# Szilárdsátan gyakorlat
# 1. hét

Lehotzky Dávid
Pölöskei Tamás

2017. szeptember 13.

# Szükséges előismeretek

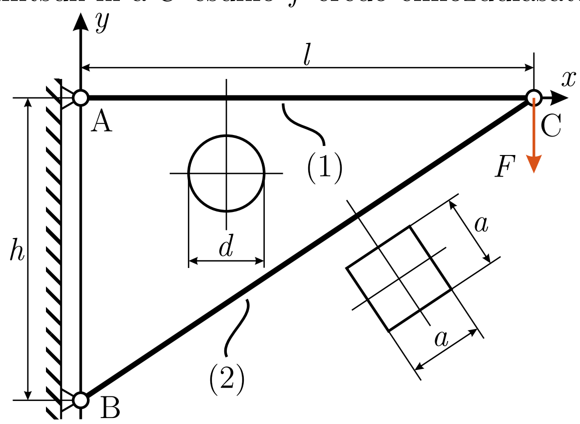
Tisztán húzott/nyomott rudak

| | |
|---|---|
| Keresztmetszet nagysága | $A$ |
| Rugalmassági modulusz | $E$ |
| Feszültségállapot | $\sigma_x = F/A$ |
| Fajlagos alakváltozás | $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ |
| Rúd megnyúlása | $\lambda = \int_{(l)} \varepsilon_x \, \mathrm{d}x$ |

Statikából rácsos tartók

# 1. feladat

Az állandó $d$ átmérőjű kör keresztmetszetű $AC$-rúd acélból készült, az állandó $a$ élű, négyzet keresztmetszetű $BC$-rúd fából. Ismerjük a rudak anyagára vonatkozó rugalmassági moduluszokat és megengedett feszültségeket. Méretezzük a rudakat, majd számítsuk ki a $C$ csukló $f$ eredő elmozdulását.




| | |
|---|---|
| $l = 3\,\mathrm{m}$ | |
| $h = 2\,\mathrm{m}$ | |
| $F = 60\,\mathrm{kN}$ | |
| $\sigma^{\mathrm{a}}_{\mathrm{meg}} = 160\,\mathrm{MPa}$ | |
| $\sigma^{\mathrm{fa}}_{\mathrm{meg}} = 4\,\mathrm{MPa}$ | |
| $E_{\mathrm{a}} = 200\,\mathrm{GPa}$ | |
| $E_{\mathrm{fa}} = 10\,\mathrm{GPa}$ | |

**Méretezés** A rudak méretezéséhez először meg kell határoznunk azok igénybevételeit. Mivel a szerkezet egyes részei egymáshoz csuklókon keresztül kapcsolódnak, ezért a rudak tisztán húzva/nyomva lesznek. Az $A$ és $B$ csuklós megtámasztásokat távolítsuk el és helyettesítsük koncentrált erőkkel azokat ($F_A, F_B$). Az $F_A$ és $F_B$ reakcióerőket határozzuk meg a $C$ csuklóra felírt egyensúlyi egyenletből:

$$\tan(\gamma) = h/l \Rightarrow \gamma = 0.588\,\mathrm{rad} = 33.69^\circ \tag{1}$$

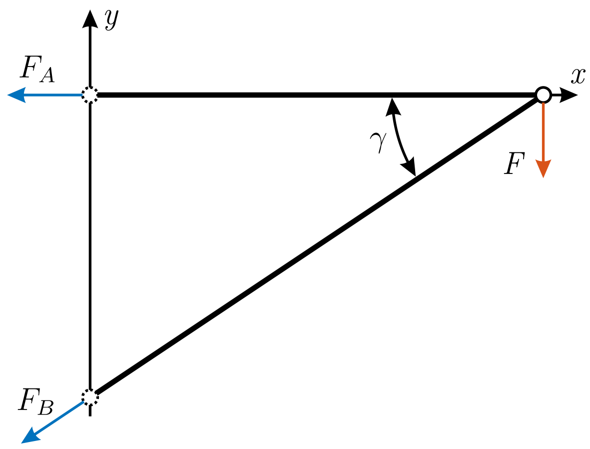
$$x: \; -F_A - \cos(\gamma)\, F_B = 0 \tag{2a}$$

