1. gyakorlat

Vektoralgebra

- skalár mennyiségek: csak nagyságuk van
  pl.: tömeg, energia
- vektor mennyiségek: nagyságuk és irányuk van
  pl.: erő, sebesség

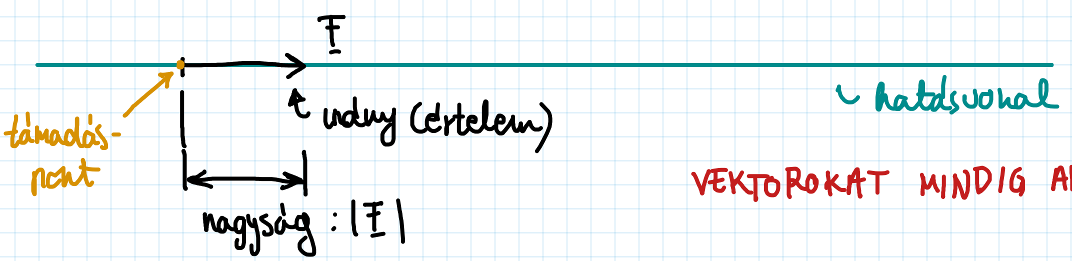
https://www.youtube.com/watch?v=fNk_zzaMoSs&ab_channel=3Blue1Brown

- tenzor mennyiségek pl.: feszültség, alakváltozás

Vektorok

- szabad vektorok
  önmagukkal párhuzamosan tetszőlegesen eltolhatók
  pl: erőpár, szögsebesség
- kötött vektorok
  ↳ ponthoz pl.: sebesség, gyorsulás
  ↳ hatásvonalhoz pl.: erő

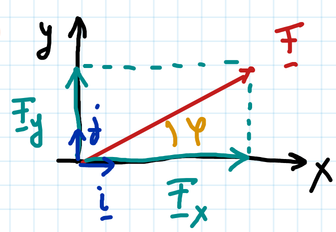
Erővektor



VEKTOROKAT MINDIG ALÁHÚZZUK!

Vektor felbontása komponensekre

2D



$\underline{F} = \underline{F}_x + \underline{F}_y$

$\underline{F}_x = F_x \underline{i}$

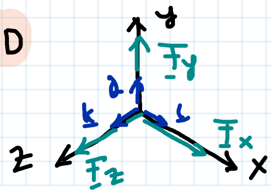
$\underline{F}_y = F_y \underline{j}$

$\underline{i}, \underline{j}$ bázisvektorok
⇓
egymástól lineárisan független egységvektorok
⇓
$\underline{i} \perp \underline{j}$, $|\underline{i}| = |\underline{j}| = 1$

$F_x = F\cos\varphi$ $\quad F_y = F\sin\varphi$

$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j}$

3D



$\underline{F}_x = F_x \underline{i}$

$\underline{F}_y = F_y \underline{j}$

$\underline{F}_z = F_z \underline{k}$

$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$

$\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

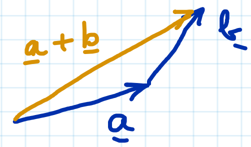
$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ bázisvektorok

Vektorok összeadása

$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ $\quad$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$

$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}$ vagy $\underline{a} + \underline{b} = (a_x + b_x)\underline{i} + (a_y + b_y)\underline{j} + (a_z + b_z)\underline{k}$

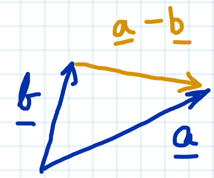
geometriailag.



Vektorok kivonása

$\underline{a} - \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{bmatrix}$ vagy $\underline{a} - \underline{b} = (a_x - b_x)\underline{i} + (a_y - b_y)\underline{j} + (a_z - b_z)\underline{k}$

geometriailag



Vektorok szorzása skalárral

$c \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} ca_x \\ ca_y \\ ca_z \end{bmatrix}$

Vektorok abszolútértéke (hossza, nagysága):

$|\underline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

térbeli Pitagorasz tétel

Vektor transzponáltja

$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ $\quad$ $\underline{a}^T = [a_x \quad a_y \quad a_z]$

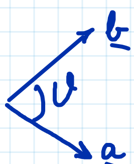
Vektorok skaláris szorzata

eredmény skalár lesz!

$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \cos \vartheta$

ϑ: vektorok által bezárt szög

megj: lehet tompaszög



spec. esetek: ha $\vartheta = 0$ $\quad$ $\underline{a}\ \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|$: $\underline{a} \parallel \underline{b}$

ha $\vartheta = 90°$ $\quad$ $\underline{a}\ \underline{b} = 0$ $\quad$ $\underline{a} \perp \underline{b}$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

pl $\underline{i}\ \underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 + 0 + 0 = 1$ $\quad$ $\underline{i}\ \underline{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$

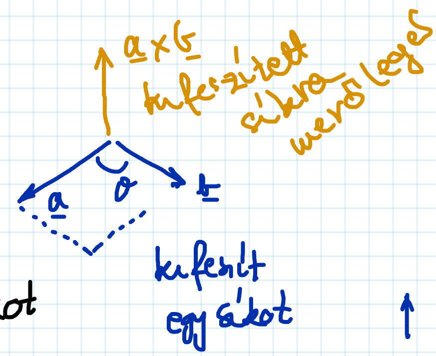
- skaláris szorzattal ki lehet számítani vektorok adott irányú komponenseit

$\underline{a}\ \underline{i} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_x$ $\quad$ $\underline{a} \cdot \underline{j} = a_y$ $\quad$ $\underline{a} \cdot \underline{k} = a_z$

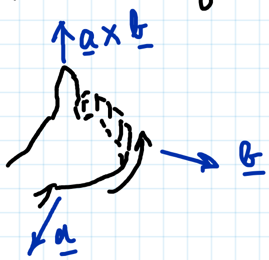
- vektorok hosszát is lehet számolni $|\underline{a}|^2 = \underline{a}\cdot\underline{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$
- ha $\underline{a}\cdot\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a} \perp \underline{b}$
- két vektor által bezárt szöget is lehet számolni $\cos\vartheta = \dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|}$

