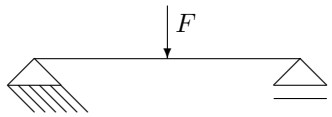


Abbildung 8.2: Statisches System

Für das Biegemoment erhält man:

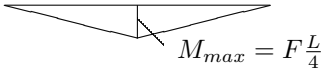


Abbildung 8.3: Momentenlinie

Nun wird $\frac{M}{EJ}$ als Belastung aufgefasst, man erhält folgende (zweite) Querkraftlinie:

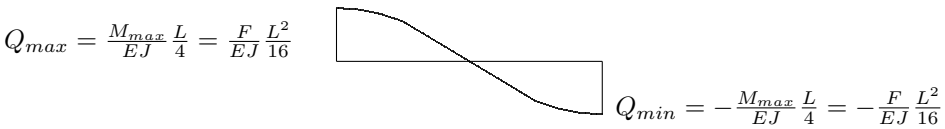


Abbildung 8.4: zweite Querkraftline

Aus der zweiten Querkraftline wir durch Integration die zweite Momentenlinie und damit die Biegelinie ermittelt:

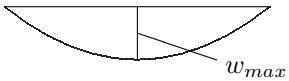


Abbildung 8.5: Biegelinie

Die maximale Durchbiegung in der Mitte erhält man durch Berechnen der Fläche vom linken Auflager bis zur Mitte:

$$w_{max} = \frac{2}{3}\frac{L}{2}Q_{max} = \frac{2}{3}\frac{L}{2}\frac{F}{EJ}\frac{L^2}{16} = \frac{1}{48EJ}FL^3$$

Beim dargestellten Beispiel sind die Randbedingungen von Biegemoment und zweitem Biegemoment gleich, nämlich $M(x = 0) = M(x = L) = 0$ und $w(x = 0) = w(x = L) = 0$. Besondere Überlegungen sind anzustellen, wenn sich die Randbedingungen unterscheiden. Als Beispiel soll ein Kragträger mit einer Einzellast am freien Ende untersucht werden.

Abbildung 8.6: Statisches System

Die Momentenlinie hat folgendes Aussehen. Die Randbedingungen lauten: $M(x = L) = 0$ und $Q(x = L) = 0$.

$M_{min} = -F\ L$

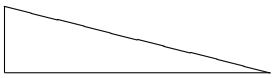
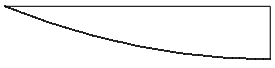


Abbildung 8.7: Momentenlinie

Im Gegensatz dazu sind die Randbedingungen der Biegelinie: $w(x = 0) = w'(x = 0) = 0$. Das ist bei der Bestimmung der Integrationskonstanten zu berücksichtigen. Zweckmässigerweise beginnen wir die Integration von der Einspannung aus, dann erhält man für die zweite Querkraft:



$Q_{min} = -\frac{M_{max}}{EJ}\frac{L}{2} = \frac{F}{EJ}\frac{L^2}{2}$

Abbildung 8.8: zweite Querkraftline

Aus der zweiten Querkraftline wir durch Integration die zweite Momentenlinie und damit die Biegelinie ermittelt:

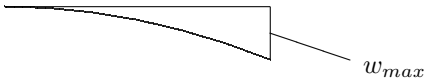


Abbildung 8.9: Biegelinie

Kapitel 9

Schubspannungen aus Querkraft

9.1 Allgemeine Betrachtungen

Schubspannungen treten bei Stäben infolge von Querkraft und infolge von Torsion auf.

Nun sollen Schubspannungen infolge von Querkraft untersucht werden.
In den bisherigen Betrachtungen wurden die Verschiebungen infolge von Schubspannungen vernachlässigt. Bei der Ableitung der Differentialgleichung der Biegelinie wurde von einen Stab ausgegangen, der nur durch ein Biegemoment und keine Querkraft belastet ist. In diesem Kapitel sollen die Schubspannungen aus Querkraft über Gleichgewichtsuntersuchungen gewonnen werden.

Die Integration der Spannungen über den Querschnitt ergeben die Schnittgrößen.
z.B.

$$\int_A \sigma_x \, dA \;=\; N$$

$$\int_A \sigma_x \cdot z \, dA \;=\; M_y$$

$$\int_A \tau_{xz} \, dA = \; Q_z$$

Es soll ein prismatischer Vollquerschnitt betrachtet werden, bei dem das y–z–System ein Hauptachsensystem ist.
Vereinfacht wird angenommen, dass die Schubspannungen über die Breite konstant verlaufen.

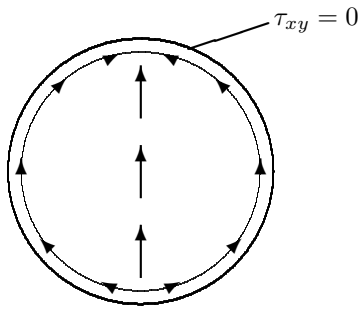


Abbildung 9.1: Schubspannungen in Kreisquerschnitt

Dies ist in der Praxis eine vertretbare Näherung, obwohl die Schubspannungen in der Realität am Rande tangential zur Kontur verlaufen (siehe Abb. 9.1).

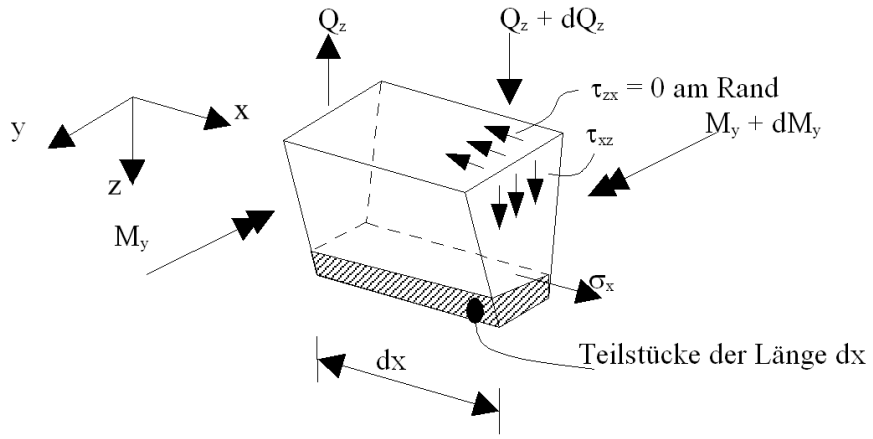


Abbildung 9.2: reale Schubspannungen

Die Skizze (Abb. 9.3) zeigt ein differentielles Scheibchen der Länge dx aus einem Stab. Es ist durch ein Biegemoment M_y und eine Querkraft Q_z belastet. Aus dieser Scheibe wird ein Teilstück von unten abgeschnitten (schraffiert dargestellt).

Die Spannungen werden am abgeschnittenen Teilstück angetragen:

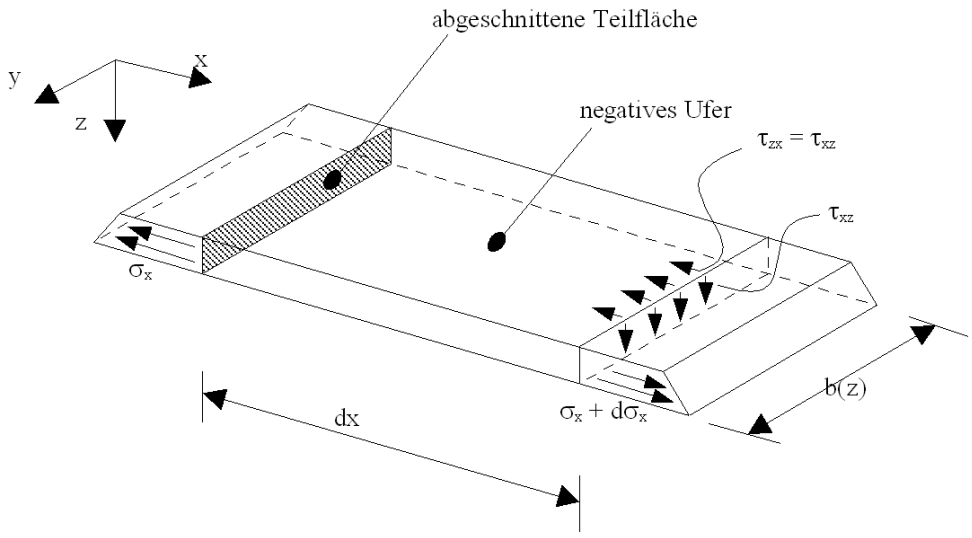


Abbildung 9.3: Teilstück der Länge dx horizontal abgeschnitten

Das Gleichgewicht in x-Richtung liefert:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= 0 = -\int_A \sigma_x dA - \tau_{xz} \cdot dx \cdot b + \int_A (\sigma_x + d\sigma_x) dA) \\
0 &= -\tau_{xz} \cdot dx \cdot b + \int_A d\sigma_x \; dA \\
\tau_{xz} &= \frac{1}{b} \cdot \int_A \frac{d\sigma_x}{dx} \; dA \qquad (9.1)
\end{aligned}$$

Es ist bereits bekannt:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

dann ist

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{dM_y}{dx} \cdot \frac{1}{I_y} \cdot z$$

weiter ist bekannt:

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z$$

damit erhält man:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = Q_z \cdot \frac{1}{I_y} \cdot z \tag{9.2}$$

Die Gleichung (9.2) in (9.1) eingesetzt liefert:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{b} \cdot \int_A Q_z \cdot \frac{1}{I_y} \cdot z \; dA$$

Zieht man die Größen Q_z und I_y, welche von der Querschnittsfläche unabhängig sind, vor das Integral, erhält man:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z}{I_y \cdot b(z)} \cdot \int_{\bar{A}} z \; dA$$

Der Ausdruck $\int_{\bar{A}} z \; dA$ ist auch bekannt.

Es ist das Statische Moment, aber nicht über die gesamte Querschnittsfläche, sondern über die „abgeschnittene“ Teilfläche $\bar{A}$. Dadurch wird S_y zu einer Funktion von z. Man erhält die Dübelformel (auch Q-S-I-b-chen-Formel genannt):

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot b(z)} \tag{9.3}$$

9.2 Schubspannungen infolge von Querkraft am Rechteckquerschnitt

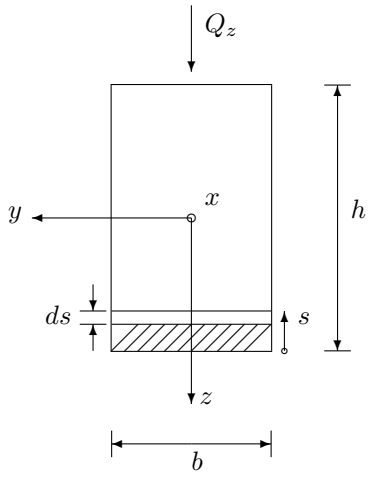


Abbildung 9.4: Rechteckquerschnitt

Bestimmung des statischen Momentes

Man führt für die Integration eine Laufkoordinate s ein, die an der Seite beginnt, an der z einen positiven Wert hat.

$$S_y = \int_A z \, dA \quad \text{mit} \quad dA = ds \cdot b \quad \text{und} \quad z = \frac{h}{2} - s$$

$$
\begin{aligned}
S_y &= b \cdot \int_0^s \left(\frac{h}{s} - s\right)\, ds \;=\; b \cdot \left[\frac{h}{s} \cdot s - \frac{1}{2} \cdot s^2\right]_0^s \\
S_y &= b \cdot \left(\frac{h}{2} \cdot s - \frac{1}{2} \cdot s^2\right) \\
S_y(s=0) &= 0 \\
S_y(s=\frac{h}{2}) &= b \cdot \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{4}\right) \\
S_y(s=\frac{h}{2}) &= b \cdot \frac{h^2}{8} \\
S_y(s=h) &= 0
\end{aligned}
$$

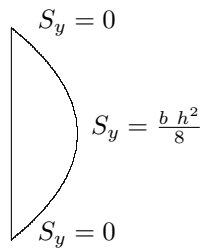


Abbildung 9.5: Verlauf des Statischen Moments bei einen Rechteckquerschnitt

Das Maximum des statischen Moments liegt bei

$$\frac{dS_y}{dz} = b \cdot \left(\frac{h}{s} - s\right) = 0 \quad \rightarrow \quad s = \frac{h}{2}$$

Das Statische Moment hat am Schwerpunkt sein Maximum, bei $\frac{h}{2}$ und $-\frac{h}{2}$ wird es zu Null.

Mit $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ und $\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}$ erhält man:

$$\tau_{xz}\left(z = \frac{h}{2}\right) \;=\; 0$$

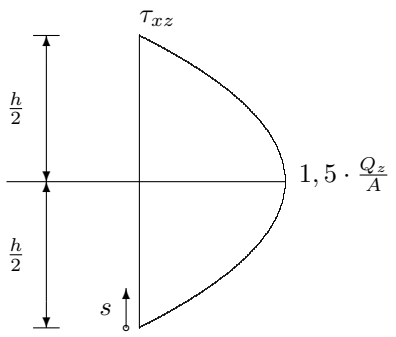


Abbildung 9.6: Schubspannungsverlauf am Rechteckquerschnitt

$$\tau_{xz}\left(z = -\frac{h}{2}\right) \;=\; 0$$

$$\tau_{xz}(z=0) \;=\; \frac{Q_z \cdot b \cdot \frac{h^2}{8}}{\frac{b \cdot h^3}{12} \cdot b}$$

Das Maximum:

$$\tau_{xz}(z=0) \;=\; \frac{12}{8} \cdot \frac{Q_z}{b \cdot h} \;=\; 1,5 \cdot \frac{Q_z}{A}$$

Da bei konstanter Breite das Maximum der Schubspannungen am Schwerpunkt liegt, ist es vorteilhaft, das statische Moment am Schwerpunkt ohne Integral direkt zu bestimmen.

Man schneidet den Querschnitt am Schwerpunkt. Die abgeschnittene Teilfläche habe die Größe $\bar{A}$ (A abgeschnitten).

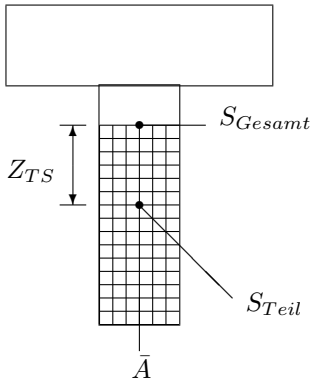


Abbildung 9.7: Statisches Moment bei zusammengesetzten Querschnitten

Der Abstand in z-Richtung vom Schwerpunkt der Teilfläche zum Gesamtschwerpunkt sei Z_{TS}, so ist das Statische Moment

$$S_{y\ max} = \bar{A} \cdot Z_{TS}$$

Analog kann das Statische Moment an der Stelle 1 bestimmt werden

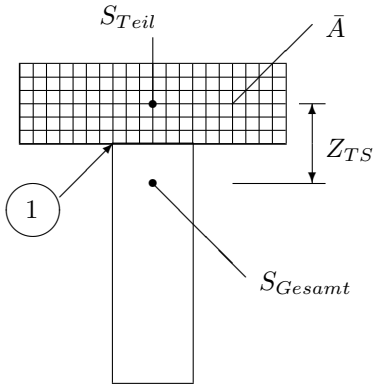


Abbildung 9.8: Statisches Moment bei zusammengesetzten Querschnitten

$$S_y = \bar{A} \cdot Z_{TS}$$

9.3 Schubspannungen infolge von Querkraft bei dünnwandigen Querschnitten

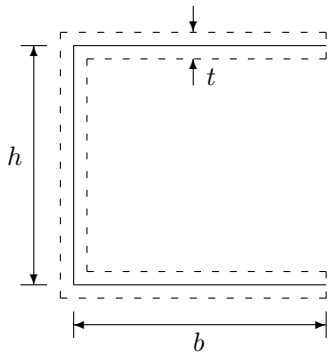


Abbildung 9.9: dünnwandige Querschnitte

Dünnwandig sind solche Querschnitte, bei denen die Querschnittsabmessungen Breite und Höhe groß gegenüber der Materialdicke (Blechdicke) t sind.
Typische Vertreter von dünnwandigen Querschnitten sind Walzprofile (U-Profile, Doppel-T-Profile).