$$y: \; -F - F_B \sin(\gamma)\, F_B = 0 \tag{2b}$$

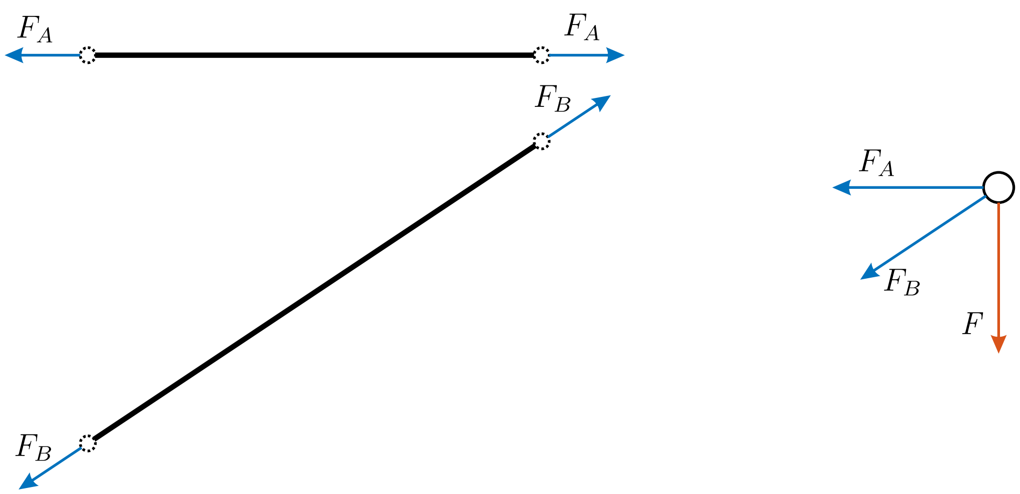
(2a) és (2b) egyenlet felhasználásával a reakcióerőkre az alábbiak adódnak:

$$F_A = 90\,\mathrm{kN},\; F_B = -108.2\,\mathrm{kN} \tag{3}$$

A tisztán húzott/nyomott rudak miatt a rudak minden keresztmetszete „veszélyes” keresztmetszet lesz. A méretezés során az ezekben ébredő feszültségeket fejezzük ki paraméteresen a keresztmetszet geometriájának felhasználásával:




1. ábra. A szerkezetre ható erők.




2. ábra. Az egyes rudakra és a C csuklóra ható erők.

$$\sigma_1^{\max} = \frac{\max\left(\left|N_1\left(s_1\right)\right|\right)}{A_1} \qquad \max\left(\left|N_1\left(s_1\right)\right|\right) = |F_A| \qquad A_1 = d^2\pi/4 \tag{4}$$

$$\sigma_2^{\max} = \frac{\max\left(\left|N_2\left(s_2\right)\right|\right)}{A_2} \qquad \max\left(\left|N_2\left(s_2\right)\right|\right) = |F_B| \qquad A_2 = a^2 \tag{5}$$

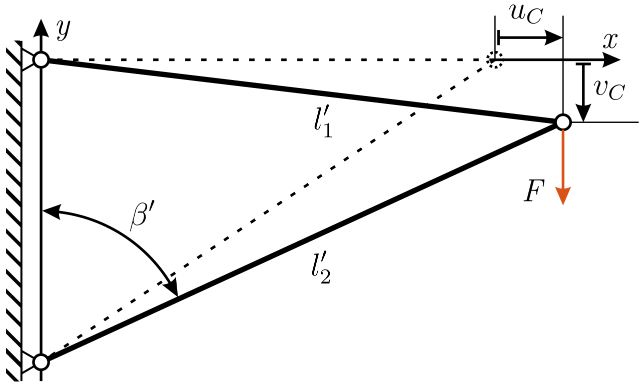
$$\sigma_1^{\max} \leq \sigma_{\text{meg}}^{\text{a}} \Rightarrow d_{\min} = 26.76\text{mm} \Rightarrow \boxed{d = 27\text{mm}} \tag{6}$$

$$\sigma_2^{\max} \leq \sigma_{\text{meg}}^{\text{f}} \Rightarrow a_{\min} = 164.4\text{mm} \Rightarrow \boxed{a = 165\text{mm}} \tag{7}$$