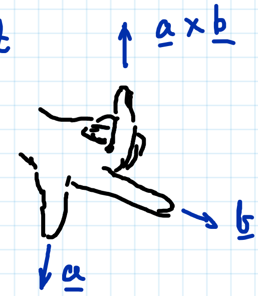
https://www.youtube.com/watch?v=LyGKycYT2v0&ab_channel=3Blue1Brown

Vektorok vektoriális (kereszt) szorzata



- $\underline{a}\times\underline{b} \perp \underline{a}$
- $\underline{a}\times\underline{b} \perp \underline{b}$
- $|\underline{a}\times\underline{b}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}|\sin\vartheta$
- $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{a}\times\underline{b}\}$ jobbsodrású rendszert alkot

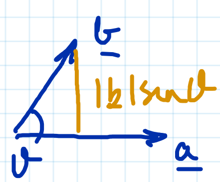




- a sorrend fontos: $\underline{a}\times\underline{b} = -\underline{b}\times\underline{a}$
- $\underline{a}\times\underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

geometriailag az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített terület nagysága



$|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\sin\vartheta = |\underline{a}\times\underline{b}|$

alap · magasság

másik számolási mód

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \underline{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \underline{j}(a_z b_x - b_z a_x) + \underline{k}(a_x b_y - b_x a_y)$$

determináns számítás

Sarrus szabály

https://www.youtube.com/watch?v=VJ6xHoB8-WU&ab_channel=D%C3%A1nielHorv%C3%A1th

https://www.youtube.com/watch?v=eu6i7WJeinw&ab_channel=3Blue1Brown

Példa $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

skaláris szorzat: $\underline{a} \cdot \underline{b} = 1(-3) + 2\cdot(-2) + 3\cdot(-1) = -10$

$\underline{a}$ vektor hossza: $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \cong 3{,}742$

$\underline{b}$ vektor hossza: $|\underline{b}| = \sqrt{\underline{b} \cdot \underline{b}} = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \cong 3{,}742$

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által bezárt szög: $\cos\vartheta = \frac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}|\,|\underline{b}|} = \frac{-10}{14} = -0{,}714$

$\vartheta = \arccos(-0{,}714) = 135{,}58^\circ$

$\underline{a}$ irányú egységvektor: $\underline{e}_a = \frac{1}{|\underline{a}|}\underline{a} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}267 \\ 0{,}534 \\ 0{,}802 \end{bmatrix}$

ell.: $\sqrt{\underline{e}_a \cdot \underline{e}_a} = \sqrt{0{,}267^2 + 0{,}534^2 + 0{,}802^2} = 1$ ✓

$\underline{b}$ vektor $\underline{a}$-ra vetített vetülete: $b_a = \underline{b}\,\underline{e}_a = -2{,}671$

$\underline{b}$ vektor $\underline{a}$-ra vetített vetület vektora: $\underline{b}_a = b_a\,\underline{e}_a = \begin{bmatrix} -0{,}713 \\ -1{,}426 \\ -2{,}142 \end{bmatrix}$

$\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoriális szorzata

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-1) - 3\cdot(-2) \\ -(1\cdot(-1) - 3\cdot(-3)) \\ 1\cdot(-2) - 2\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ell.:

$(\underline{a} \times \underline{b})\,\underline{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 - 16 + 12 = 0$ ✓ $\Rightarrow \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}$

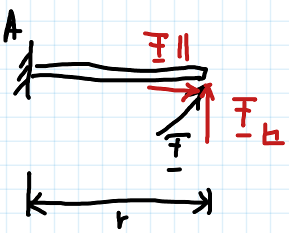
$(\underline{a} \times \underline{b})\,\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = -12 + 16 - 4 = 0$ ✓ $\Rightarrow \underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{b}$

Erő és erő nyomatéka

Erő: testek (mezők) közötti kölcsönhatás mértéke. Van nagysága, hatásvonala és értelme, azaz vektormennyiség. A támadáspontjához kötött vektor, merev testek esetén a hatásvonala mentén eltolhatjuk

Erő nyomatéka: "az erő forgató hatása"

1. Erő nyomatéka síkban

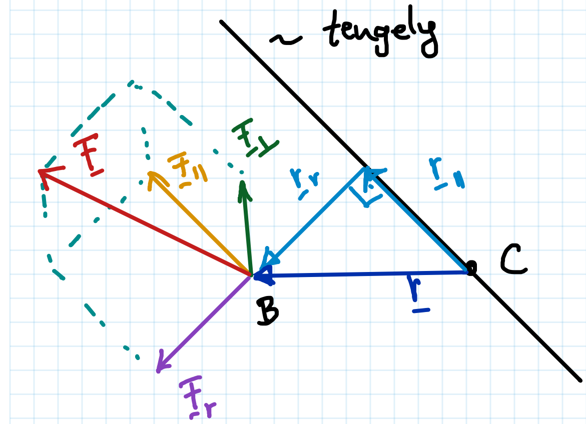


Csak az $\underline{F}_\perp$ merőleges komponensnek van forgató hatása

$M = r\ F_\perp$ (megj.: $F_\perp = |\underline{F}_\perp|$)

↑ erőkar

2. Erő nyomatéka térben, adott tengelyre



Az F erő B pontban hat, a tengely átmegy a C ponton. Az F erőt komponensekre bontjuk:

$\underline{F} = \underline{F}_r + \underline{F}_\perp + \underline{F}_\parallel$

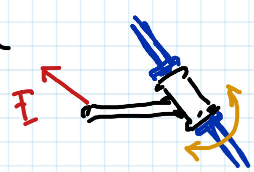
merőleges, radiális, párhuzamos

csak $\underline{F}_\perp$ komponensnek van forgató hatása a tengely körül

Az erőkar: $|\underline{r}_r| = r_r$ $\quad (\underline{r} = \underline{r}_r + \underline{r}_\parallel)$