Auch für dünnwandige Profile ist die Dübelformel gültig. Zur Berechnung des Statischen Moments führt man auch Laufkoordinaten s_i ein, die im Bereich mit positiven z beginnen.

Es ist zweckmäßig zunächst an der Skelettlinie $z \cdot t$ anzutragen und dann die Fläche zu integrieren, man erhält damit die Funktion $S_y(s_i)$.
Am Schwerpunkt zeigt sie ein Maximum.

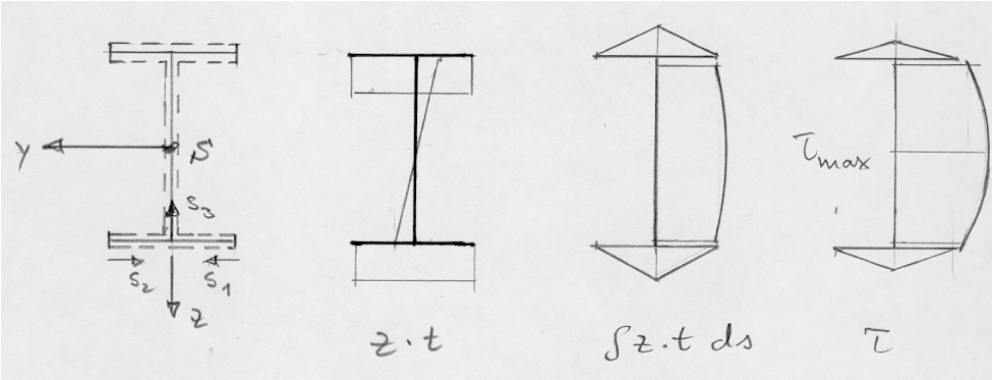


Abbildung 9.10: Schubspannungen an dünnwandigen Querschnitten

Bei der in der Skizze vorgeschlagenen Vorgehensweise zur Bestimmung des Sta-

tischen Moments ist folgende Überlegung eingegangen: Bei abschnittsweise konstanter Blechdicke gilt:

$$dA = t_i \; ds$$

Dann kann man für das Statische Moment schreiben:

$$S_y = \int_{\bar{A}} z \; dA = \int_{\bar{A}} \underbrace{z \; t_i}_{in \; der \; zweiten \; Skizze} \; ds$$

Die erste Skizze zeigt die Geometrie mit dem Koordinatensystem im Schwerpunkt. Das Koordinatensystem muss ein Hauptachsensystem sein.
In der zweiten Skizze ist an die Skelettlinie das Produkt aus der örtlichen Blechdicke und der z-Koordinate angetragen ($z \; t_i$).
In der nächsten Skizze wird die Fläche ($z \; t_i$) ausgehend von den Rändern integriert ($\int z \; t_i \; ds$). Man erhält den Verlauf des statischen Moments. Am Schwerpunkt muss ein Maximum auftreten.
Die letzte Skizze zeigt die Schubspannungsverteilung nach Gleichung 9.3.

9.4 Der Schubmittelpunkt

Integriert man die Schubspannungen eines U-Profiles über die Fläche, so liefert das Integral über den Steg die Querkraft.

$$\int_{Steg} \tau_{xz} \; dA \; = \; T_1 \; = \; Q_z$$

Während die Integrale über den Obergurt und den Untergurt $\int_{Obergurt} \tau_{xy} \; dA \; = \; T_2$, $\int_{Untergurt} \tau_{xy} \; dA \; = \; T_3$ sich gegenseitig aufheben.

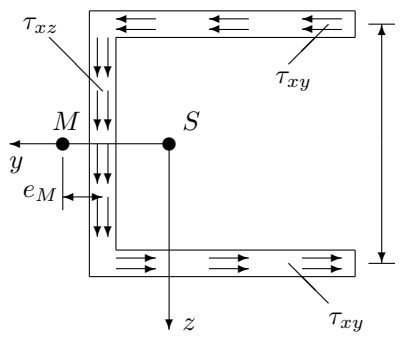


Abbildung 9.11: Schubmittelpunkt

Somit ist zwar das Gleichgewicht in y-Richtung gewährt, aber es bleibt ein Moment um die x-Achse der Größe:

$$M_x = T_2 \cdot h$$

Um Gleichgewicht zu erhalten, müssen die äußeren Querkräfte nicht im Schwerpunkt sondern etwas außerhalb davon, nämlich um $e_M = \frac{M_x}{Q_z}$ außerhalb, angreifen. Diesen Punkt nennt man den **Schubmittelpunkt** M.

Der Schubmittelpunkt ist ebenso charakteristisch für den Querschnitt wie der Schwerpunkt.

Einige Beispiele:

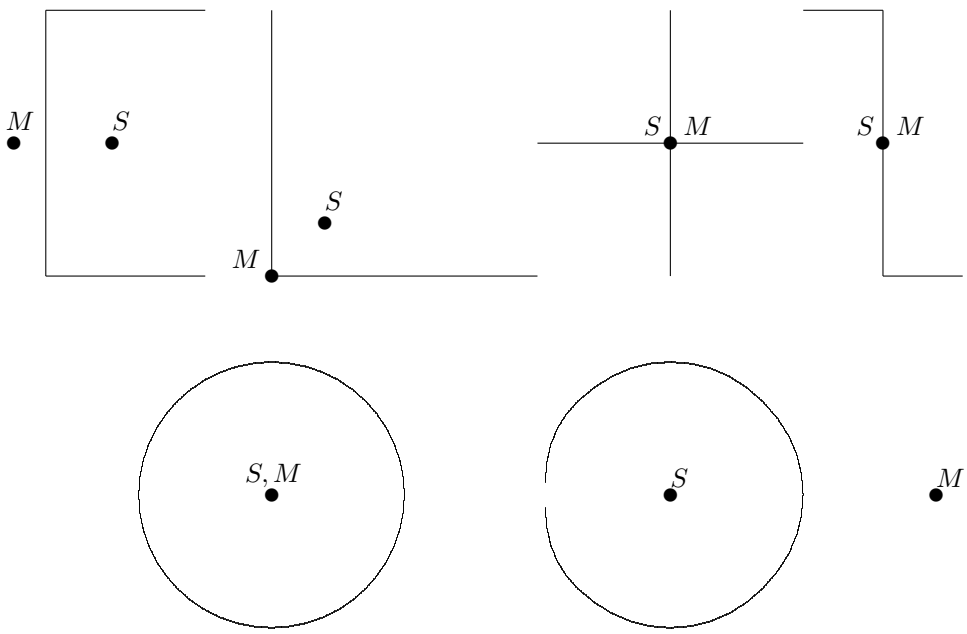
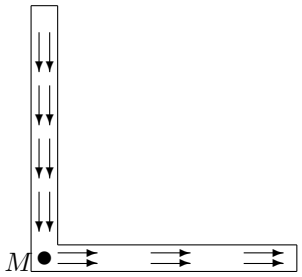


Abbildung 9.12: Schubmittelpunkte verschiedener Querschnitte

Für das Winkelprofil, das Y- und das Kreuzprofil gilt, dass die Resultierenden der Schubspannungen zum Kreuzungspunkt der Profilteile keinen Hebelarm haben.



Für ein U-Profil mit der Höhe h, der Breite b, der Flanschdicke t und der Stegdicke s ergibt sich der Abstand des Schubmittelpunktes vom Steg näherungsweise zu:

$$e_M = \frac{3 \cdot b^2 \cdot t}{6 \cdot t \cdot b + s \cdot h}$$

Das Maß e_M ist für Normprofile in Tabellenbüchern angegeben, aber Vorsicht, oft ist der Abstand auf den Schwerpunkt bezogen.

Kapitel 10

Torsion

Wenn ein Stab mit einer Last beansprucht wird, deren Wirkungslinie nicht durch den Schubmittelpunkt des Querschnittes geht, so tritt ein Torsionsmoment M_x auf.

Seine Größe ist:

$$M_x = F \cdot h$$

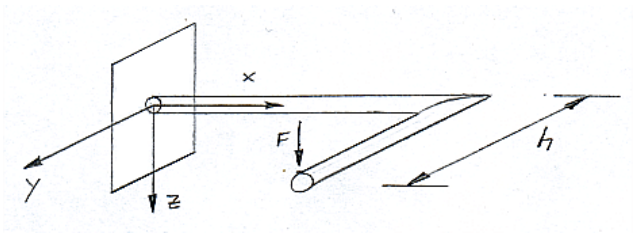


Abbildung 10.1: Torsionsmoment

Das Torsionsmoment ruft eine Verdrehung und eine Verwölbung des Querschnittes hervor.

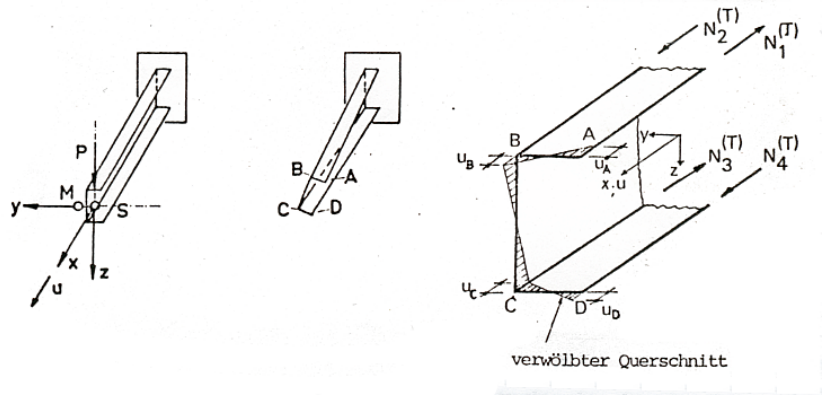


Abbildung 10.2: Beispiel für die Verwölbung eines U-Querschnittes

Bei einigen Querschnitten tritt aufgrund ihrer speziellen Querschnittsgeometrie keine Verwölbung auf.

Dies sind u.a.

Abbildung 10.3: Kreisring und Kreisring mit konstanter Wandstärke

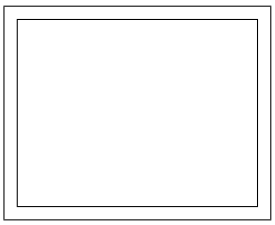


Abbildung 10.4: Quadrat mit konstanter Wandstärke

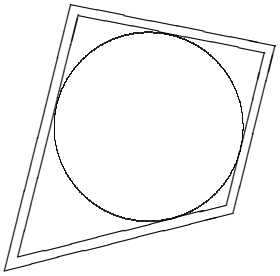


Abbildung 10.5: Tangentenpolynome an einem Kreis mit konstanter Wandstärke

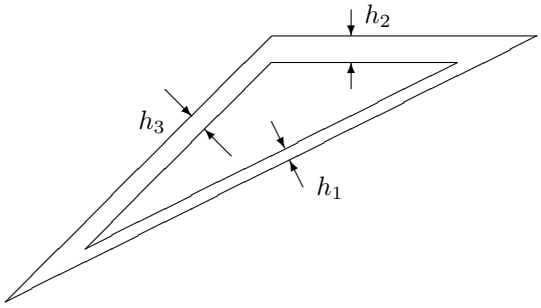


Abbildung 10.6: Dreieckige Hohlprofile mit beliebiger Wandstärke der Seiten

Diese Querschnitte nennt man **wölbfrei**.

St. Venantsche Torsion	Wölbkrafttorsion
Wölbfreie Querschnitte und nichtwölbfreie Querschnitte, bei denen das Mittragen der Verwölbung vernachlässigt wird.	nicht wölbfreie Querschnitte
Torsionsmoment wird allein durch Schubspannungen übertragen	Torsionsmoment wird durch Schubspannungen und Normalspannungen übertragen

10.1 Wölbkrafttorsion

Leitet man in ein nicht wölbfreies Profil ein Torsionsmoment ein, so wird ein Teil des Biegemomentes über Schubspannungen, ein anderer über Normalspannungen abgetragen.

Die Anteile können durch statisch unbestimmte Rechnung ermittelt werden.

Dies soll im Rahmen dieser Vorlesung nicht weiter verfolgt werden.

Zur Plausibilisierung sei nur erwähnt, dass man ein Torsionsmoment auch als Kräftepaar deuten kann, bei dem die Kräfte an den Gurten angreifen.

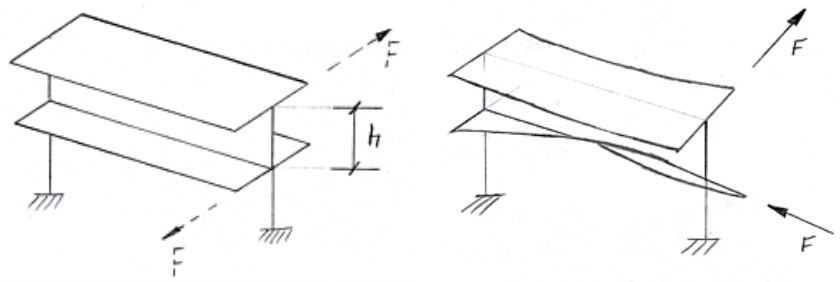


Tabelle 10.1: Profil vor und nach Kraftangriff

Das Torsionsmoment wird hier zum größten Teil durch Normalspannungen σ_x, aufgenommen, die durch Biegemomente M_z in den Gurten hervorgerufen werden.