**Eredő elmozdulás** Az eredő elmozdulását a C pontnak a két rúd fajlagos és eredő megnyúlása/összenyomódása segítségével számítjuk ki.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{F_A}{A_1\,E_a} = 786.0 \cdot 10^{-6}, \quad l_1' = l_1 + \varepsilon_1\,l_1 = 3.00236\,\text{m} \\ \varepsilon_2 &= \frac{F_B}{A_2\,E_f} = -397.3 \cdot 10^{-6}, \quad l_2' = l_2 + \varepsilon_2\,l_2 = 3.60412,\,\text{m} \end{aligned} \tag{8}$$

A két rúd továbbra is csuklós összeköttetésben áll egymással ezért koszinusz tétel al-




kalmazásával ki tudjuk számolni a $B$ pontban keletkező a fal és a fa rúd által bezárt szöget.

$$h^2 + (l_2')^2 - 2h\,l_2'\,\cos\left(\beta'\right) = (l_1')^2 \Rightarrow \beta' = 0.9846\,\text{rad} = 56.41^\circ \tag{9}$$

Ekkor az elmozdulásvektor $x$ és $y$ komponense az alábbi:

$$u_C = \sin\left(\beta'\right)\,l_2' - l_2 = 2.351\,\text{mm} \tag{10}$$

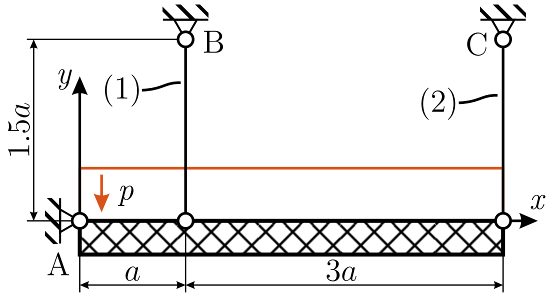
$$v_C = \cos\left(\beta'\right)\,l_2' - h = -6.120\,\text{mm} \tag{11}$$

Pitagorasz-tétel segítségével az eredő elmozdulás nagysága:

$$f_C = \sqrt{\left(u_C\right)^2 + \left(v_C\right)^2} = \boxed{6.556\,\text{mm}} \tag{12}$$

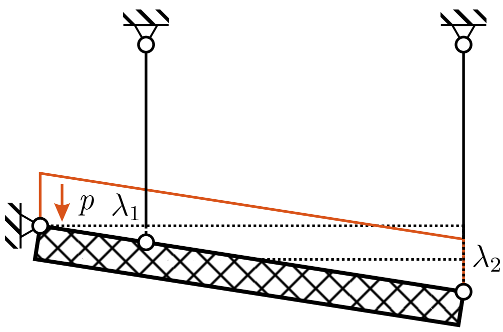
# 2. feladat

Az $A_1$ és $A_2$ állandó keresztmetszetű rugalmas rudak csuklóval kapcsolódnak a vízszintes *merev* rúdhoz. Mekkora reakciók ébrednek az $A$, $B$ és $C$ csuklókban, ha a merev rudat $p$ intenzitású megoszló erővel terheljük?




| |
|---|
| $a = 1\,\mathrm{m}$ |
| $A_1 = 400\,\mathrm{mm}^2$ |
| $A_2 = 200\,\mathrm{mm}^2$ |
| $p = 9\,\mathrm{kN/m}$ |
| $E_1 = 200\,\mathrm{GPa}$ |
| $E_2 = 200\,\mathrm{GPa}$ |

**Reakcióerők meghatározása** Deformáció után az 1-es rúd $\lambda_1$, míg a 2-es rúd $\lambda_2$ mértékben fog megnyúlni, lásd 3-as ábra.