$\underline{F}$ nyomatéka a tengelyre: $M = r_r \cdot F_\perp$

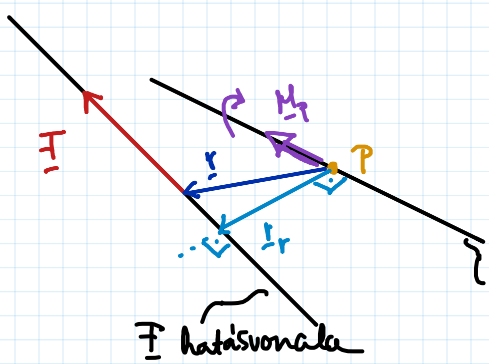
Példa



3. Erő nyomatéka gömb körül térben (pl. gömbcsukló)

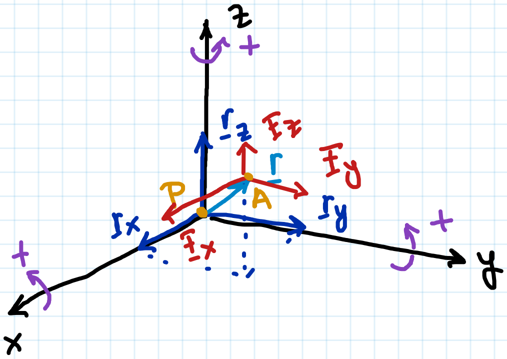
Olyan tengelyt keresünk, amire az F erőnek csak merőleges komponense van

Erőkar: $|\underline{r}_r| = r_r$



forgatás tengelye, $M_P = F\ r_r$

Tehát az erő nyomatékának van nagysága (M_P) és iránya (tengelye) $\Rightarrow$ vektor mennyiség



$\underline{r}_{PA} = \underline{r}_A = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\underline{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$

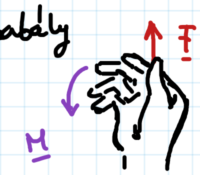
komponensek forgatónyomatéka:

$F_x \to$ y: $+F_x r_z$; z: $-F_x r_y$

$F_y \to$ x: $-F_y r_z$; z: $+F_y r_x$

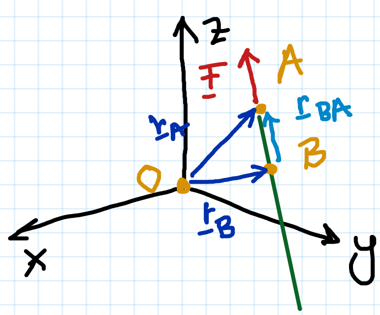
$F_z \to$ x: $+F_z r_y$; y: $-F_z r_x$

jobbkéz szabály



Az F erő nyomatéka P pontra:

$$\underline{M}_p = \begin{bmatrix} F_z r_y - F_y r_z \\ -(F_z r_x - F_x r_z) \\ F_y r_x - F_x r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \underline{r}_{PA} \times \underline{F}$$



Toljuk el F-et az erő hatásvonalán fekvő B pontba!

$$\underline{M}_o = \underline{r}_{OA} \times \underline{F} = (\underline{r}_{OB} + \underline{r}_{BA}) \times \underline{F} = \underline{r}_{OB} \times \underline{F} + \underbrace{\underline{r}_{BA} \times \underline{F}}_{=\underline{0}} =$$

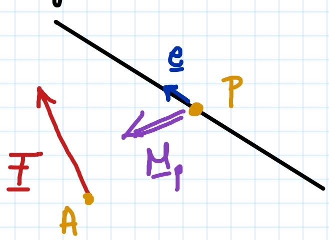
$$= \underline{r}_{OB} \times \underline{F}$$

mert $\underline{r}_{BA} \parallel \underline{F}$

F nyomatéka O pontra:

$\boxed{\underline{M}_o = \underline{r} \times \underline{F}}$, ahol $\underline{r}$ az O pontból az F erő hatásvonalának tetszőleges pontjába mutató vektor

Erő nyomatéka P-n átmenő tengelyre (lásd 2-es pont)



$\underline{M}_p$ tengelyre eső vetülete!

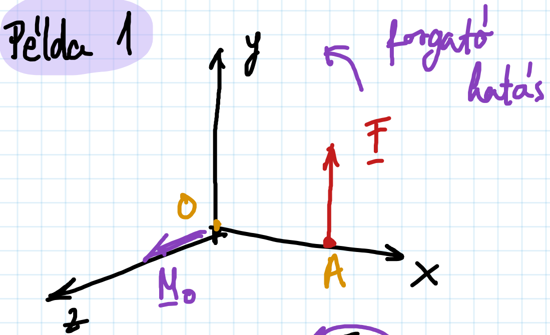
Tengely irányú egységvektor: $\underline{e}$ $\qquad$ $|\underline{e}| = 1$

$M_e = \underline{e}\ \underline{M}_p$

↑ skaláris szorzat

$\underline{M}_p = \underline{r}_{PA} \times \underline{F}$ $\qquad$ $M_e = \underline{e}\ \underline{M}_p$ (skalár) $\qquad$ $\underline{M}_e = M_e \cdot \underline{e}$ (vektor)