10.2 St. Venant Torsion

Voraussetzungen:

- gerade dünne Stäbe mit konstantem Querschnitt
- die Querschnittsform bleibt erhalten, sie wird bei Hohlquerschnitten durch Aussteifungen sichergestellt
- die Querschnitte verdrehen sich starr um die Stabachse (Speiche bleibt Speiche)
- Wenn eine Querschnittsverwölbung vorliegt, wird diese nicht berücksichtigt

10.2.1 Kreis und Kreisquerschnitte

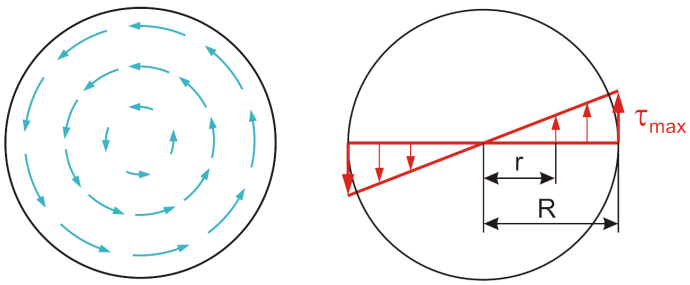


Abbildung 10.7: Schubspannungen in Kreisquerschnitten

Die Schubspannungen wirken umlaufend, verschwinden im Mittelpunkt und wachsen linear mit dem Radius an.

$$\tau(r) = \frac{\tau_{max}}{R} \cdot r$$

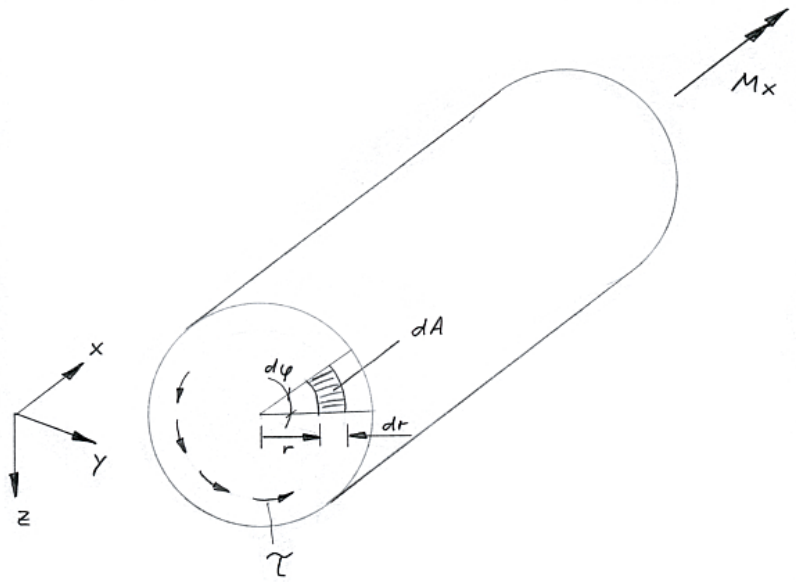


Abbildung 10.8: Belastung eines Kreisquerschnitts durch Torsionsmoment

Die Skizze zeigt einen runden Torsionsstab, der durch ein positives Torsionsmoment M_x belastet wird.

Am anderen Ende, dem negativen Schnittufer, sind die Schubspannungen und ein differentielles Flächenstück dA dargestellt.

$$dA \;=\; dr \cdot \varphi \cdot r$$

Aus Gleichgewichtsgründen muss gelten:

$$\int_A (\tau \cdot dA \cdot r) \;=\; M_x$$

Mit dem bereits erwähnten Ansatz

$$\tau(r) \;=\; \frac{\tau_{max}}{R} \cdot r$$

erhält man:

$$\int_A \left(\frac{\tau_{max}}{R} \cdot r \cdot dA \cdot r \right) \;=\; M_x$$

Da τ_{max} und R konstant sind, kann auch geschrieben werden:

$$\frac{\tau_{max}}{R} \cdot \int_A r^2 \; dA \;=\; M_x$$

Der Integralausdruck ist das polare Trägheitsmoment.

$$I_P \;=\; \int_A r^2 \; dA \;=\; \int_A \left(y^2 + z^2 \right) \; dA \;=\; I_y + I_z$$

Das polare Trägheitsmoment kann bei Normprofilen Tabellenwerken entnommen werden, seine Berechnung wird später gezeigt.
Somit kann geschrieben werden:

$$\tau_{max} \;=\; \frac{M_x}{I_P} \cdot R \;=\; \frac{M_x}{W_T} \quad , \quad W_T \;=\; \frac{I_P}{R} \quad , \quad \tau(r) \;=\; \frac{M_x}{I_P} \cdot r$$

Für den **Kreis** gilt:

$$
\begin{aligned}
I_P &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot r \; dr \; d\varphi \;=\; \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}\, r^4\right]_0^R \; d\varphi \\
I_P &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\, r^4 \; d\varphi \;=\; \left[\frac{1}{4}\, R^4 \cdot \varphi\right]_0^{2\pi} \;=\; \frac{1}{4}\, R^4 \cdot 2\pi \\
I_P &= \frac{\pi}{2} R^4 \qquad (10.1)
\end{aligned}
$$

Für den **Kreisring** gilt:

$$
I_P \;=\; \frac{\pi}{2}\left(R_a^4 - R_i^4\right) \qquad (10.2)
$$

Ein Stab der Länge dx und dem Radius R wird durch ein Torsionsmoment M_x beansprucht. Der Querschnitt an der Stelle x sei gegen Verdrehung gesichert.

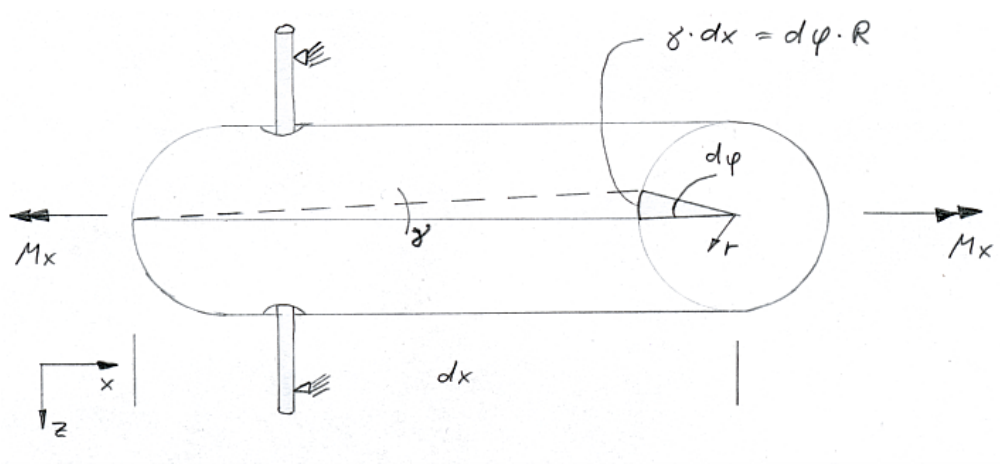


Abbildung 10.9: Verdrehung infolge Torsion eines Kreis - bzw. Kreisringquerschnittes.

An der Stelle $x + dx$ wird der Querschnitt um den Winkel $d\varphi$ verdreht. Eine vor der Verformung parallel zur x – Achse auf dem Stab verlaufende Markierung, bildet während der Belastung einen Winkel γ zur ursprünglichen Lage.
Der Winkel γ entspricht der Gleitung , so dass mit dem Hooke'schen Gesetz

$$
\begin{aligned}
\tau_{max} &= \gamma \cdot G \\
\gamma &= \frac{\tau_{max}}{G} \qquad (10.3)
\end{aligned}
$$

angegeben werden kann.

Aus geometrischen Überlegungen muss gelten:

$$\begin{aligned} \gamma \cdot dx &= d\varphi \cdot R \\ d\varphi &= \gamma \cdot \frac{dx}{R} \end{aligned} \tag{10.4}$$

Führt man (10.3) in (10.4) ein, so erhält man:

$$d\varphi = \frac{\tau_{max}}{G} \cdot \frac{dx}{R}$$

mit $\tau_{max} = \frac{M_x}{I_P} \cdot R$ erhält man:

$$d\varphi = \frac{M_x}{I_P} \cdot R \cdot \frac{1}{G} \cdot \frac{dx}{R}$$

Durch Integration erhält man:

$$\int_0^l d\varphi = \varphi(l) = \int \frac{M_x}{I_P \cdot G} dx + C$$

Die Integrationskonstante ist durch die Randbedingungen zu bestimmen.

Der Integrand

$$\boxed{\frac{M_x}{I_P \cdot G} = \vartheta}$$

wird als bezogener Drillwinkel bezeichnet, so dass gilt:

$$\varphi(l) = \int \vartheta \; dx + C \tag{10.5}$$

10.2.2 Schubspannungen bei Torsion nicht kreisförmiger Vollquerschnitte

Bei nicht kreisförmigen Vollquerschnitten gestaltet sich die Ableitung der Zusammenhänge zwischen Torsionsmoment und bezogenem Drillwinkel und resultierenden Schubspannungen etwas komplizierter.

Näheres kann bei **Leipholz** : Festigkeitslehre S.71 oder **Stein**: Technische Mechanik 2 S. 171 nachgelesen werden.

Hier soll nur das Ergebnis mitgeteilt werden:

Die maximale Spannung erhält man mit

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_T}$$

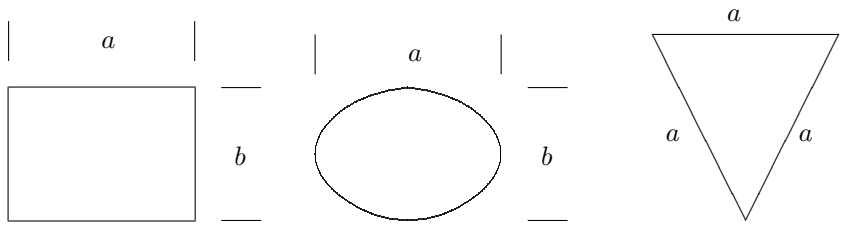
und dem bezogenen Drillwinkel

$$\vartheta = \frac{M_x}{I_T \cdot G}$$

, womit die Verdrehung

$$\varphi = \int \vartheta \, dx$$

bestimmt werden kann.
Torsionsträgheitsmoment I_T und Torsionswiderstandsmoment W_T sind für einige Querschnitte nachfolgend angegeben.



I_T	$\frac{a \cdot b^3}{\kappa}$	$\frac{1}{16}\frac{\pi \cdot a^3 \cdot b^3}{a^2+b^2}$	$\frac{a^4}{46{,}2}$
W_T	$\frac{a \cdot b^2}{\lambda}$	$\frac{1}{16}\pi \cdot a \cdot b^2$	$\frac{a^3}{20}$

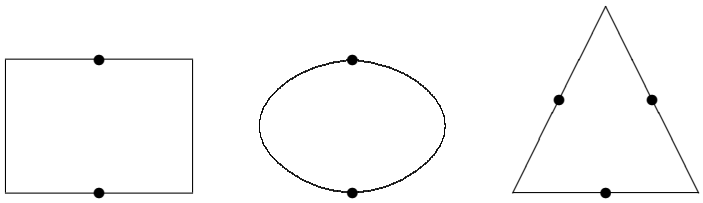
Für das Rechteck sind die Koeffizienten κ, λ und γ in der Tabelle angegeben. Es gilt:

$$\tau_b = \gamma \cdot \tau_{max}$$

$\frac{a}{b}$	1	1,5	2	3	4	6	8	10	∞
κ	7,11	5,1	4,37	3,84	3,56	3,34	3,26	3,19	3
λ	4,18	4,33	4,07	3,75	3,55	3,34	3,26	3,19	3
γ	1,0	0,858	0,796	0,753	0,745	0,743	0,743	0,743	0,743

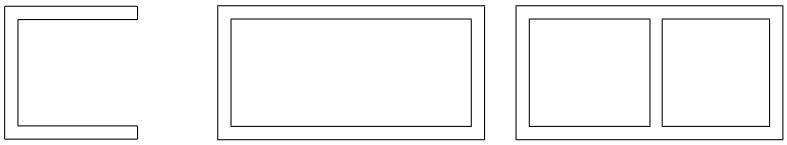
Die größte Schubspannung tritt auf:

Beim Rechteck:	in der Mitte der längeren Seite
Bei der Ellipse:	in den Eckpunkten der kleineren Achse
Beim gleichseitigen Dreieck:	in der Mitte der Seiten



10.2.3 Torsion dünnwandiger einfach geschlossener Querschnitte

Die Verwölbung wird zugelassen, aber ihre Tragwirkung vernachlässigt. ($\sigma_x = 0$)



Offener Querschnitt | einfach geschlossener Querschnitt | mehrfach geschlossener Querschnitt

Der Unterschied zwischen offenen Querschnitten, und ein – und mehrfach geschlossenen Querschnitt kann den Skizzen entnommen werden.

Dünnwandig bedeutet, dass die Blechdicke t klein gegenüber dem anderen Profilabmessungen ist, so dass man sich die gesamte Fläche des Bleches auf der Skelettlinie konzentriert vorstellen kann.

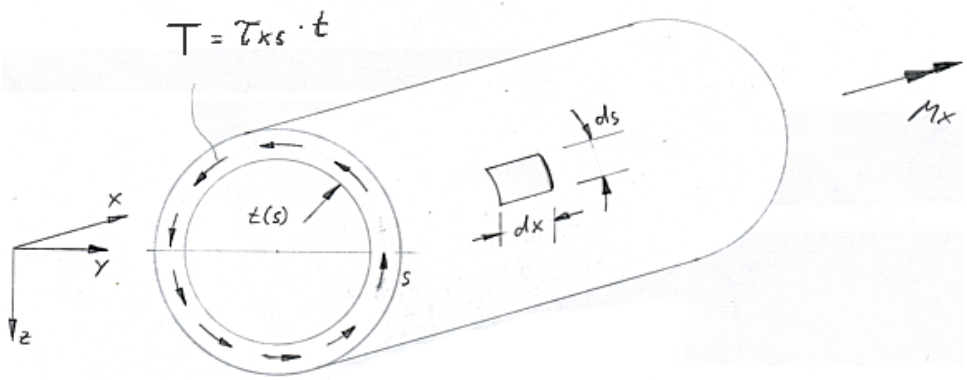


Abbildung 10.10: dünnwandig einfach geschlossener Querschnitt

Zur Beschreibung des Querschnitts wird eine Laufkoordinate s eingeführt.

Die Blechdicke ist somit $t(s)$.

Über die Blechdicke wird ein konstanter Spannungsverlauf angenommen.

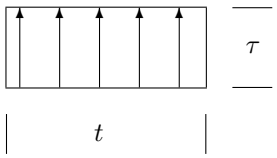


Abbildung 10.11: konstanter Spannungsverlauf über Blechdicke

Das Produkt $\tau_{sx} \cdot t \; = \; T$ wird Schubfluss genannt.

Das Kräftegleichgewicht an einem differentiellen Element liefert:

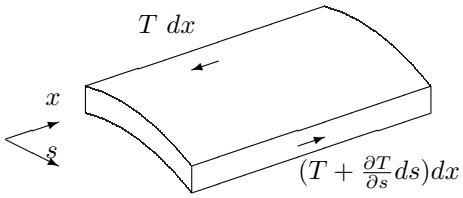
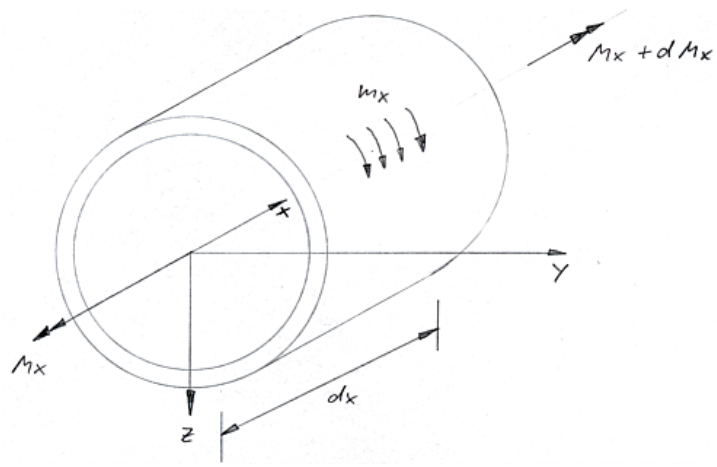


Abbildung 10.12: Differentielles Teilstück dx mal ds

$$\begin{aligned}
\sum F_x \;=\; 0 \quad &= \quad T \cdot dx - \left(T + \frac{\partial T}{\partial s} \cdot ds\right)\, dx \\
0 \quad &= \quad \frac{\partial T}{\partial s} \cdot ds \\
\rightarrow\; 0 \quad &= \quad \frac{\partial T}{\partial s}
\end{aligned}$$

In einem Schnitt x ändert sich der Schubfluss in Richtung der Laufkoordinate s nicht.