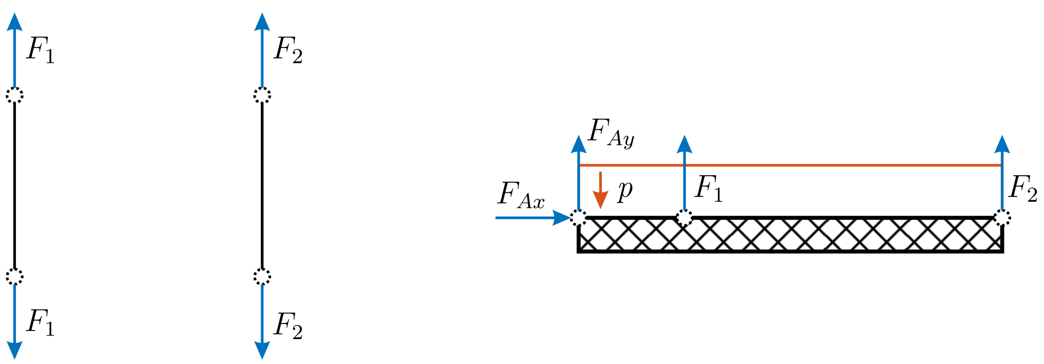



3. ábra. A deformált szerkezet

Mivel a vízszintes rúd merevtestszerűen fordul el a $C$ csukló körül, kis elmozdulások esetén az alábbi összefüggés áll fenn a két rúd megnyúlás között (párhuzamos szelők tétele):

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a}{(a+3a)} \Rightarrow 4\lambda_1 = \lambda_2 \tag{13}$$

A szerkezet egyes részeire ható erőket a 4. ábrán tüntettük fel.




4. ábra. Az egyes rudakra ható erők.

A tisztán húzott függőleges rudakban ébredő erőket ki tudjuk számolni felhasználva a húzott/nyomott rudak szilárdságtani egyenleteit:

$$F_1 = A_1\,\sigma_1 = A_1\,\varepsilon_{x1}\,E_1 = A_1\,\frac{\lambda_1}{1.5a}\,E_1 \tag{14a}$$

$$F_2 = A_2\,\sigma_2 = A_2\,\varepsilon_{x2}\,E_2 = A_2\,\frac{\lambda_2}{1.5a}\,E_2 \tag{14b}$$

Behelyettesítve (14)-be (13)-et és felhasználva a keresztmetszetre és a rugalmassági modulusra vonatkozó ismereteket $F_1$ és $F_2$ arányára a következőt kapjuk:

$$F_2 = 2F_1 \tag{15}$$

Írjuk fel a vízszintes rúdra az egyensúlyi egyenleteket:

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 :& F_{Ax} = 0\\
\sum F_y = 0 :& F_{Ay} + F_1 + F_2 - p\,4a = 0\\
\sum M_A = 0 :& F_1\,a + F_2\,4a - (p\,4a)\;2a = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

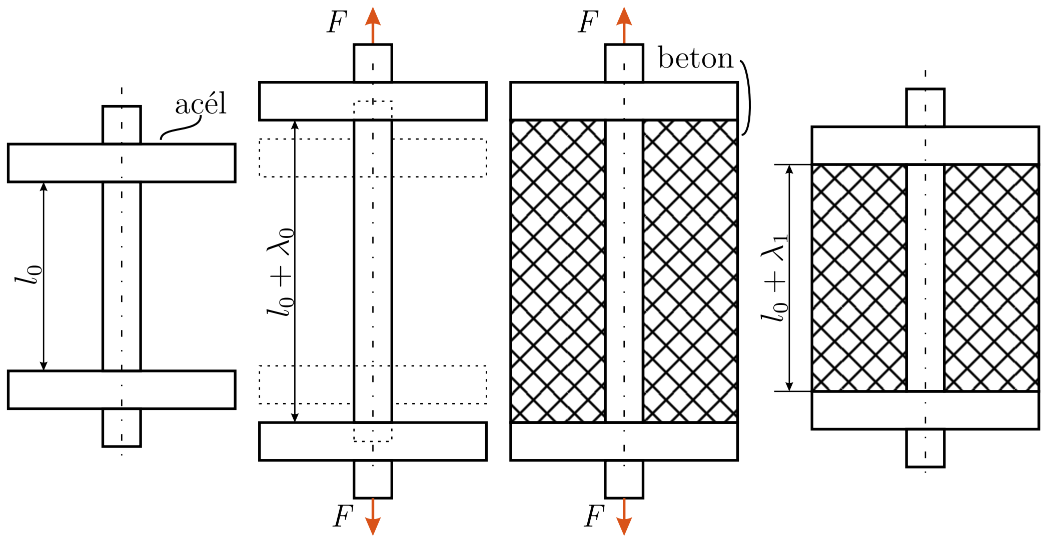
(16) 3 egyenletből áll, de 4 ismeretlen található ($F_{Ax}, F_{Ay}, F_1, F_2$) bennük. A negyedik egyenlet a korábban, szilárdságtani megfontolások alapján meghatározott, erők arányára vonatkozó egyenlet lesz (15). Ezeket felhasználva a következőket kapjuk eredményül:

$$\boxed{F_{Ax} = 0\,\mathrm{kN}}\;\boxed{F_{Ay} = 12\,\mathrm{kN}}\;\boxed{F_1 = 8\,\mathrm{kN}}\;\boxed{F_2 = 16\,\mathrm{kN}} \tag{17}$$