Példa 1



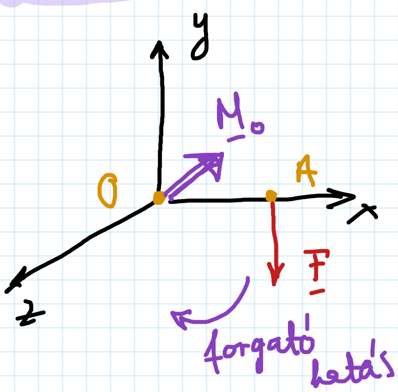
$$\underline{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

$$\underline{M}_0 = ?$$

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{OA} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} kNm$$

jobbkéz szabály

Példa 2

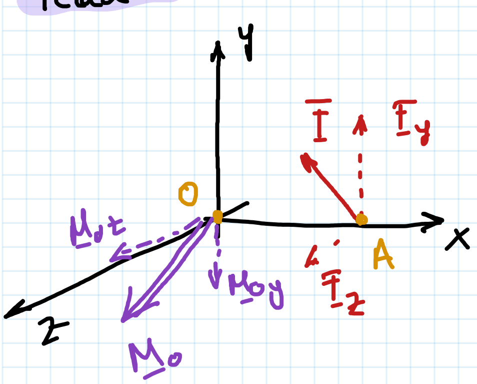


$$\underline{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{OA} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -20 \end{bmatrix} kNm$$

jobbkéz szabály

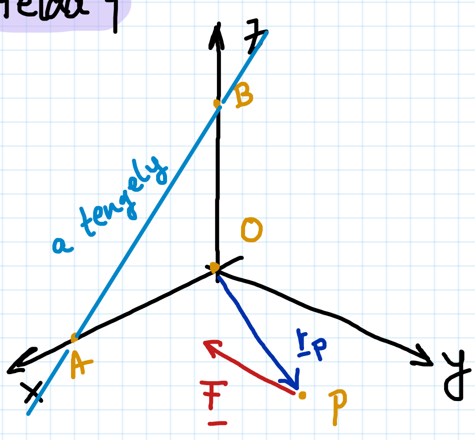
Példa 3



$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} N \qquad \underline{r}_{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{OA} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix} Nm$$

Példa 4



$$\underline{r}_P = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} m \qquad \underline{r}_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m \qquad \underline{r}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

a, $\underline{M}_A = ?$ $\quad \underline{M}_B = ?$

b, $\underline{M}_a = ?$

a, $$\underline{M}_A = \underline{r}_{AP} \times \underline{F} = (\underline{r}_{AO} + \underline{r}_{OP}) \times \underline{F} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ -21 \end{bmatrix} Nm$$

$$\underline{r}_{AP} = -\underline{r}_A + \underline{r}_P = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

$$\underline{M}_B = \underline{r}_{BP} \times \underline{F} = (-\underline{r}_{BO} + \underline{r}_{OP}) \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -30 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

$$\underline{r}_{BP} = -\underline{r}_B + \underline{r}_P = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} \text{m}$$

b/ $$\underline{a} = \underline{r}_{AB} = \underline{r}_{AO} + \underline{r}_{OB} = -\underline{r}_A + \underline{r}_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \text{m}$$

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}} = \sqrt{(3)^2 + 4^2} = 5\text{m}$$

$$\underline{e}_a = \frac{1}{|\underline{a}|} \underline{a} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

$$M_a = \underline{M}_A \cdot \underline{e}_a = -12 \cdot 3/5 - 21 \cdot 4/5 = -24 \text{ Nm}$$

$$M_a = \underline{M}_B \cdot \underline{e}_a = -30 \cdot 4/5 = -24 \text{ Nm}$$

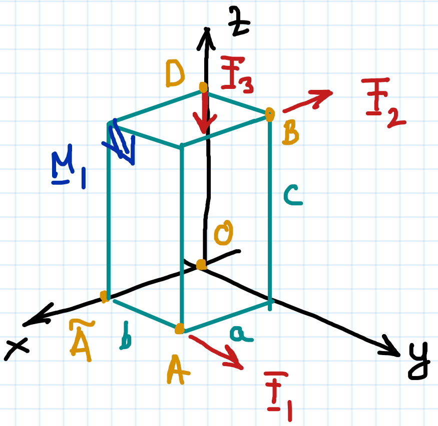
lásd hf 2. pontja

M_a : az AB szakasz által meghatározott egyenes körüli nyomatéka $\underline{F}$ vektornak

Ez ugyanaz, mint az $\underline{F}$ vektor A (vagy B) pont körüli nyomatékának az egyenes irányvektorára vett vetülete

(A és B pont is jó, mivel mindkettő az egyenes egy-egy pontja)

3. gyakorlat



Adatok

$a = 2m$ $\quad b = 1m$ $\quad c = 3m$

$F_1 = 10\,kN$ $\quad F_2 = 5kN$ $\quad F_3 = 2kN$

$\underline{M}_1 = 10\,\underline{i} + 10\,\underline{k}$ [kNm]

Feladatok

a, Redukáljuk az erőrendszert O pontba!

b, Redukáljuk az erőrendszert A pontba!

c, keressük meg a centrális egyenes egy pontját és a legegyszerűbb eredőt!

a, $[\underline{F}, \underline{M}_0]_0$

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} kN$$

$$\underline{M}_0 = \sum_{j=1}^{m} \underline{M}_j + \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \underline{M}_1 + \underline{r}_{0A} \times \underline{F}_1 + \underline{r}_{0B} \times \underline{F}_2 + \underline{r}_{0D} \times \underline{F}_3$$

$$\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5c \\ 5b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 35 \end{bmatrix} kNm$$

Megjegyzés: $\underline{F}_1$-t eltolva a hatásvonala mentén a nyomatéka O pontra nem változik

$$\underline{r}_{0A} \times \underline{F}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ aF_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} kNm \qquad \underline{r}_{0\tilde{A}} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ aF_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} kNm$$

Lássuk be, hogy hatásvonal mentén eltolható az erő legyen E a hatásvonal egy pontja

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{0E} \times \underline{F}_1 = (\underline{r}_{0A} + \underline{r}_{AE}) \times \underline{F}_1 = \underline{r}_{0A} \times \underline{F}_1 + \underbrace{\underline{r}_{AE} \times \underline{F}_1}_{=\underline{0}} = \underline{r}_{0A} \times \underline{F}_1$$