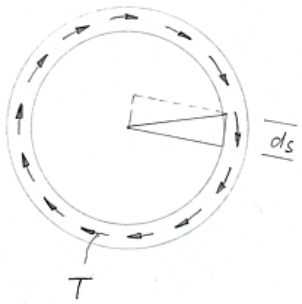
$$\begin{aligned}
T(x,s) \quad &= \quad T(x) \\
\tau(x,s) \quad &= \quad \tau_{xs}(x,s) \;=\; \frac{T(x)}{t(s)}
\end{aligned}$$



Fasst man m_x als ein eingeprägtes Streckentorsionsmoment auf $\left[\frac{kNm}{m}\right]$, so liefert das Momentengleichgewicht um die x – Achse:

$$\begin{aligned}
\sum M_x \;=\; 0 \quad &= \quad -\,M_x + m_x \cdot dx + M_x + dM_x \\
\rightarrow\; dM_x \quad &= \quad -\,m_x \cdot dx
\end{aligned}$$

Greift kein Streckentorsionsmoment an , so ist das Torsionsmoment $M_x \;=\; const.$



Das Torsionsmoment ergibt sich zu $M_x = \oint T \cdot r \; ds$ aus dem Schubfluss und dem zugehörigen Hebelarm r.

Da $T = const$ über s , kann man schreiben $M_x = T \cdot \oint r \; ds$.

Aus der Geometrie ist bekannt :

$$\oint r \; ds \; = \; 2 \cdot A_m$$

mit A_m, der Fläche, die der Radiusvektor überstreicht.

A_m ist die Fläche, die von der Skelettlinie eingeschlossen wird.

Abbildung 10.13: Die vom Radiusvektor überstrichene Fläche A_m

Somit ergibt sich:

$$M_x \; = \; T \cdot 2 \cdot A_m$$

und

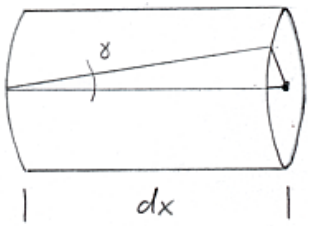
$$T \; = \; \frac{M_x}{2 \cdot A_m} \qquad \textbf{1.Bredtsche Formel} \tag{10.6}$$

Da $T = t \cdot \tau_{xs}$ gilt $\tau_{xs} = \dfrac{M_x}{2 \cdot A_m \cdot t}$ oder $\tau_{xs\;max} = \dfrac{M}{W_T}$ mit

$$\boxed{W_T = 2 \cdot A_m \cdot t_{min}}$$

Bei geschlossenen dünnwandigen Querschnitten tritt die größte Schubspannung am **dünnsten** Blech auf.

Wie bei den Kreisquerschnitten gilt:



$$\begin{aligned}
\gamma \cdot dx &= r \cdot d\varphi \\
\frac{\tau}{G} \cdot dx &= r \cdot d\varphi \\
\tau &= G \cdot r \cdot \frac{d\varphi}{dx}
\end{aligned}$$

$\gamma \cdot dx = r \cdot d\varphi$ mit $\gamma = \frac{\tau}{G}$ (Hooke) und Multiplikation mit $\frac{G}{dx}$ wird daraus:

$$\begin{aligned}
\tau &= G \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot r \\
\oint \tau \; ds &= \oint G \; \vartheta \; r \; ds \\
\oint \tau \; ds &= G \cdot \vartheta \cdot \oint r \; ds
\end{aligned}$$

$(\vartheta = \frac{d\varphi}{dx})$

mit $\tau = \frac{M_x}{2 \cdot A_m \cdot t}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\oint \frac{M_x}{2 \cdot A_m \cdot t} \; ds &= G \cdot \vartheta \cdot \oint r \; ds \\
\frac{M_x}{2 \cdot A_m} \cdot \oint \frac{ds}{t} &= G \cdot \vartheta \cdot 2 \cdot A_m \\
\vartheta &= \frac{M_x \cdot \oint \frac{ds}{t}}{G \cdot 4 \cdot {A_m}^2} \\
\vartheta &= \frac{M_x}{G \cdot I_T}
\end{aligned}$$

mit

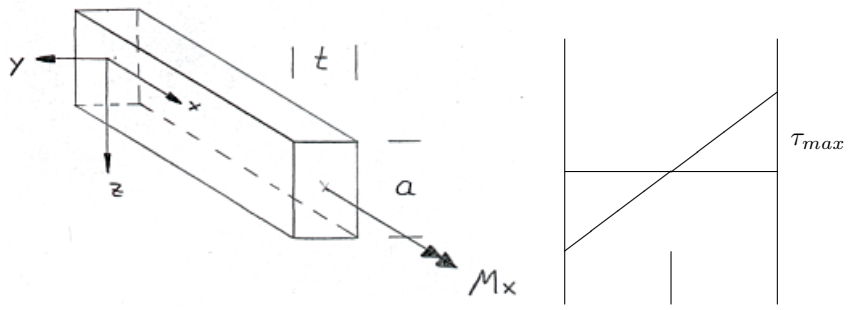
$$\boxed{I_T \;=\; \frac{4 \cdot {A_m}^2}{\oint \frac{ds}{t}}} \qquad \textbf{2.Bredtsche Formel} \tag{10.7}$$

für aus Blechen mit konstanter Wandstärke (Verteilung über Blechdicke konstant) zusammengesetzte Profile wird daraus:

$$\boxed{I_T \;=\; \frac{4 \cdot {A_m}^2}{\sum \frac{s_i}{t_i}}} \tag{10.8}$$

10.2.4 Torsion dünnwandiger offener Profile

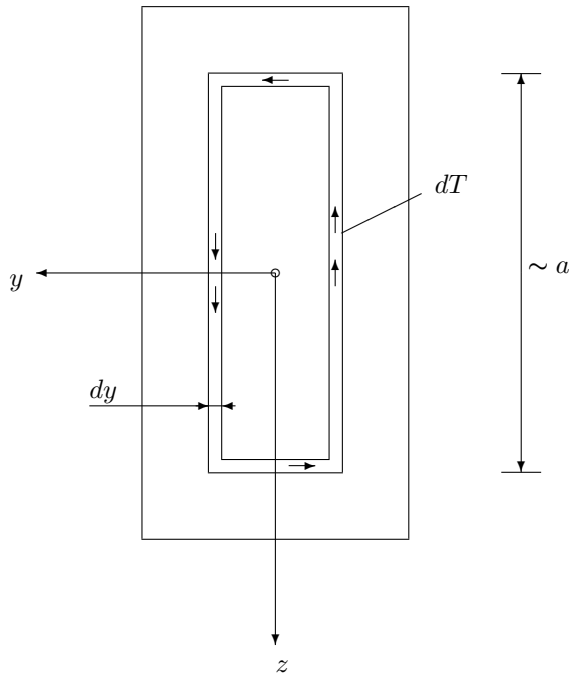
Das schmale Rechteckprofil



Die Gleitrichtungen γ_{xs} und damit auch die Schubspannungen τ_{xs} sind linear über den Querschnitt verteilt, damit erhält man:

$$\tau(y) = \tau_{max} \cdot \frac{y}{t/2}$$

Das schmale dünnwandige Rechteckprofil sei in viele Hohlprofile der Dicke dy unterteilt.



Der Schubfluss dT für ein Hohlprofil der Dicke dy ergibt sich somit

$$
\begin{aligned}
dT(y) &= \tau(y) \cdot dy \\
dT(y) &= \tau_{max} \cdot \frac{y}{t/2} \cdot dy \qquad (10.9)
\end{aligned}
$$

Aus der 1. Bredtschen Formel finden wir $dT = \dfrac{dM_x}{2 \cdot A_m}$ mit näherungsweise $A_m = 2 \cdot a \cdot y$

$$
\begin{aligned}
dT &= \frac{dM_x}{2 \cdot 2 \cdot a \cdot y} \\
dM_x &= dT \cdot 4 \cdot a \cdot y \qquad (10.10)
\end{aligned}
$$

Mit (10.9) gehen wir in (10.10) und erhalten:

$$
\begin{aligned}
dM_x &= \tau_{max} \cdot \frac{y}{t/2} \cdot 4 \cdot a \cdot y \cdot dy \\
dM_x &= \tau_{max} \cdot \frac{2}{t} \cdot 4 \cdot a \cdot y^2 \cdot dy \qquad (10.11)
\end{aligned}
$$

Das Integral liefert:

$$
\begin{aligned}
\int dM_x = M_x &= \tau_{max} \cdot \frac{8}{t} \cdot a \cdot \int_0^{t/2} y^2 \, dy \\
M_x &= \tau_{max} \cdot \frac{8}{t} \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[y^3\right]_0^{t/2} \\
M_x &= \tau_{max} \cdot \frac{8}{t} \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} t^3 \\
M_x &= \tau_{max} \cdot a \cdot t^2 \cdot \frac{1}{3} \\
\tau_{max} &= \frac{M_x}{W_T} \qquad mit \qquad W_T = \frac{1}{3} \cdot a \cdot t^2
\end{aligned}
$$

Diese stimmt mit dem in der Tabelle für schmale Rechtecke gegebenen Werte überein.

Das Torsionsträgheitsmoment ergibt sich zu

$$
\boxed{I_T = \frac{1}{3} \cdot a \cdot t^3} \qquad (10.12)
$$

Aus schmalen Rechteckquerschnitten zusammengesetzte Profile berechnet man das (Torsions-)Trägheitsmoment als Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Rechtecke, wobei die Werte mit einem Korrekturfaktor η belegt werden können.

$$\boxed{I_T \;=\; \eta\,\frac{1}{3}\cdot\sum\cdot a_i\cdot t_i^3} \tag{10.13}$$

mit

η	$0,99$	$1,12$	$1,12$	$1,3$

Für Normalprofile können die Torsionsträgheitsmomente Tabellenwerken entnommen werden.

Das Torsionswiderstandsmoment ergibt sich zu:

$$\boxed{W_T \;=\; \frac{I_T}{t_{max}}} \tag{10.14}$$

Damit trifft die größte Schubspannung bei dünnwandigen offenen Querschnitten am **dicksten** Blech auf.

Die Schubspannung ist über die Blechdicke linear verteilt.

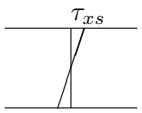


Abbildung 10.14: Verteilung der Schubspannungen bei offenen dünnwandigen Querschnitten

Kapitel 11

Arbeitssatz

Berechnung von Verformungsgrößen mit Hilfe des Arbeitssatzes

Grundlegend für die folgende Betrachtung ist die Überlegung, dass sich ein System unter einer Beanspruchung verformt und nach Entfernung der Belastung wieder die Ausgangskonfiguration einnimmt.
Idealelastische Systeme zeigen dieses Verhalten. Damit sich dieser Vorgang vollziehen kann, muss die Arbeit, die die äußeren Kräfte während des Beanspruchungsvorganges leisten, im System als innere Arbeit W reversibel gespeichert sein. Es muss gelten

$$A = W$$

Hierbei wird die äußere Arbeit A von den angreifenden Kräften auf den Wegen der elastischen Formänderung und die innere Arbeit W von den Spannungen auf den Wegen der Verzerrungen geleistet.
Bei allen Arbeiten wird zwischen Eigenarbeit und Verschiebungsarbeit unterschieden.
Eigenarbeit ist die Arbeit, die von den Kräften auf den Wegen geleistet wird, die sie selbst verursachen. **Verschiebungsarbeit** leisten Kraftgrößen auf Wegen, die von einer anderen Kraftgruppe oder Ursache (Temperatur) hervorgerufen werden.

Die Arbeit der äußeren Kräfte:

11.1 Eigenarbeit

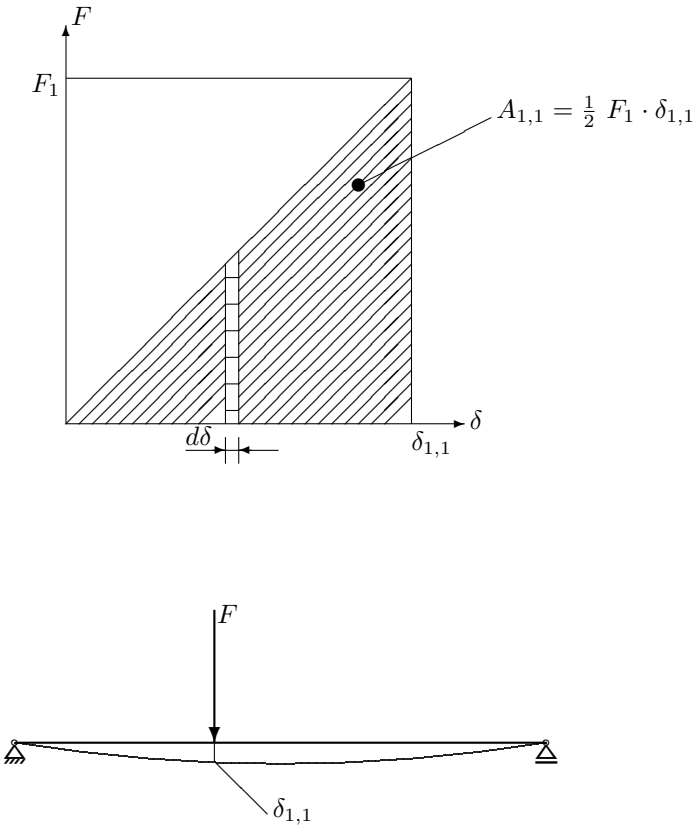


Abbildung 11.1: Eigenarbeit

Auf ein System wird sehr langsam eine Kraft F aufgebracht, so dass die sich einstellende Verformung δ unter der Kraft F ihr stets entspricht (statische Lastaufbringung). Mit der Steigerung der Kraft F wächst die Verformung δ, bis die Endgröße der Kraft $F = F_1$ erreicht ist. Die Endverformung ist $\delta_{1,1}$.

Die Arbeit ist:

$$A_{1,1} = \int_0^{\delta_{1,1}} F \cdot d\delta$$

mit

$$F = \frac{F_1}{\delta_{1,1}} \cdot \delta$$

erhält man:

$$A_{1,1} = \int_0^{\delta_{1,1}} \frac{F_1}{\delta_{1,1}} \cdot \delta \; d\delta = \frac{F_1}{\delta_{1,1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\delta^2\right]_0^{\frac{F_1}{\delta_{1,1}}}$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \delta_{1,1}$$

Die Eigenarbeit ist die Fläche des schraffierten Dreiecks unter der F über δ Beziehung.