A $B$ és $C$ csuklóban ébredő erők rendre megegyeznek $F_1$ és $F_2$ erőkkel a szerkezet kialakítása miatt.

# 3. feladat

Egy $A_a$ keresztmetszetű acél rúdra két kör alakú acéltárcsát hegesztünk. A tárcsák közötti távolság ekkor $l_0$. A rúd szabad végeit $F$ húzóerővel terheljük és a terhelt állapotban a tárcsák közét betonnal kitöltjük, majd a beton megkötése után a terhelést megszüntetjük (feszített beton). Mekkora lesz a beton és az acél megnyúlása és a bennük ébredő feszültség?




| | |
|---|---|
| $l_0 = 1\,\mathrm{m}$ | $F = 66\,\mathrm{kN}$ |
| $A_a = 500\,\mathrm{mm}^2$ | $E_a = 200\,\mathrm{GPa}$ |
| $A_b = 150A_a$ | $E_b = E_a/15$ |

Az acél rúd megnyúlása $F$ erő hatására:

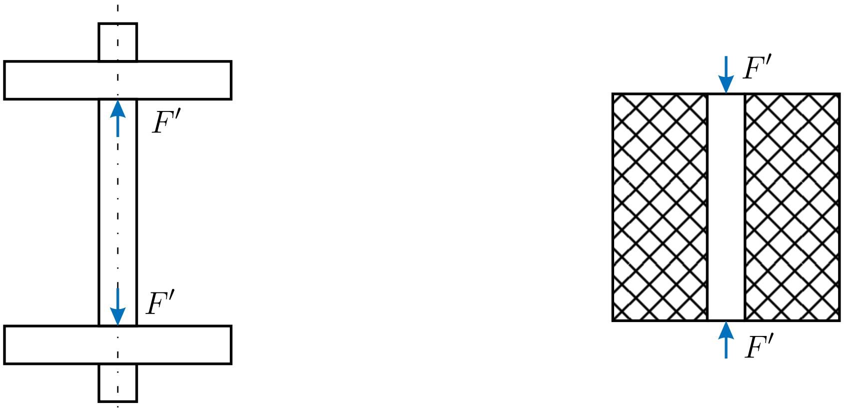
$$\lambda_0 = \frac{F\,l_0}{A_a\,E_a} = 0.66\,\mathrm{mm} \tag{18}$$

A betonnal való kitöltés után és a külső terhelés megszüntetése után a betonra ható eredő erőt jelöljük $F'$-vel. Ekkor mind az acél szerkezet, mind a beton tiszta húzás/nyomásának van kitéve, igénybevételeiket a 6. ábrán tüntettük fel. A felírható egyenlet a közös felület azonos elmozdulását fejezi ki:

$$\frac{F'\,l_0}{A_a\,E_a} - \lambda_0 = -\frac{F'\left(l_0 + \cancel{\lambda_0}\right)}{A_b\,E_b} \Rightarrow F' = 60\,\mathrm{kN} \tag{19}$$

, ahol kihasználtuk, hogy $\lambda_0$ elhanyagolható $l_0$ mellett. Ekkor a keresett megnyúlása az acél és a beton résznek az alábbi:

$$\begin{aligned} \lambda_{1a} &= \frac{F'\,l_0}{A_a\,E_a} = \boxed{0.6\,\mathrm{mm}} \\ \lambda_{1b} &= -\frac{F'\,\left(l_0 + \cancel{\lambda_0}\right)}{A_b\,E_b} = \boxed{-0.06\,\mathrm{mm}} \end{aligned} \tag{20}$$