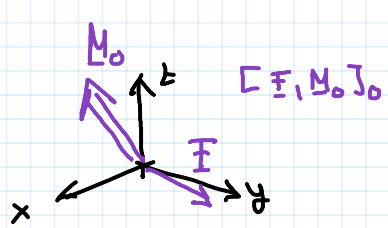
$=\underline{0}$, mivel az AE szakasz párhuzamos az $\underline{F}$ erő hatásvonalával

lásd hf 1 pontja

b, 1 eredeti erőrndsz-t redukáljuk

2 az origóba redukált erőrendszert redukáljuk

$[\underline{F}, \underline{M}_A]_A$



2 $\quad \underline{F} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} kN$

$$\underline{M}_A = \underline{M}_O + \underline{r}_{AO} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_{OA} \times \underline{F}$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2b \\ 2a \\ 10a+5b \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 10+2 \\ -15-4 \\ 35-25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -19 \\ 10 \end{bmatrix} kNm$$

legegyszerűbb eredő

c) Legyen C a centrális egyenes egy pontja, azaz $[\underline{F}, \underline{M}_C]_C$ vektorkettősre igaz, hogy $\underline{F} \parallel \underline{M}_C$, valamint mivel ez a centrális egyenes minden pontjára fennáll, a centrális egyenes párhuzamos $\underline{F}$ vektorral.

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \underline{r}_{CO} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_C \times \underline{F} \qquad | \, \underline{F} \times$$

$$\underbrace{\underline{F} \times \underline{M}_C}_{= \underline{0}, \text{ mert } \underline{F} \parallel \underline{M}_C} = \underline{F} \times \underline{M}_O - \underline{F} \times (\underline{r}_C \times \underline{F})$$

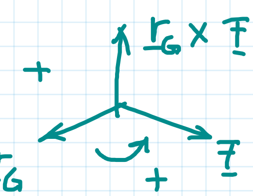
$$\underline{F} \times \underline{M}_O = \underline{F} \times (\underline{r}_C \times \underline{F})$$

legyen C a centrális egyenes origóhoz legközelebbi pontja
mivel a centrális egyenes $\underline{F}$ irányú $\underline{r}_C \perp \underline{F}$
$\Rightarrow |\underline{r}_C \times \underline{F}| = |\underline{r}_C| \cdot |\underline{F}| \cdot \sin 90° = |\underline{r}_C| \cdot |\underline{F}|$
és $\underline{r}_C \perp \underline{r}_C \times \underline{F}$, $\underline{F} \perp \underline{r}_C \times \underline{F}$

$\{\underline{r}_C, \underline{F}, \underline{r}_C \times \underline{F}\}$ jobbsodrású, minden tag merőleges a másikra

$\Downarrow$

$\underline{F} \times (\underline{r}_C \times \underline{F})$ szorzat $\underline{r}_C$ irányú, nagysága pedig $|\underline{r}_C| \cdot |\underline{F}|^2$



$\underline{e}_C$ az $\underline{r}_C$ irányú egységvektor

$$\underline{F} \times \underline{M}_O = \underline{e}_C |\underline{r}_C| \cdot |\underline{F}|^2 = \underline{r}_C \, |\underline{F}|^2$$

$$\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{|\underline{F}|^2} = \frac{1}{\underline{F} \cdot \underline{F}} (\underline{F} \times \underline{M}_O) = \begin{bmatrix} 2,481 \\ 1,201 \\ -0,194 \end{bmatrix} m$$

legegyszerűbb eredő: $\quad \underline{F} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix} kN \quad \underline{M}_C = \underline{M}_O + \underline{r}_{CO} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_C \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 10,46 \\ -20,93 \\ 4,19 \end{bmatrix} kNm$

még egyz.. redukált vektorkettős esetén a nyomatékvektor $\underline{F}$ irányú komponense sosem változik

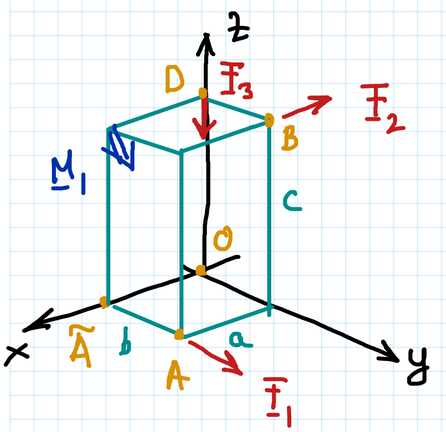
Biz.: legyen D bármilyen pont, G legyen a centrális egyenes egy pontja

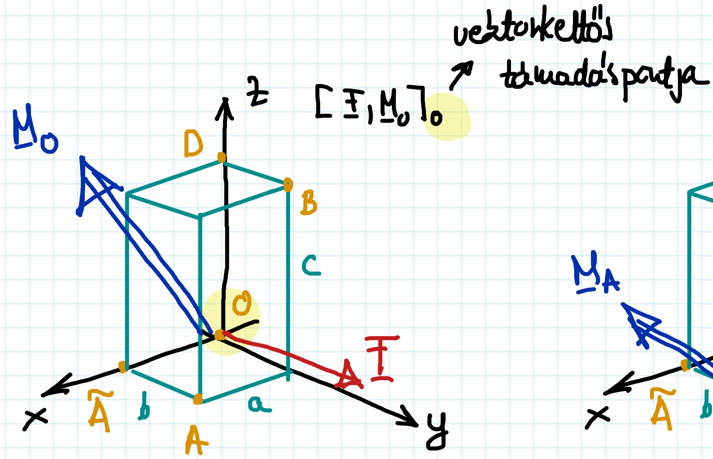
$\underline{M}_D = \underline{M}_G + \underline{r}_{DG} \times \underline{F}$ $\qquad \underline{M}_G \parallel \underline{F} \qquad \underline{r}_{DG} \times \underline{F} \perp \underline{F}$

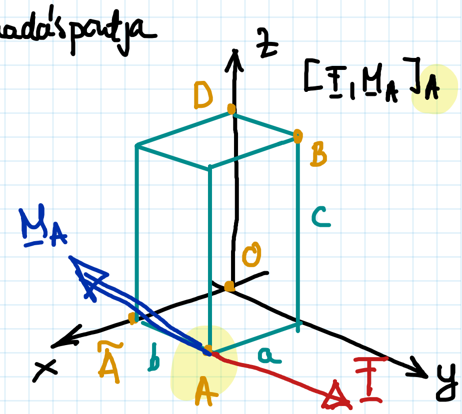
$\Rightarrow$ azaz csak az $\underline{F}$ irányra merőleges komponens változik!