11.2 Verschiebungsarbeit

Ein System wird durch eine Kraft F_1 belastet. Danach wird eine Kraft F_2 aufgebracht. Dies ruft auch eine Verschiebung $\delta_{1,2}$ unter der Kraft F_1 hervor. Da die Kraft F_1 schon zu Beginn der Lastaufbringung von F_2 die volle Größe hatte, ist die Verschiebungsarbeit

$$A_{1,2} = F_1 \cdot \delta_{1,2}$$

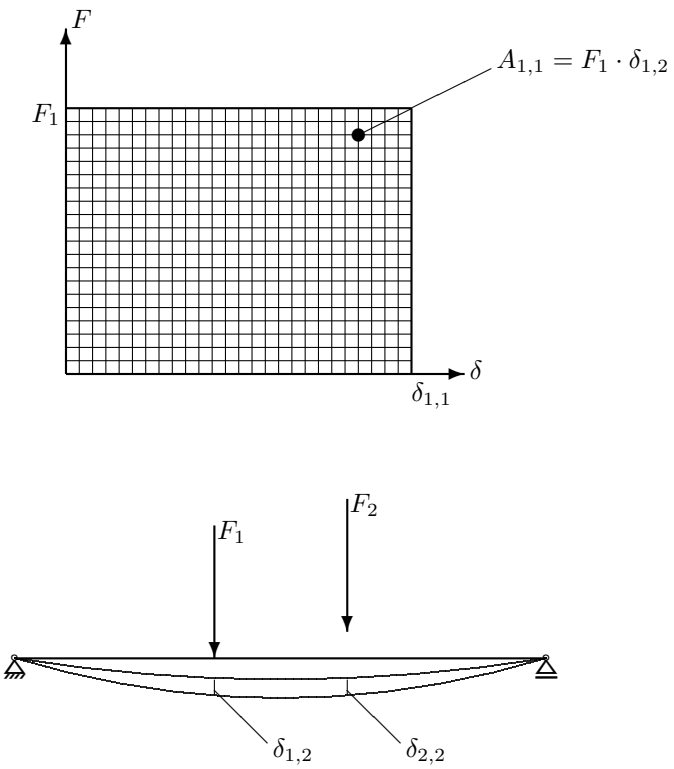


Abbildung 11.2: Formänderungsarbeit aus zwei Kräften

Bei der Verschiebungsarbeit wird erst eine Kraft F_1 aufgebracht, erst dann wird das System mit F_2 belastet. Die Verschiebungsarbeit ist die Arbeit, die die Kraft

F_1 auf dem Weg leistet, der infolge des Aufbringens der Kraft F_2 entsteht.

11.3 Gilt das Superpositionsprinzip auch für Arbeiten?

Nun soll der Frage nachgegangen werden, ob das Superpositionsprinzip auch für Arbeit gilt. Eine Feder wird nacheinander durch zwei Kräfte F_1 und F_2 belastet. Die dadurch ausgelösten Verschiebungen sind δ_1 und δ_2. Es zeigt sich, dass die Verschiebung aus beiden Kräften $\delta_3 = \delta_1 + \delta_2$ ist. Das Superpositionsgesetz ist für Verschiebungen gültig.

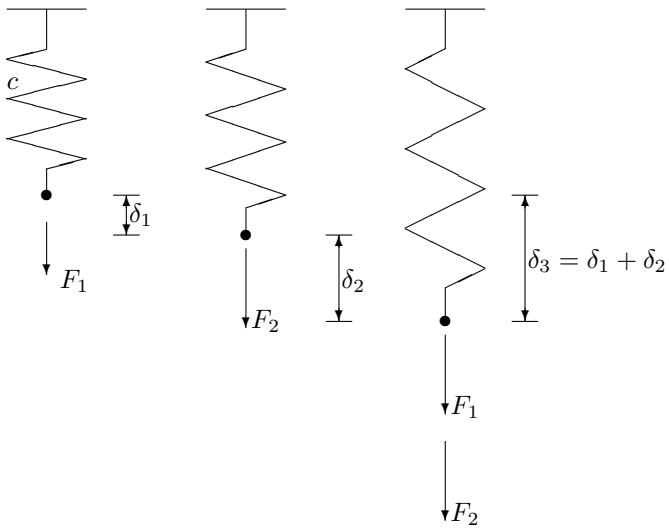


Abbildung 11.3: Belastung einer Feder

$$
\begin{aligned}
F_3 &= F_1 + F_2 \\
\delta_3 &= \delta_1 + \delta_2 \\
\delta_1 &= \frac{F_1}{c}; \qquad \delta_2 = \frac{F_2}{c} \\
\delta_1 + \delta_2 &= \frac{F_1}{c} + \frac{F_2}{c} = \frac{F_1 + F_2}{c} = \frac{F_3}{c} = \delta_3
\end{aligned}
$$

Für Verschiebungen und Kräfte gilt das ***Superpositionsprinzip***!

Gilt das Superpositionsgesetz auch für die Arbeit?
Nun werden die Arbeit, die die Kraft $F_3 = F_1 + F_2$ auf den eigenen Wegen leistet angeschrieben:

$$A_3 = \frac{1}{2}F_3 \cdot \delta_3 \qquad \text{mit} \quad F_3 = c \cdot \delta_3$$

$$A_3 = \frac{1}{2}c \cdot \delta_3^2 \qquad \text{mit} \quad \delta_3 = \delta_1 + \delta_2$$

$$A_3 = \frac{1}{2}c \cdot (\delta_1 + \delta_2)^2$$

$$A_3 = \frac{1}{2}c \cdot (\delta_{1,2} + 2 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 + \delta_{2,2}) \qquad \text{mit} \quad \delta_1 = \frac{F_1}{c} \quad , \quad \delta_2 = \frac{F_2}{c}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}c \cdot (\frac{F_1}{c} \cdot \delta_1 + 2 \cdot \frac{F_1}{c} \cdot \delta_2 + \frac{F_2}{c} \cdot \delta_2)$$

$$A_3 = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \delta_1 + \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot \delta_2}_{Eigenarbeiten} + \underbrace{F_1 \cdot \delta_2}_{Verschiebungsarbeit}$$

$$A_3 = A_1 + A_2 + A_{1,2}$$

$$A_3 \neq A_1 + A_2$$

Wie man erkennen kann, gilt das Superpositionsgesetz nicht für die Arbeiten!

11.4 Bettischer Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungsarbeit

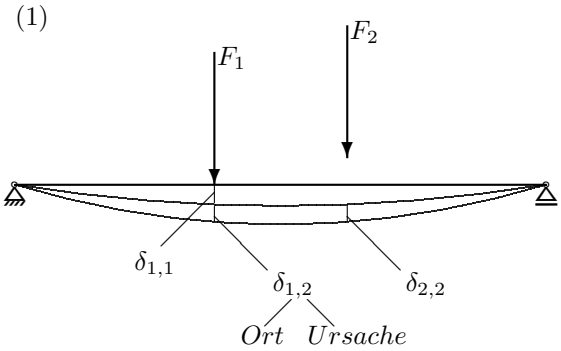


Abbildung 11.4: Satz von Betti

Das System (1) wird zuerst durch eine Last F_1 belastet. Unter der Last F_1 biegt sich das System um $\delta_{1,1}$ durch. Dann wird die Last F_2 aufgebracht. Unter der

Last F_2 biegt sich das System um $\delta_{2,2}$ durch, an der Stelle 1, wo die Last 1 angreift, biegt sich das System um $\delta_{1,2}$ durch.

Die Arbeit, die die Kräfte F_1 und F_2 geleistet haben, beträgt:

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= A_{1,1} + A_{2,1} + A^*_{1,2} \\ A^{(1)} &= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \delta_{1,1} + \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot \delta_{2,2}}_{Eigenarbeiten} + \underbrace{F_1 \cdot \delta_{1,2}}_{Verschiebungsarbeit} \end{aligned}$$

Dann wird das gleiche System zuerst mit der Last F_2, danach mit der Last F_1 belastet.

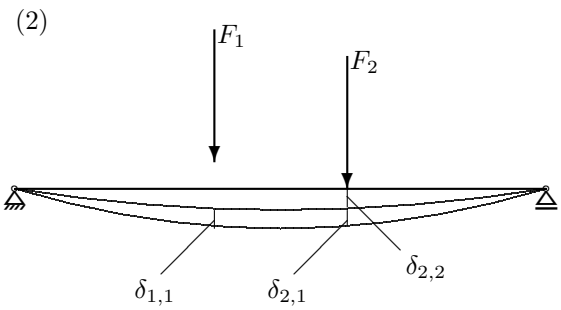


Abbildung 11.5: Satz von Betti

Die Arbeit der äußeren Kräfte beträgt:

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= A_{1,1} + A_{2,2} + A^*_{2,1} \\ A^{(2)} &= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot \delta_{2,2} + \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \delta_{1,1}}_{Eigenarbeiten} + \underbrace{F_1 \cdot \delta_{2,1}}_{Verschiebungsarbeit} \end{aligned}$$

Da die im System gespeicherte Arbeit nicht von der Reihenfolge, in der die Kräfte aufgebracht werden, abhängig sein kann, muss gelten:

$$A^{(1)} = A^{(2)}$$

$$A_{1,1} + A_{2,1} + A^*_{1,2} = A_{1,1} + A_{2,2} + A^*_{2,1}$$

Satz von Betti:

$$\begin{aligned} A^*_{1,2} &= A^*_{2,1} \\ F_1 \cdot \delta_{1,2} &= F_1 \cdot \delta_{2,1} \end{aligned} \tag{11.1}$$

Die Arbeit, die die Kraftgruppe 1 auf den Wegen leistet, die von der Kraftgruppe 2 hervorgerufen wurden, ist gleich groß der Arbeit, welche die Kraftgruppe 2 auf den Wegen leistet, die durch die Kraftgruppe 1 ausgelöst wurden.

11.5 Maxwellscher Satz

Der Satz von Maxwell behandelt den Sonderfall des Satzes von Betti, bei dem eine der beteiligten Kraftgruppen aus einer Einzelkraftgröße besteht, die den Betrag 1 hat.
Um dies zu kennzeichnen, wird das Komma zwischen den Indizes $\delta_{1,2}$ und $A_{1,2}$ fortgelassen.

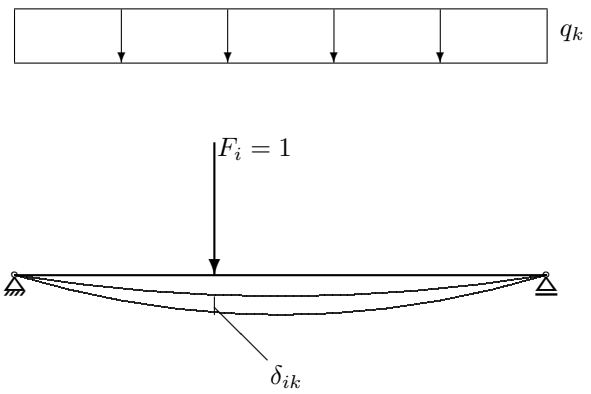


Abbildung 11.6: Maxwellscher Satz

Zunächst wird das System durch eine Kraftgröße $F_i = 1$ belastet. Danach durch eine zweite Kraftgruppe q_k.
Die Verschiebungsarbeit, die die Last $F_i = 1$ auf den Wegen leistet, die die Kraftgruppe hervorruft, ist δ_{ik}.

$\delta_{i\ k}$
Ort *Ursache* Verschiebung an der Stelle i, die die Last q_k hervorruft

Wenn wir in der Lage wären, die innere Arbeit W_{ik} zu bestimmen, die die Spannungen infolge der Kraft $F_i = 1$ auf den Verzerrungen ε leisten, die von der Kraftgruppe K (q_k) ausgelöst werden, so könnte man leicht die Verschiebung bestimmen, die sich unter und in Richtung der Kraftgröße F_i vollzieht, während die Kraftgruppe K aufgebracht wird.

$$W_{ik} = F_i \cdot \delta_{ik} \qquad \text{mit } F_i = 1$$

$$W_{ik} = 1 \cdot \delta_{ik}$$

Wie gezeigt werden wird, ist es leicht möglich, die innere Arbeit W_{ik} zu bestimmen, so dass dies eine Methode ist, Verformungsgrößen zu bestimmen.

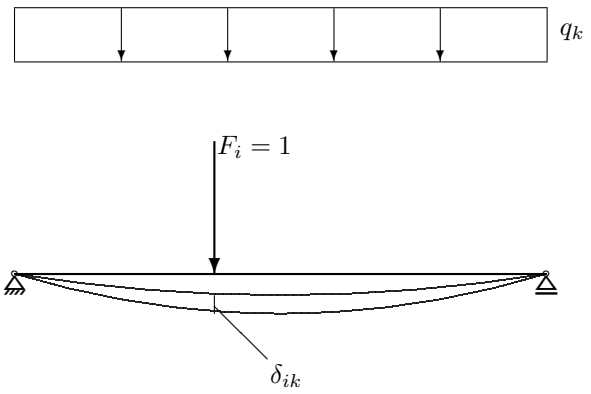
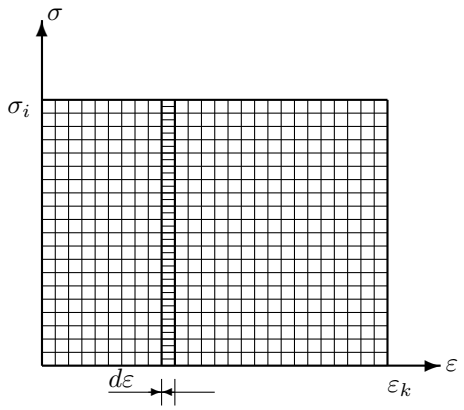


Abbildung 11.7: Maxwellscher Satz

Zunächst wird die Kraft $F_i = 1$ aufgebracht. Es stellt sich im ganzen Stab eine Spannungsverteilung σ_i, τ ein. Danach wird die Kraftgruppe q_k (langsam)aufgebracht.

Die Verzerrungen, ausgelöst durch diese Kraftgruppe wachsen zum Endwert ε_k, während die Spannungen σ_i bereits voll wirken.



Die spezifische innere Arbeit W^* ist auf ein Volumenelement der Größe 1 bezogen

$$W^* = \int_0^{\varepsilon_k} \sigma_i \, d\varepsilon = \sigma_i \cdot \varepsilon_k = \bar{\sigma} \cdot \varepsilon_k$$

Es ist üblich, Spannungen und Schnittgrößen, die aus einer gedachten (virtuellen) Kraftgruppe hervorgerufen worden sind, mit einem Querstrich zu kennzeichnen.
Die innere Arbeit W_{ik} erhält man durch Integration der spezifischen Arbeit über das Volumen V.

$$\begin{aligned} dW_{ik} &= W^* \cdot dV \\ W_{ik} &= \int_V W^* \; dV = \int \bar{\sigma} \cdot \varepsilon_k \; dV \end{aligned}$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz erhält man : $\sigma = \frac{E}{\varepsilon} \qquad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

$$W = \int \bar{\sigma} \frac{\sigma}{E} \; dx$$

Aus der Stabtheorie ist bekannt: $\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad , \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{M}_y}{I_y} \cdot z$

$$\begin{aligned} W &= \int \frac{M_y}{I_y} \cdot z \cdot \frac{\bar{M}_y}{E \cdot I_y} \cdot z \; dA \; dx \\ W &= \int \frac{M_y \cdot \bar{M}_y}{E \cdot I_y^2} \cdot \underbrace{\int z^2 \; dA}_{I_y} \; dx \\ W &= \int \frac{M_y \cdot \bar{M}_y}{E \cdot I_y} \; dx \qquad (11.2) \end{aligned}$$

Da $E \cdot I_y$ meist abschnittsweise konstant ist und die Integralausdrücke tabelliert vorliegen, kann die Verformung δ_{ik} leicht bestimmt werden.