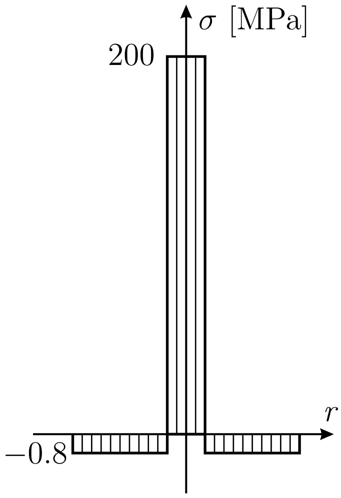



6. ábra. Részegységek terhelései a külső terhelés megszüntetése után

A külső terhelés megszüntetése után az egyes részekben ébredő normál feszültség az alábbi:

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \frac{F'\,l_0}{A_a} = \boxed{120\,\mathrm{MPa}} \\ \sigma_b &= -\frac{F'\,l_0}{A_b} = \boxed{-0.8\,\mathrm{MPa}} \end{aligned} \tag{21}$$

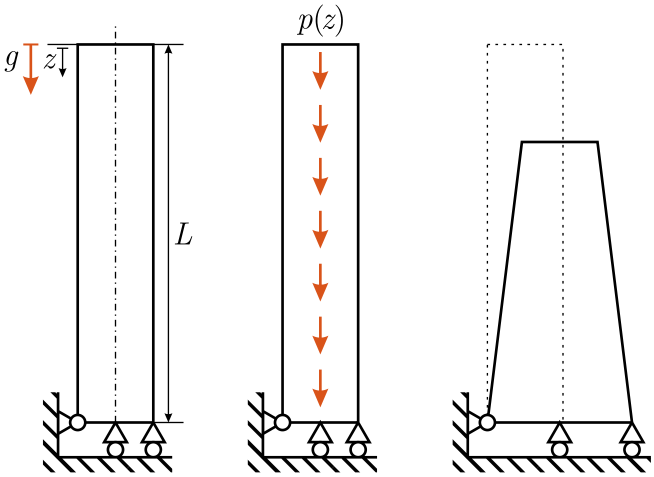
, eloszlásukat a 7. ábra tartalmazza.




7. ábra. Feszültségeloszlás a tárcsa sugara mentén.

# 4. feladat

Mennyire nyomódik össze egy $L$ hosszúságú, állandó kör keresztmetszetű függőleges ólomrúd a saját súlya alatt? (Feltételezzük, hogy elég vastag ahhoz, hogy ne következzen be kihajlás.) Mennyi az átmérő relatív megváltozása a befogásnál?




| | |
|---|---|
| $L = 10\,\mathrm{m}$ | |
| $\rho = 11340\,\mathrm{kg/m^3}$ | |
| $E = 16\,\mathrm{GPa}$ | |
| $\nu = 0.44$ | |
| $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ | |

**Összenyomódás meghatározása** A gravitációs térben álló függőleges rúd terhelése csak a saját tömegéből származó rúdirányú megoszlású terhelés. Az egységnyi hosszra jutó terhelés intenzitása az alábbi:

$$p\,(z) = -A\,\rho\,g \tag{22}$$

Az ebből származó normál erő ennek integrálja segítségével határozható meg:

$$N\,(z) = \int p\,(z)\;\mathrm{d}z = -A\,\rho\,g\,z + C_0 \tag{23}$$

$C_0$ konstans abból a feltételből határozható meg, hogy a fenti szabad rúdvégen a normál erőnek zérusnak kell lennie. Ezek alapján:

$$C_0 = 0\,\mathrm{N} \tag{24}$$

Ekkor a fajlagos alakváltozás a $z$ irányba:

$$\varepsilon_z\,(z) = \frac{N\,(z)}{A\,E} = -\frac{\rho\,g}{E}z \tag{25}$$

A rúd teljes összenyomódása az alábbi:

$$\lambda = \int_0^L \varepsilon_z\,(z)\;\mathrm{d}z = -\frac{\rho\,g\,L^2}{2E} = \boxed{-0.3476\,\mathrm{mm}} \tag{26}$$

**Átmérő relatív megváltozása** Az átmérő relatív megváltozása a Poisson-hatás miatt az alábbi értékű lesz:

$$\varepsilon_D\,(L) = -\nu\,\varepsilon_z\,(L) = \boxed{30.59 \cdot 10^{-6}} \tag{27}$$