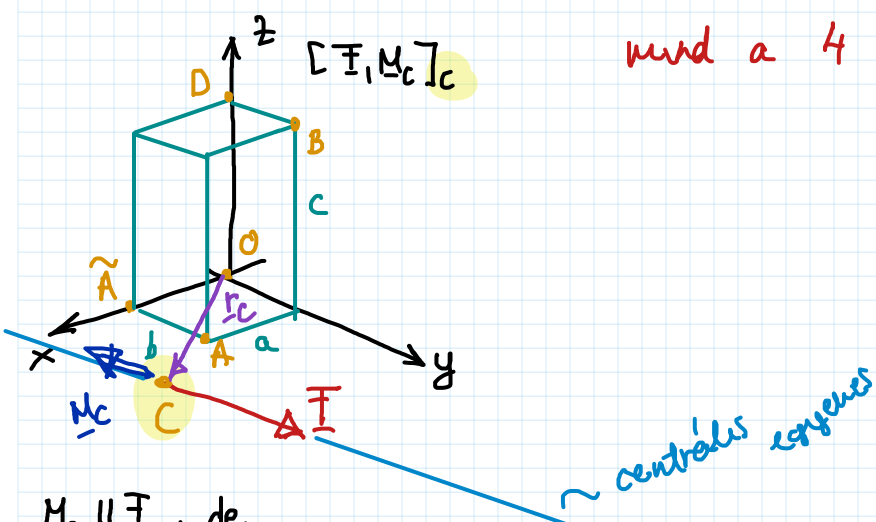
Köv.: $\underline{M}_C$ számítható $\underline{r}_C$ ismerete nélkül is, mivel $\underline{M}_C$ a redukált vektorkettős nyomatékának $\underline{F}$ irányába eső vetülete. $\underline{M}_C = \underline{e}_F \left(\underline{e}_F \cdot \underline{M}_O \right) = \dfrac{\underline{F}}{|\underline{F}|^2} \left(\underline{F} \cdot \underline{M}_O \right)$

lásd hf 3 pontja









mind a 4 egyenértékű erőrendszer!

lásd hf. 4 pontja

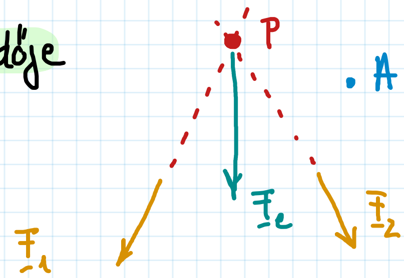
$\underline{M}_C \parallel \underline{F}$, de

most ellentétes irányba néz

Síkbeli erők eredője

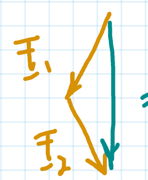
2 nem párhuzamos erő eredője

$F_e = F_1 + F_2$



F_e hatásvonala átmegy a 2 erő közös hatásvonala által meghatározott ponton (P)

nagysága nyílfolyammal szerkeszthető

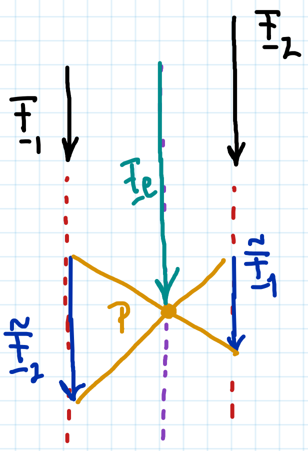


berajzolva F_e-t megkaptuk

vagy eredeti ábrán F_1, F_2 erőket P-be tolva parallelogramma szabály szerint szerkeszthető

$M_A = r_{AP} \times F_1 + r_{AP} \times F_2 = r_{AP} \times F_e$

2 párhuzamos erő eredője



szerkesztés:

1 erők áthelyezése a másik erő hatásvonalára

2 kezdő és végpontok összekötése

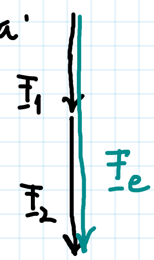
↳ P pont

↓

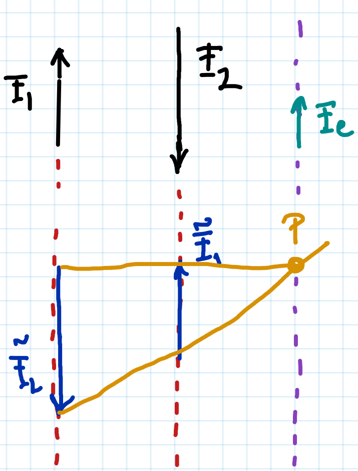
eredő erő hatásvonalának pontja

3. eredő erő berajzolása eredő erő nagyságának megszerkesztése után

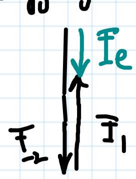
nagysága:



ellentétes értelmű párhuzamos erőknél a szerkesztés analóg módon történik

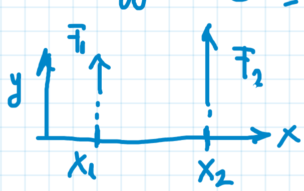


nagysága:



számítás:

F_e nyomatéka bármely pontra meg kell egyezzen F_1 és F_2 nyomatékának összegével