Arbeit der äußeren Kräfte = FÄA (Formänderungsarbeit) der inneren Kräfte

$$
\begin{aligned}
\delta_{12} \cdot 1 \quad = \quad & \int \frac{M_y \cdot \bar{M}_y}{E \cdot I_y}\, dx && \text{aus Biegemoment } M_y \\
& + \int \frac{N \cdot \bar{N}}{E \cdot I_y}\, dx && \text{aus Normalkraft} \\
& + \int \kappa_z \cdot \frac{Q_z \cdot \bar{Q}_z}{G \cdot A}\, dx && \text{aus Querkraft } Q_z \\
& + \int \kappa_z \cdot \frac{Q_y \cdot \bar{Q}_y}{G \cdot A}\, dx && \text{aus Querkraft } Q_y \\
& + \int \frac{M_x \cdot \bar{M}_x}{G \cdot I_T}\, dx && \text{aus Torsion} \\
& + \int \frac{M_y \cdot \bar{M}_y}{E \cdot I_z}\, dx && \text{aus Biegemoment } M_z \qquad (11.3)
\end{aligned}
$$

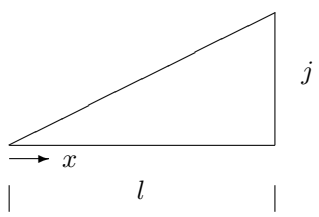
Integraltafeln

$$\int_l M \cdot \bar{M}\, ds$$

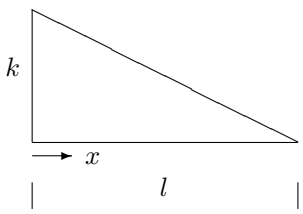
Der Wert des bestimmten Integrals $\int_l M \cdot \bar{M}\, ds$ hängt von den Randwerten und der Form der beteiligten Funktionen ab.

Beispiele:

$M = \frac{j}{l} \cdot x$



$\bar{M} = \frac{k}{l} \cdot (l - x)$



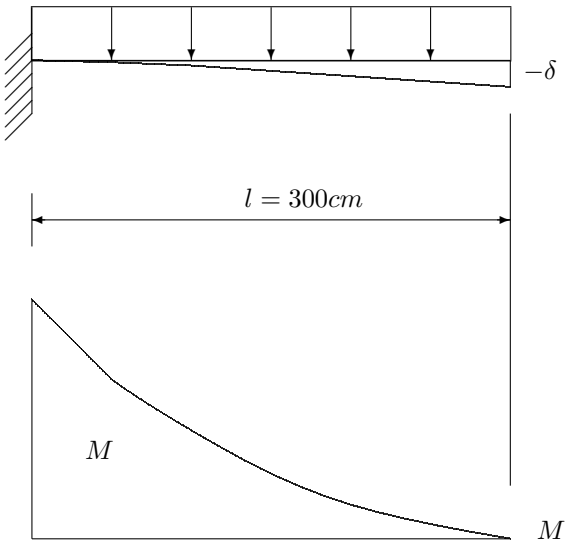
$$
\begin{aligned}
\int_l M \cdot \bar{M}\ ds &= \int_0^l \frac{j}{l} \cdot x \cdot \frac{k}{l} \cdot (l - x)\ dx \\
&= \frac{j \cdot k}{l^2} \cdot \int_0^l (l \cdot x - x^2)\ dx \\
&= \frac{j \cdot k}{l^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l \cdot x^2 - \frac{1}{3} x^3\right]_0^l \\
&= \frac{j \cdot k}{l^2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot l^3 - \frac{1}{3} l^3 - 0\right]_0^l \\
&= \frac{j \cdot k}{l^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot l^3 = \frac{1}{6} \cdot l \cdot j \cdot k
\end{aligned}
$$

Die Integralwerte sind in Handbüchern für verschiedene Funktionen vertafelt.

11.6 Aufgabenbeispiele

Beispiel 1:

Wirkliche Belastung

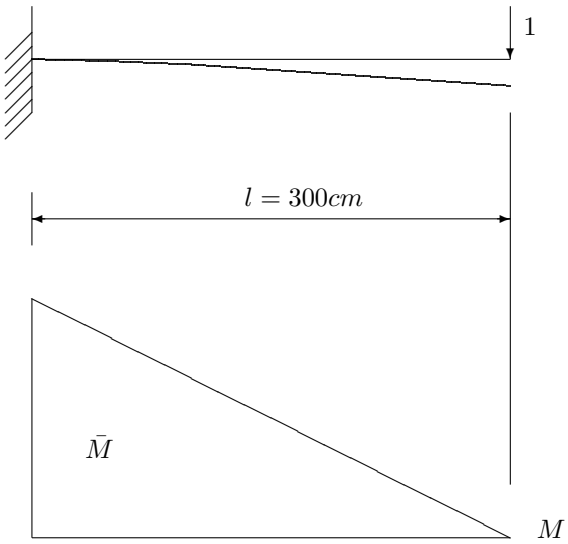


$q = 0,3\ \mathrm{kN/cm}$
$E = 2,1 \cdot 10^4\ \mathrm{kN/cm^2}$
$I = 3000cm^4$

ges: δ

$M_{min} = -q \cdot \frac{l^2}{2} = 0,3 \cdot \frac{300^2}{2} = \underline{-13500\ kNcm}$

Virtuelle Belastung



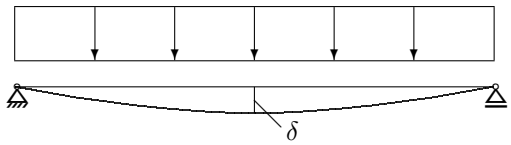
$\overline{M_{min}} = -1 \cdot 300 = \underline{-300\ kNcm}$

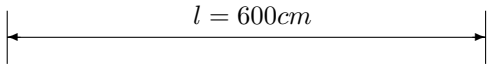
$$\begin{aligned}
\delta \cdot 1 &= \int_0^l M\ \bar{M} \frac{1}{E \cdot I}\ dx \\
&= \frac{1}{4} \cdot 300 \cdot (-13500) \cdot (-300) \cdot \frac{1}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 3000} \\
&= \underline{\underline{4,82\ cm}}
\end{aligned}$$

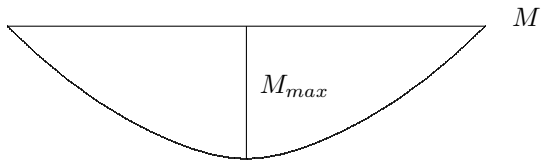
Durchbiegung an der Spitze $\underline{\underline{\delta = 4,82\ cm}}$

Beispiel 2:

Wirkliche Belastung





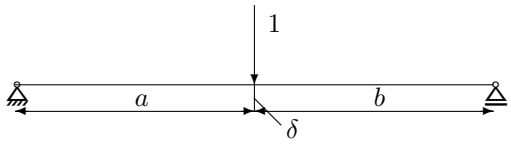


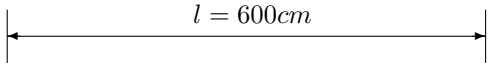
$q = 0,3\ {}^{\mathrm{kN}}/_{\mathrm{cm}}$
$E = 2,1 \cdot 10^4\ {}^{\mathrm{kN}}/_{\mathrm{cm}^2}$
$I = 3000cm^4$

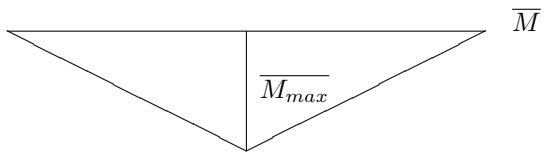
ges: δ

$M_{min} = q \cdot \frac{l^2}{8} = 0,3 \cdot \frac{600^2}{8} = \underline{13500\ kNcm}$

Virtuelle Belastung







$\overline{M_{max}} = F \cdot \frac{a \cdot b}{l} = 1 \cdot \frac{300 \cdot 300}{600} = \underline{150\ kNcm}$

$$\begin{aligned}
\delta \cdot 1 &= \int_0^l M\ \bar{M} \frac{1}{E \cdot I}\ dx \\
&= \frac{5}{12} \cdot 600 \cdot 13500 \cdot 150 \cdot \frac{1}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 3000} \\
&= \underline{\underline{8,036\ cm}}
\end{aligned}$$

Die Durchbiegung ist $\underline{\underline{\delta = 8,036\ cm}}$

Kapitel 12

Kraftgrößenverfahren

Bei statisch unbestimmten Systemen liegen mehr Auflagerbindungen vor, als mit den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können.

Wie bereits gezeigt wurde, können diese Auflagergrößen auch über die Integration der Differentialgleichung der Biegelinie ermittelt werden, weil hierbei außer den Gleichgewichtsbedingungen auch die Verformungseigenschaften herangezogen werden.

Mit dem Kraftgrößenverfahren kann man die Überzähligen, d.h. die nicht durch die Gleichgewichtsbedingungen bestimmbaren Auflagerreaktionen, noch effizienter ermitteln.

Selbstverständlich benötigt auch das Kraftgrößenverfahren die Verformungseigenschaften.

Zu Bild 1:

Sein Grundgedanke ist folgender:

- Zunächst entfernt man von dem statischen System soviel Auflagerbindungen, bis es statisch bestimmt, aber unverschieblich geworden ist.
  Dieses System wird das statisch bestimmte Hauptsystem genannt (stat. best. HS)
- Dann ermittelt man die Verschiebungen für die Freiheitsgrade, deren Auflagerbindungen man entfernt hat.
  Die Verschiebung fasst man zum Vektor $\delta_{i,L}$ zusammen.
- Beim statisch unbestimmten System müssen diese Verschiebungen verschwinden. Da sich beim statisch bestimmten Hauptsystem Verschiebungen ungleich Null ergeben, liegt ein Fehler gegenüber dem statisch unbestimmten System vor.
  Um ihn zu korrigieren, bestimmt man eine Kraftgruppe , die anstelle der entfernten Auflagerbindungen wirkt und die Verschiebungen und die entsprechenden Verdrehungen zu Null werden lässt.

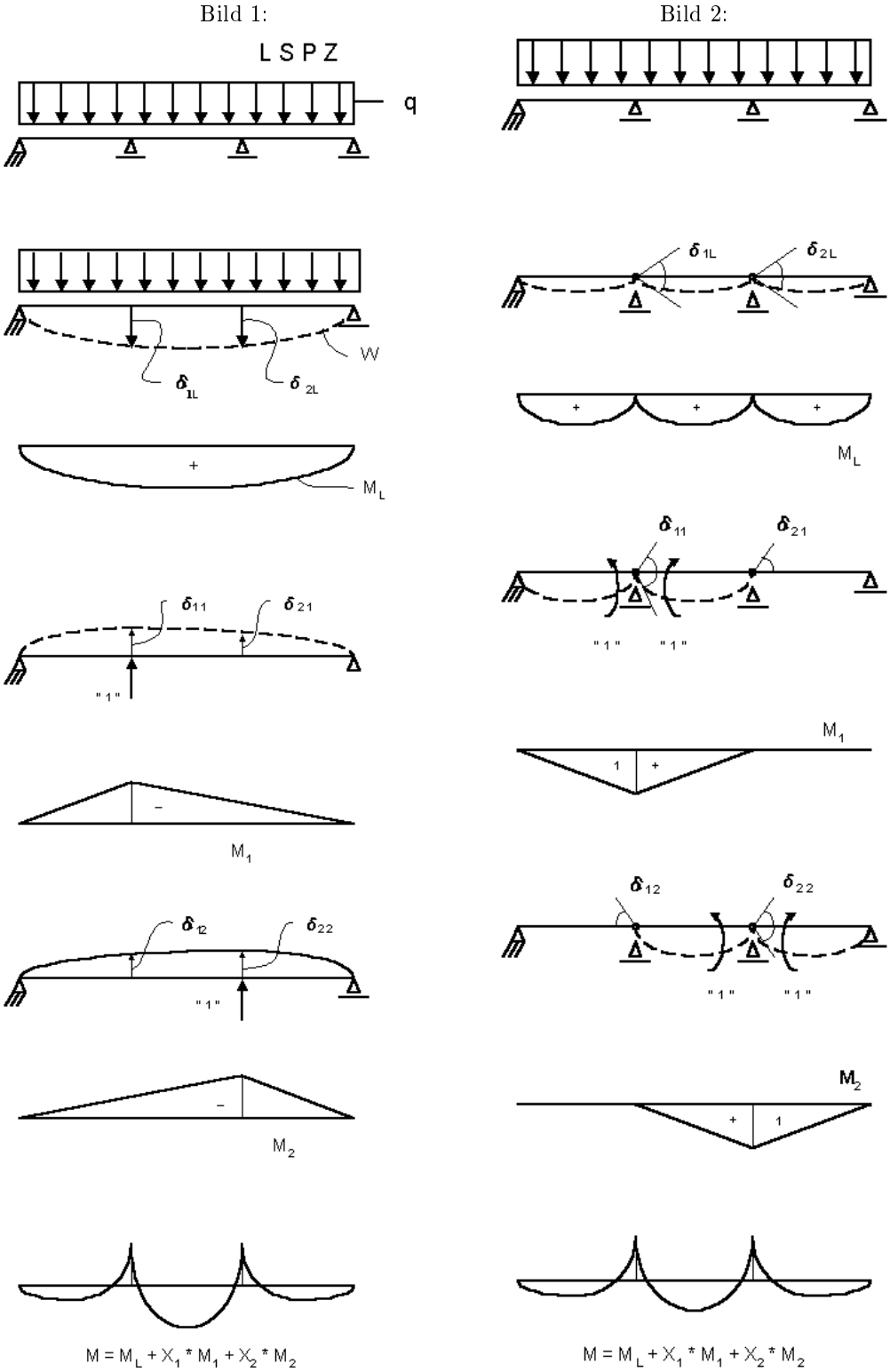


Tabelle 12.1: Kraftgrößenverfahren

Diese Kraftgruppe ermittelt man auf die folgende Weise:

- Auf das statisch bestimmte HS bringt man nacheinander anstelle einer entfernten Auflagerbindung eine entsprechende virtuelle Kraftgröße mit dem Betrag „1“ auf und bestimmt, wie groß die Verschiebung infolge der Kraftgröße 1 in Richtung der Eins – Kraftgröße ist . Diese Verschiebungen fasst man in der Matrix δ_{iL} zusammen.

- Danach bestimmt man die Verschiebung die den k anderen entfernten Auflagerbindungen entsprechen.

- Die Verschiebung infolge der Eins – Kraftgröße an der Stelle i infolge der Kraft k (Ursache) nennt man δ_{ik}.

- Diesen Vorgang wiederholt man für alle Auflagerbindungen, die man entfernt hat, und stellt die Verschiebungen infolge der Eins – Kraftgröße zur Matrix δ_{ik} zusammen.

- Nun muss noch bestimmt werden, mit welchen Faktoren X_k man die Eins – Kräfte multiplizieren muss, damit die Verschiebung an den Stellen, an denen Auflagerbindungen entfernt worden sind, zu Null werden.
  Als Formel ausgedrückt bedeutet dies:

$$\delta_{ik} \cdot X_k + \delta_{iL} = 0 \qquad \rightarrow \quad \delta_{ik} \cdot X_k = -\delta_{iL}$$

- Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit dem Unbekanntenvektor X_k. Die Matrix δ_{ik} nennt man die Koeffizientenmatrix und $-\delta_{iL}$ die Rechte Seite weil sie auf der rechten Seite des Gleichungssystems steht.

- Was ist unter „die den entfernten Auflagerbindungen entsprechende Kraftgröße“ zu verstehen?
  Hat man eine Auflagerkraft entfernt, die eine Verschiebung (Translation) unterdrückt, so führt man eine virtuelle Kraft ein, die an der Stelle und in Richtung der unterdrückten Verschiebung wirkt.
  Hat man eine Einspannung entfernt und lässt man beim statisch bestimmten Hauptsystem eine Verdrehung zu, so muss man als virtuelle Kraftgröße ein Moment mit dem Betrag 1 anbringen.

- **So ist in Bild 2 vorgegangen worden:**Oben ist ausgeführt worden, dass das statisch bestimmte Hauptsystem durch Entfernen von Auflagerbindungen erzeugt wird, es kann aber auch, und häufig ist dies zweckmäßig, durch Einfügen von Gelenken in ein statisch bestimmtes System überführt werden.
  Führt man ein Momentengelenk ein, so ist die entsprechende virtuelle Kraftgruppe ein Momentenpaar, das an beiden Ufern des Gelenkes wirkt. Die entsprechende Verschiebung ist die gegenseitige Verdrehung der Querschnitte.

- Kennt man den Unbekanntenvektor, kann man die Biegelinie und die Schnittgrößen des statisch unbestimmten System durch Superposition bestimmen:

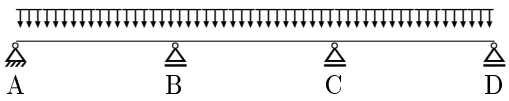
$$\begin{bmatrix} W \\ N \\ Q \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_L + X_1 \cdot W_1 + X_2 \cdot W_1 \\ N_L + X_1 \cdot N_1 + X_2 \cdot N_1 \\ Q_L + X_1 \cdot Q_1 + X_2 \cdot Q_1 \\ M_L + X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Durchbiegung \\ Normalkraft \\ Querkraft \\ Biegemoment \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

Das Kraftgrößenverfahren erfordert dementsprechend folgende Schritte:

1. Bestimmung der Schnittgrößen infolge der gegebenen Belastung am statisch bestimmten Hauptsystem, meist genügt die Darstellung des Biegemomentenverlaufs.
   (Lastspannungszustand LSPZ)
2. Bestimmung der Schnittgrößen infolge der Eins – Kraftgrößen am statisch bestimmten Hauptsystem.
3. Ermittlung der Verschiebungen oder (gegenseitigen) Verdrehungen der Freiheitsgrad die den entfernten Auflagerfreiheitsgraden oder den eingeführten Gelenken entsprechen infolge Wahl eines geeigneten statisch bestimmten Hauptsystem der äußeren Belastung (LSPZ) mit dem Arbeitssatz δ_{iL}.
4. Ermittlung der Verschiebungen oder (gegenseitigen) Verdrehungen infolge der Eins – Kraftgrößen δ_{ki}.
5. Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems.
6. Superposition der Ergebnisse

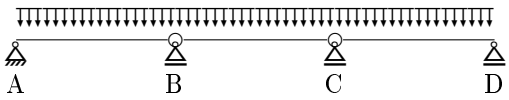
12.1 Beispiel für das Kraftgrößenverfahren

Das Kraftgrößenverfahren soll an einen Träger auf vier Stützen mit gleicher Stützweite $l = 4m$ und konstanter Biegesteifigkeit EI gezeigt werden. Der Träger ist mit einer Gleichlast von q=5 kN/m belastet.



12.1.1 Statisch bestimmtes Hauptsystem

Das System ist 2-fach statisch unbestimmt, ein statisch bestimmtes Hauptsystem erhält man durch Einfügen von zwei Gelenken über den Auflagern B und C



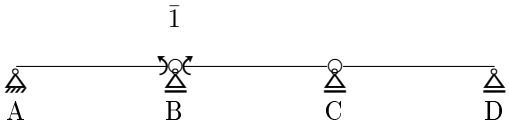
Lastspannungszustand

Die Biegemomentenlinie des Lastspannungszustands hat folgendes Aussehen. Die maximalen Momente sind:

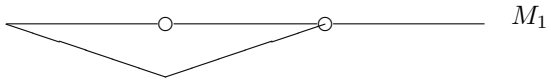
$$M_L = q\ l^2/8 = 10kNm$$

Eigenspannungszustände

Nun kommen die Eigenspannungszustände: Als erstes ein Momentenpaar der Größe $\bar{1}$ am Auflager B:



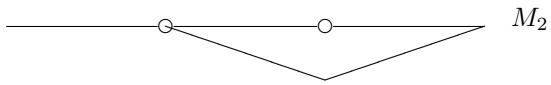
Die Momentenlinie für oben dargestellten Lastfall hat folgendes Aussehen:



Mit dem größten Moment $M_1 = 1$

Nun ein Momentenpaar der Größe $\bar{1}$ am Auflager C:

Die Momentenlinie für oben dargestellten Lastfall hat folgendes Aussehen:



Mit dem größten Moment $M_2 = 1$

Nun können die gegenseitigen Verdrehungen der Endtangenten an den eingeführten Lagern B und C mit dem Arbeitssatz bestimmt werden:

$$\delta_{1L} = \delta_{2L} = \frac{1}{EI}\frac{1}{3}\frac{q\ l^2}{8}\ (l+l) = \frac{1}{EI}\frac{80}{3}[rad]$$

Als nächstes werden die gegenseitigen Verdrehungen der Endtangenten am Auflager B infolge des Moments am Auflager B δ_{11} und des Moments am Auflager C δ_{12} bestimmt. Wegen des symmetrischen Aufbaus gilt: $\delta_{22} = \delta_{11}$.

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EI}\frac{1}{3}\ 2\ l\ 1^2 = \frac{1}{EI}\frac{8}{3}[rad]$$

und

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI}\frac{1}{6}\ l\ 1^2 = \frac{1}{EI}\frac{2}{3}[rad]$$

Lösung der Elastizitätsgleichung

Die Elastizitätsgleichung lautet:

$$\delta_{iL} + \delta_{ij}\ X_j = 0$$

und der Lösungsvektor:

$$-\delta_k i^{-1}\delta_{iL} = X_k$$

$$\frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} + \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}\ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.2}$$

mit der Lösung

$$X_k = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix} \tag{12.3}$$

wie man sich durch Einsetzen überzeugen kann.

12.1.2 Superposition

Die Momentenlinie (und auch die Verläufe der anderen Schnittgrößen) findet man durch Superposition:

$$M = M_L + X_1\ M_1 + X_2\ M_1$$

Das Biegemoment am Auflager A wird zu:

$$M(A) = M_L(A) + X_1\ M_1(A) + X_2\ M2(A) = 0 + 0 + 0 = 0$$

Für das Biegemoment an der Stütze B erhält man:

$$M(B) = M_L(B) + X_1\ M_1(B) + X_2\ M2(A) = 0 + (-8)\ 1 + (-8)\ 0 = -8kNm$$

und für die Stütze C ergibt sich:

$$M(C) = M_L(C) + X_1\ M_1(C) + X_2\ M2(C) = 0 + (-8)\ 0 + (-8)\ 1 = -8kNm$$

In den Feldmitten ergeben sich folgende Werte:
Feld 1:

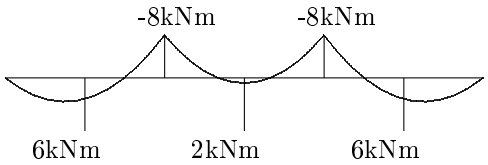
$$M(1) = M_L(1) + X_1\ M_1(1) + X_2\ M2(1) = 10 + (-8)\ 0.5 + (-8)\ 0 = 10 - 4 = 6kNm$$

Feld 2:

$$M(2) = M_L(2) + X_1\ M_1(2) + X_2\ M2(2) = 10 + (-8)\ 0.5 + (-8)\ 0.5 = 10 - 4 - 4 = 2kNm$$

Feld 3:

$$M(3) = M_L(3) + X_1\ M_1(3) + X_2\ M2(3) = 10 + (-8)\ 0 + (-8)\ 0.5 = 10 - 4 = 6kNm$$



M des statisch unbestimmten Systems

Wie man dem Momentenverlauf entnehmen kann, befindet sich das maximale Feldmoment nicht in Feldmitte.
Die Auflagerkraft A beträgt:

$$A = q * l/2 + M_B/l\ =\ 5 \cdot 4/2 - 8/4 = 8kN$$

Dann beträgt das maximale Feldmoment:

$$M_{max} = \frac{A^2}{2\ q} = \frac{8^2}{2\ \cdot 5} = 6.4kNm$$

und wirkt bei

$$A/q = 1.6m$$

vom linken Auflager.

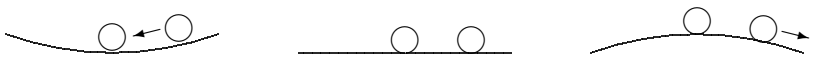
Kapitel 13

Stabilitätsprobleme

Bei der Untersuchung der Stabilität des Gleichgewichts betrachtet man, wie sich ein System verhält, wenn man es ein kleines Stück aus der Gleichgewichtslage entfernt.
Man unterscheidet dabei drei Fälle

1. Stabiles Gleichgewicht: nach der Störung des Systems stellt sich die alte Gleichgewichtslage wieder ein.
2. Indifferentes Gleichgewicht: Der Körper verharrt in der Nachbarlage.
3. Labiles Gleichgewicht: der Körper entfernt sich nach einer kleinen Auslenkung immer weiter von seiner Ausgangslage.

Labiles Gleichgewicht ist bei technischen Konstruktionen immer, indifferentes Gleichgewicht bis auf Ausnahmen meist unerwünscht. Beiden Zuständen ist gemeinsam, das der Zusammenhang zwischen Belastung ind Verformung nicht eindeutig ist. Bei gegebener Belastung sind mehrere Verschiebungskonfigurationen möglich. In der Regel wird stabiles Gleichgewicht gewünscht.
Die drei Fälle werden durch das Kugelgleichnis anschaulich dargestellt:



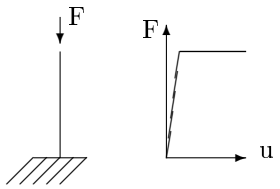
Stabiles Gleichgewicht Indifferentes Gleichgewicht Labiles Gleichgewicht

Den indifferenten und den labilen Gleichgewichtszustand bezeichnet man als instabil.
Stabilitätsversagen ist ein sehr gefährlicher Versagensfall, da das Versagen plötzlich und ohne Vorankündigung auftritt.

13.1 Die wichtigsten Stabilitätsfälle

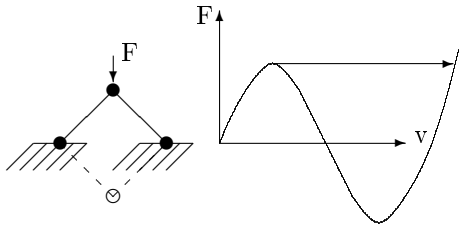
Stabknicken

Der einfachste und wichtigste Stabilitätsfall ist die Stabknickung. Wenn man einen an einem Ende eingespannten Stab am anderen Ende mit einer Druckkraft belastet, so lässt sich die Last bis zu einer bestimmten Größe, der Knicklast, steigern, ohne dass eine nennenswerte Verschiebung in Richtung der Stabachse (u) auftritt. Wird diese Grenzlast überschritten, wachsen die Verschiebungen sehr schnell an, wodurch das Versagen des Bauteils eingeleitet wird.



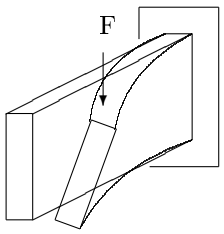
Das Durchschlagproblem

Beim Durchschlagproblem eines Stabzweischlages liegt ein anderes Stabilitätsproblem vor. Bis der Duchschschlagpunkt erreicht ist steigt die Kraft mit der Verschiebung in vertikale Richtung (v) (fast) proportional an. Dann gibt es eine schlagartige Verschiebung in die Konfiguration v=-h (gestrichelt). Aus den Druckstäben sind Zugstäbe geworden. Anschließend ist wieder eine weitere Steigerung er Last möglich bis die Zugfestigkeit des Werkstoffes erreicht worden ist. Dieses Stabilitätsproblem nennt man gutartig. Leider ist die Verformung im stabilen Ast oft so groß geworden, dass das Bauteil aus technologischen Gründen unbrauchbar geworden ist.



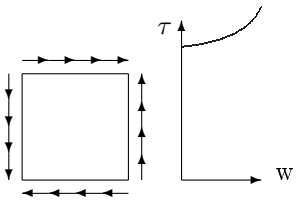
Kippen von Balken

Bei hohen schmalen Balken tritt ein weiteres Stabilitätsproblem, das Kippen, auf. Der durch Biegung belastete Balken ist durch Zug- und Druckspannung beansprucht. Die durch Druckspannungen belastete Zone ist tatsächlich durch Ausknicken gefährdet, wenn nicht die Torsionssteifigkeit des Balkens und Aussteifungen gegen seitliches Ausweichen dies verhindern. Bei diesem Stabilitätsfall kommt es zu einer Verdrehung des Querschnitts, in DIN 18800 „Stahlbauten“ wird dieser Stabilitätsfall als Biegedrillknicken bezeichnet.

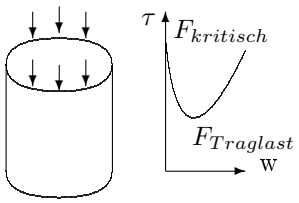


Scheibenbeulen

Den Stabilitätsfall bei Flächenträgern nennt man Beulen. Obwohl Scheiben definitionsgemäß in ihrer Ebene belastet werden, tritt die Verformung senkrecht zur Ebene auf (w). Da Scheiben, je nach Belastung, ein günstiges Nachbeulverhalten haben, spricht man von einem gutartigen Stabilitätsproblem. Wie beim Durchschlagproblem sind die mit dem Nachbeulen eintretenden Verformungen oft so groß, dass das Bauteil praktisch unbrauchbar wird.



Schalenbeulen

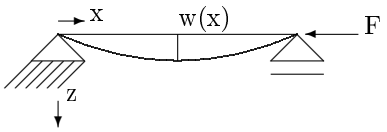


Schalen sind gekrümmte Flächenträger. Schalen, insbesondere Zylinderschalen, neigen zu einem bösartigen Beulproblem weil die Tragfähigkeit nach Erreichen der kritischen Last $F_{kritisch}$ auf ein signifikant niedrigeres Niveau $F_{Traglast}$ zurückfällt. Wegen unvermeidlichen Imperfektionen kann ein Durchschlagen auf die niedrige Traglast schon vor Erreichen der kritischen Last stattfinden.

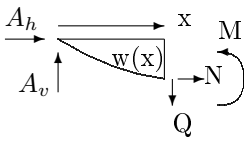
13.2 Die Stabknickung

In den Betrachtungen vor der Stabilität wurde stillschweigend davon ausgegangen, dass die auftretenden Verformungen so klein sind, dass das Gleichgewicht am unverformten System betrachtet werden kann.
Bei der Untersuchung von Stabilitätsproblemen will man gerade wissen, wie sich das System verhält, wenn seine Gleichgewichtslage gestört wurde, es also in eine dicht benachbarte Lage ausgelenkt wurde. Daher muss das Gleichgewicht in der verschobenen Konfiguration untersucht werden.
Dieser Grundkurs zur Technischen Mechanik beschränkt die Ausführungen zur Stabilität auf die Betrachtungen des Eulerschen Knickstabes.