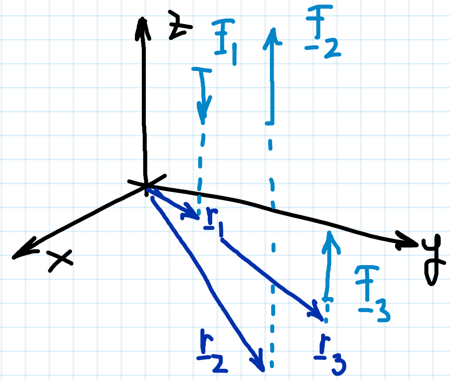
$$M_0 = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 F_1 + x_2 F_2 \end{bmatrix}$$

$$M_0 = r_e \times F_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_e F_e \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_e F_e = x_1 F_1 + x_2 F_2 \Rightarrow x_e = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F_e}$$

Véges sok párhuzamos erő eredője térben

Legyen $\underline{F}_i = F_i \underline{k}$ (z tengellyel párhuzamosak)



$[\underline{F}, \underline{M}_0]_0$ $\qquad \underline{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) \cdot \underline{k} \leftarrow \text{eredő erő nagysága}$$

$$\underline{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\begin{bmatrix} y_i F_i \\ -x_i F_i \\ 0 \end{bmatrix}}_{\perp \underline{F}}$$

$\perp \underline{F} \Rightarrow$ nincs $\underline{F}$-fel párhuzamos komponense

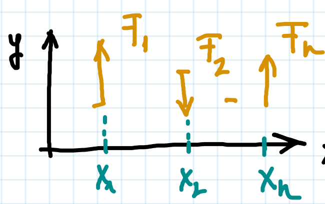
$\Downarrow$

$\underline{M}_C = \underline{0}$ (C a centrális egyenes egy pontja)

Tehát az eredő erő a centrális egyenesen van!

$$\underline{r}_e = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_0}{|\underline{F}|^2} \qquad \underline{F}_e = \underline{F}$$

síkban



Legyen $\underline{F}_i = F_i \underline{j}$

$$\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i \times \underline{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} x_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ F_i \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_i F_i \end{bmatrix}, \text{ azaz } M_{0z} = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i$$

x_i, F_i előjelhelyesen

mivel $\underline{M}_0$ $\underline{k}$ irányú, azaz a $\underline{j}$ irányú $\underline{F}$-re vett vetülete 0, a centrális egyenes pontjaira $\underline{F}$ nyomatéka 0 Nm $\Rightarrow$ $\underline{F}_e$ ezen az egyenesen található

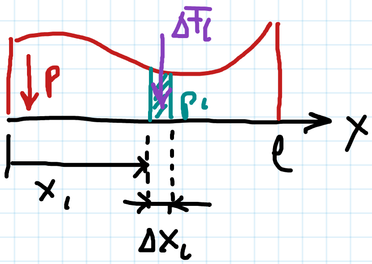
centrális egyenes. C: $\underline{r}_C = \frac{1}{|\underline{F}|^2} (\underline{F} \times \underline{M}_0) = \frac{1}{|\underline{F}|^2} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{0z} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{|\underline{F}|^2} \begin{bmatrix} F M_{0z} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{0z}/F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x_e = \frac{1}{F} M_{0z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

megjegyz.: ha $\sum F_i = 0$, akkor az eredő erő 0 N, azaz az erőrendszer egyensúlyban

4. Gyakorlat

Megoszló erőrendszer eredője



vonal mentén megoszló terhelés: $p = p(x)$ $[N/m]$

felbontjuk Δx hosszúságú szakaszokra. $\Delta x \ll \ell$

$\Delta F_i = p_i \Delta x = p(x_i)\Delta x$ ← elemi (koncentrált) erő

eredő: $F_e \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x$ — lásd véges sok párhuzamos erő eredője síkban (előző oldal)

az eredő helye: $x_e = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta F_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta F_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)\Delta x}{\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x}$

Határátmenet $\Delta x \to 0$, $\Sigma \to \int$ (integrálás)

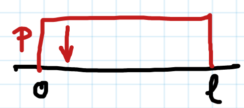
$$F_e = \int_0^\ell p(x)dx \qquad x_e = \frac{\int_0^\ell x\, p(x)dx}{\int_0^\ell p(x)dx}$$

(geometriailag a megoszló erőrendszer területe) — (geometriailag a megoszló erőrendszer súlypontján megy át)

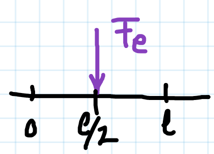
fenti képletben x_i-ből x, Σ-ból $\int$, Δx-ből dx lesz

Példa 1

$p(x) = p_0$ konstant



$\Rightarrow$



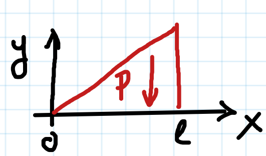
$F_e = \int_0^\ell p_0 dx = [p_0 x]_0^\ell = p_0 \ell$ — téglalap területe

$$x_e = \frac{\int_0^\ell p_0 x\,dx}{\int_0^\ell p_0\,dx} = \frac{[\frac{1}{2}p_0 x^2]_0^\ell}{[p_0 x]_0^\ell} = \frac{\frac{1}{2}p_0\ell^2}{p_0\ell} = \frac{1}{2}\ell$$

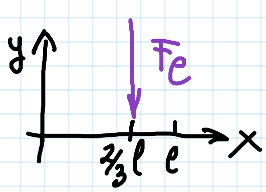
← átmegy a téglalap súlypontján

Példa 2

$p(x) = p_0 \cdot x$



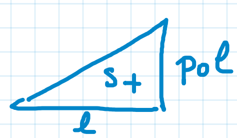
$\Rightarrow$



$F_e = \int_0^\ell p_0 x\,dx = \left[\frac{p_0 x^2}{2}\right]_0^\ell = \frac{p_0\ell^2}{2}$

derékszögű ◁ területe, lesz

$$x_e = \frac{\int_0^\ell p_0 x^2 dx}{\int_0^\ell p_0 x\,dx} = \frac{[p_0 x^3/3]_0^\ell}{p_0\ell^2/2} = \frac{p_0\ell^3\cdot 2}{p_0\ell^2\cdot 3} = \frac{2}{3}\ell$$



súlypont $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$ arányban osztja a befogókat