13.2.1 Der Eulersche Knickstab



Wir betrachten einen Stab mit konstantem Querschnitt und konstanter Biegesteifigkeit. Der Stab ist an einem Ende mit einem Festlager, am anderen mit einem Loslager versehen. Dort wird er mit einer (noch unbekannten) Druckkraft F in Stablängsrichtung belastet.



Ziel ist es, die Größe der Druckkraft F zu bestimmen, bei der noch Gleichgewicht möglich ist.

Hierzu führt man and der Stelle x einen (gedachten) Schnitt durch den Stab und trägt Auflagerreaktionen und Schnittgrößen am verschobenen System an. (siehe nebenstehendes Bild.)

Aus Gründen des Gleichgewichts am ganzen System gilt:

$$A_h = F$$

und

$$A_v = 0$$

Die Gleichgewichtsbetrachtung am abgeschnittenen Teil, diesmal am verschobenen System, liefert:

$$\sum^{\rightarrow} F_x = \quad 0 \quad = A_h + N \rightsquigarrow N = -A_h = -F \tag{13.1}$$

$$\sum^{\curvearrowleft} M^x = \quad 0 \quad = -A_h \; w(x) + M(x) \tag{13.2}$$

In Gleichung 13.2 wird nun $A_h = -F$ aus Gleichung 13.1 und für M das Elastizitätsgesetz

$$M = -EJw''$$

eingesetzt. Man erhält:

$$-F \; w - EJ \; w'' = 0 \tag{13.3}$$

Die Einführung der Abkürzung

$$\kappa^2 = \frac{F}{EJ} \rightsquigarrow F = \kappa^2 \; EJ \tag{13.4}$$

führt zu:

$$-\kappa^2 \; EJ \; w - EJ \; w'' = 0$$

Die Division durch (-EJ) liefert:

$$\kappa^2 \; w + w'' = 0 \tag{13.5}$$

Gleichung 13.5 ist eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Aus mathematischer Sicht ist es ein Eigenwertproblem. Ihre Lösung ist mit dem $e^{\lambda x}$-Verfahren möglich. Das als Abkürzung eingeführte κ^2 entpuppt sich als Eigenwert des Problems.
Die Mathematik liefert als Lösung:

$$w(x) = A \; \cos(\kappa \; x) + B \sin(\kappa \; x) \tag{13.6}$$

Durch Differenzieren erhält man:

$$w'(x) = -A \; \kappa \; \sin(\kappa \; x) + B \; \kappa \; \cos(\kappa \; x) = \tag{13.7}$$

und

$$w''(x) = -A \; \kappa^2 \; \cos(\kappa \; x) - B \; \kappa^2 \; \sin(\kappa \; x) = -\kappa^2 \; w(x) \tag{13.8}$$

Durch Einsetzen von Gleichung 13.6 und 13.8 in die Differentialgleichung 13.5 kann man sich überzeugen, dass der Lösungsansatz nach Gleichung 13.6 der Differentialgleichung genügt.
Die Konstanten A und B sind über die Randbedingungen

$$w(0) = 0$$

und

$$w(l) = 0$$

zu bestimmen.
Die erste Randbedingung liefert:

$$w(x=0) = 0 = A\underbrace{\cos(0)}_{1} + B\underbrace{\sin(0)}_{0} = A + 0 = 0 \rightsquigarrow A = 0 \tag{13.9}$$

Damit ist die erste Konstante bestimmt.
Die zweite Randbedingung lautet:

$$w(l) = 0 = B\ \sin(\kappa\ l) = 0 \tag{13.10}$$

Gleichung 13.10 ist erfüllt wenn einer der beiden Faktoren B oder $\sin(\kappa\ l)$ verschwindet. Wenn $B = 0$ wird, verschwindet die Verschiebung über die ganze Stablänge, damit ist das Gleichgewicht nicht unter Berücksichtigung der Verformung untersucht und die Zielstellung verfehlt worden. Es bleibt, dass der zweite Faktor $\sin(\kappa\ l)$ verschwindet:

$$\sin(\kappa\ l) = 0 \tag{13.11}$$

Wie man aus Abbildung 13.1 erkennt, verschwindet der zweite Faktor $\sin\kappa\ l$

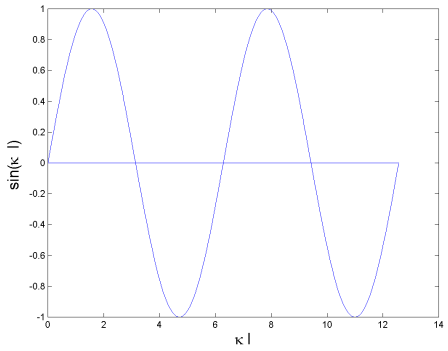


Abbildung 13.1: $\sin(\kappa\ l)$

überall dort, wo $\kappa\ l = n\ \pi$ mit $n = 0, 1, \ldots, \infty$ ist.
Da l eine Konstante ist, muss für κ demnach gelten:

$$\kappa = \frac{n\ \pi}{l}$$

Die Gleichung 13.10 hat unendlich viele Lösungen, unter technischem Gesichtspunkt allein interessant ist die Lösung für $n = 1$, was verständlich wird, wenn Gleichung 13.4 herangezogen wird:

$$\kappa^2 = \frac{F}{EJ} \rightsquigarrow F = \kappa^2\ EJ$$

Für $n = 0$ wird $\kappa = 0$ und damit verschwindet auch F. Den kleinsten positiven, von Null verschiedenen Wert für F erhalten wir bei $n = 1$:

$$F_{ki} = \left[\frac{\pi}{l}\right]^2 EJ = \frac{EJ\ \pi^2}{l^2} \tag{13.12}$$

Die Kraft F hat in Gleichung 13.12 den Index ki bekommen, weil es sich um die kritische Knicklast handelt, weil die Stabachse als ideal gerade und die Lasteinleitung als ideal im Schwerpunkt angenommen wurde. F_{ki} wird auch als Eulersche Knicklast bezeichnet.

13.2.2 Die Form der Knickbiegelinie

Nun ist es gelungen, eine Druckkraft F_{ki} zu bestimmen, bei der die Biegesteifigkeit des Stabes gerade noch ausreicht, den Stab aus einer gestörten Lage wieder in die alte Gleichgewichtslage zu bringen. Über die Knickbiegelinie ist bekannt:

$$w(x) = B \sin(\kappa\, x)$$

Da zwar $\kappa = \sqrt{\frac{F_{ki}}{EJ}}$ bekannt ist, aber die Amplitude B nicht, kann über die Knickbiegelinie nur etwas über ihre Form (sinusförmig), nichts aber ihre Amplitude ausgesagt werden. Dies ist eine typische Eigenschaft von Eigenwertproblemen. Man spricht bei der Knickbiegelinie auch von einer Eigenform.

13.2.3 Eulerfälle

Leonhard Euler [1] hat eine Erweiterung auf andere Lagerungsbedingungen geliefert, die als Eulerfälle bekannt sind. Wenn man die Knicklänge s_k entsprechend anpasst, gilt die Eulersche Knicklast auch für andere Randbedingungen.
Die Knicklänge s_k bestimmt man mit:

$$\boxed{s_k = \beta\, l} \tag{13.13}$$

Der Knicklängenbeiwert β ist eine Funktion der Lagerungsbedingungen, man spricht vom Eulerfall.

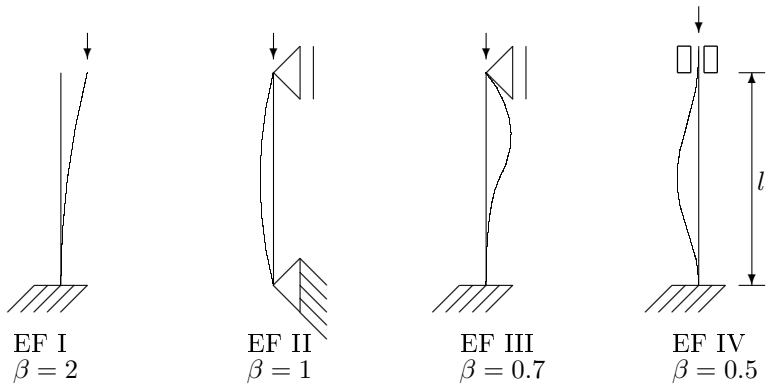


Abbildung 13.2: Eulerfälle

Die Eulersche Knicklast bestimmt man mit

$$\boxed{F_{ki} = \frac{EJ\pi^2}{s_k^2}} \tag{13.14}$$

[1] Leonard Euler * 1707 Basel,† 1783 St. Petersburg

In Abbildung 13.2 sind die Knickbiegelinien qualitativ angedeutet. Die Abstände der Wendepunkte der Knickbiegelinie sind die Knicklängen s_k.

13.2.4 Ideale Knickspannung und Eulerhyperbel

Nun soll die ideale Knickspannung σ_{ki} eingeführt werden. Das ist die Nennspannung $\frac{F_{ki}}{A}$ bei erreichen der Eulerschen Knicklast.

$$\sigma_{ki} = \frac{F_{ki}}{A} = \frac{\frac{EJ\ \pi^2}{s_k^2}}{A} = \frac{E\ J\ \pi^2}{A\ s_k^2}$$

Mit dem

Trägheitsradius i

$$i^2 = \frac{J}{A}$$

erhält man

$$\sigma_{ki} = \frac{E\ i^2\ \pi^2}{s_k^2}$$

und mit der

Schlankheit λ

$$\lambda = \frac{s_k}{i}$$

ergibt sich

$$\sigma_{ki} = \frac{E\ \pi^2}{\lambda^2} \tag{13.15}$$

Gleichung 13.14 ist eine Hyperbel, die nur vom Elastizitätsmodul E und der Schlankheit abhängt. Sie ist in Abbildung 13.3 für Baustahl ($E = 2.1\ 10^5 N/mm^2$) gezeigt.

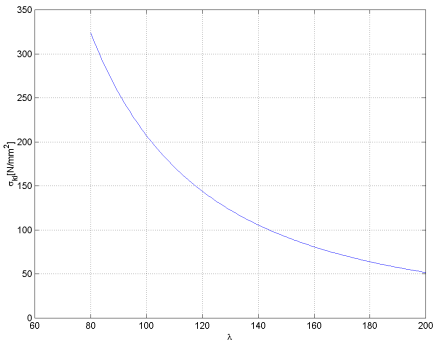


Abbildung 13.3: Eulerhyperbel)

Liegt das Zahlenpaar von Spannungen und Schlankheit unter der Eulerhyperbel, tritt kein Stabilitätsfall auf. Das gilt natürlich nur unter der Fließgrenze, streng genommen unter einer Proportionalitätsschlankheit λ_p, ab der auf dem Querschnitt erste Plastifizierungen auftreten.

13.2.5 Tetmajer Gerade

Dieser Übergangsbereich von der Propertionalitätsgrenze bis zum Erreichen der Fließgrenze ist von Tetmajer [2] bearbeitet worden.
Tetmajer schlägt vor, von der Proportionalitätsgrene bis zum Erreichen der Fließspannung eine Gerade einzuführen:

$$\boxed{\sigma_{kT} = a - \lambda b} \tag{13.16}$$

darin sind a und b materiallabhängige Konstanten [in N/mm^2][3]

	λ_p	a	b
St37	104	310	1,14
St52	85	470	2,3
Holz	100	29,3	0.194

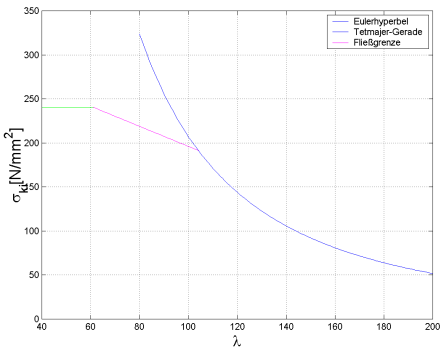


Abbildung 13.4: Stabilitätsgrenze)

Abbildung 13.4 zeigt die Stabilitätsgrenze eines Baustahls St37. Wenn die vorhandene Nennspannung unter dem Kurvenzug aus Eulerhyperbel, Tetmajer-Geraden und der Fließspannung liegt, kann Knicken ausgeschlossen werden.

13.2.6 Stabilitätsnachweis

Bei einem Tragsicherheitsnachweis soll nachgewiesen werden, dass das Bauteil bei den bestimmungsgemäßen Beanspruchungen nicht versagt bzw. vom Zustand des Versagens einen gehörigen Abstand hat. Dies wird mit einen Sicherheitsbeiwert ν erreicht, mit dem die Beanspruchungen beaufschlagt werden. Dieser Sicherheitsbeiwert ist häufig in den einschlägigen Vorschrift angegeben. Er berücksichtigt u.a. die Folgen eines Versagens. Bei einem Nachweisverfahren wie

[2] Ludwig von Tetmajer, * 1850 in Krompachy, SK, damals Ungarn, †1905 Wien, Prof. der ETH Zürich
[3] nach Göldner/Pfefferkorn

dem hier gezeigten, das keine Imperfektionen berücksichtigt, ist ein Beiwert von $\nu = 3.0$ im Maschinenbau durchaus üblich.
Damit muss ein Nachweis der Stabilität eines Knickstabes wie folgt ablaufen:

Sicherheitsbeiwert ν festlegen

falls $\nu \frac{F}{A} > \sigma_y$ (Fließgrenze des Materials)

anderen Querschnitt oder anderes Material wählen

Eulerfall feststellen

Knicklänge s_k bestimmen

Schlankheit bestimmen

falls $\lambda \geq \lambda_k$ (elastisches Knicken)

σ_{ki} bestimmen
Nachweis $\nu \frac{F}{A} \leq \sigma_{ki}$

falls $\lambda \leq \lambda_k$ (nicht elastisches Knicken)

σ_{kT} bestimmen
Nachweis $\nu \frac{F}{A} \leq \sigma_{kT}$

Kapitel 14

Literatur

Die Literatur zum Gebiet der Technischen Mechanik und der Festigkeitslehre ist sehr umfangreich. Hier sind nur einige Werke genannt, das an erster Stelle genannte Werk entspricht weitgehend der Darstellung in diesem Skript.

D. Gross, W. Hauger, u.a.: Elastostatik. Springer, 2009.

H. Göldner, F. Holzweissig: Leitfaden Technische Mechanik. Hanser Fachbuchverlag, 1989.

P. Hagedorn: Festigkeitslehre. Verlag Harri Deutsch, 2006.

B. Assmann, P. Selke: Technische Mechanik 2. Festigkeitslehre. Oldenbourg Verlag, 2008.

V. Läpple: Einführung in die Festigkeitslehre. Teubner, 2008.

W. H. Müller, F. Ferber: Technische Mechanik für Ingenieure. Hanser-Verlag, 2008.

G. Holzmann, H. Meyer, G. Schumpich: Festigkeitslehre. Teubner, 2006.

R. C. Hibbeler: Festigkeitslehre. Pearson Studium, 2007.

H. A. Richard, M. Sander: Festigkeitslehre. Vieweg, 2008.

K. Magnus, H. H. Müller-Slany: Grundlagen der technischen Mechanik. Teubner, 2009.

I. Szabó: Einführung in die Technische Mechanik. Springer, 2003.

J. Winkler, H. Aurich: Taschenbuch der Technischen Mechanik. Hanser Fachbuchverlag, 2005.

P. Wriggers, U. Nackenhorst, u.a.: Technische Mechanik kompakt: Starrkörperstatik, Elastostatik, Kinetik. Teubner, 2006.

O. Romberg, N. Hinrichs: Keine Panik vor Mechanik. Vieweg, 2009.