Súlypont

Ha a test homogén (sűrűsége állandó), akkor:

$$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varrho \Delta V_i \, \underline{r}_i}{\varrho V} = \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \, \underline{r}_i}{V}}$$

$\Delta m = \varrho \Delta V$
elem tömeg

Síkidomok súlypontja megfelel vékony homogén lemezek súlypontjával

$$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varrho v \Delta A_i \, \underline{r}_i}{\varrho v A} = \boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \, \underline{r}_i}{A}}$$

$\Delta m = \varrho \Delta V = \varrho v \Delta A$

v: lemezek vastagsága

A_i: elem síkidomok területe

Síkgörbék súlypontja

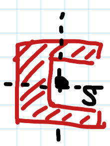
$$\boxed{\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \, \underline{r}_i}{l}}$$

Δl_i : az egyes elem görbék hossza

$\sum_{i=1}^{n} l_i = l$

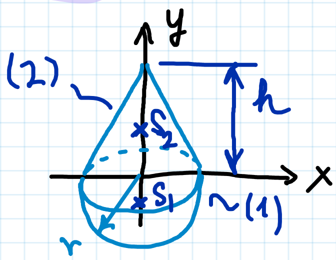
Megjegyzések

- ha egy test/síkidom szimmetrikus, akkor a súlypont mindig a szimmetria síkba/tengelyre esik
- a súlypont lehet testen kívül is, pl. ...



vagy

Példa 1 Test



(1): félgömb homogén test

(2): kúp Hol a súlypont?

$h = 1m$

$r = 0{,}5m$

(1): $x_{S1} = 0m$, $y_{S1} = -\frac{3}{8} m$, $V_1 = \frac{2}{3} r^3 \pi$

(2): $x_{S2} = 0m$, $y_{S2} = \frac{1}{4} h$, $V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

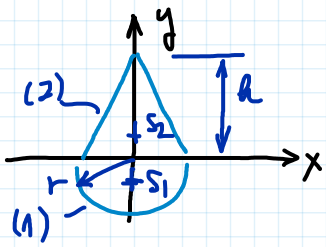
szimmetria   táblázatból

$$x_S = \frac{x_{S1} V_1 + x_{S2} V_2}{V_1 + V_2} = 0m$$
✓ (szimmetria)

$$y_S = \frac{y_{S1} V_1 + y_{S2} V_2}{V_1 + V_2} = \frac{-3r^2 + h^2}{8r + 4h} = 0{,}03125m$$

(z_S is 0m szimmetria miatt)

Példa 2 síkidom



$h = 1\,m$

$r = 0{,}5\,m$

(1) · félkör

(2) háromszög

$(1):\ x_{s_1} = 0,\quad y_{s_1} = -\frac{4r}{3\pi},\quad A_1 = \frac{r^2\pi}{2}$

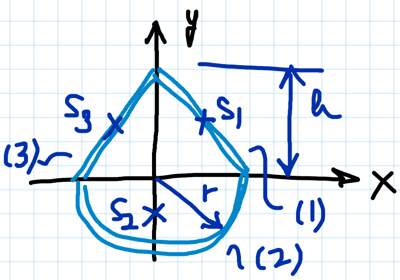
$(2):\ x_{s_2} = 0,\quad y_{s_2} = \frac{1}{3}h,\quad A_2 = \frac{2rh}{2} = rh$

$$x_s = \frac{x_{s_1}A_1 + x_{s_2}A_2}{A_1 + A_2} = 0\,m \quad \checkmark \text{ (szimmetria)}$$

$$y_s = \frac{y_{s_1}A_1 + y_{s_2}A_2}{A_1 + A_2} = 0{,}093\,m$$

Példa 3 síkgörbe

2 egyenes + 1 görbe rúd
(1) és (3) (2)



$h = 1\,m$

$r = 0{,}5\,m$

$(1):\ x_{s_1} = \frac{r}{2},\quad y_{s_1} = \frac{h}{2};\quad l_1 = \sqrt{r^2 + h^2}$

$(2) \cdot\ x_{s_2} = 0,\quad y_{s_2} = \frac{-2r}{\pi},\quad l_2 = r\pi$

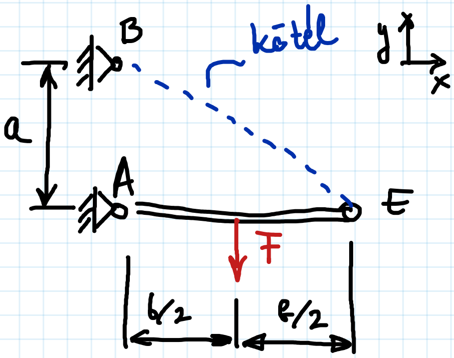
$(3)\quad x_{s_3} = -\frac{r}{2},\quad y_{s_3} = h/2,\quad l_3 = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$x_s = \frac{x_{s_1}l_1 + x_{s_2}l_2 + x_{s_3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = \frac{r/2 \cdot l_1 - r/2\, l_3}{l} = 0\,m \quad \checkmark \text{ (szimmetria)}$$

$$y_s = \frac{y_{s_1}l_1 + y_{s_2}l_2 + y_{s_3}l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = 0{,}162\,m$$

5. gyakorlat

Példa 1



$a = 2m$

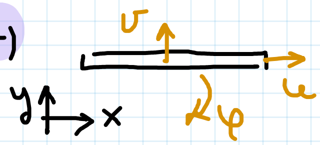
$b = 3m$

$F = 200\,N$

a, Statikailag határozott a szerkezet?

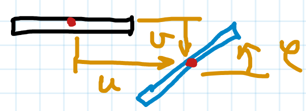
b, Határozzuk meg a reakcióerőket!
(szerkesztéssel és számítással)

a,



rúd: 3 szabadsági fok (DoF: degrees of freedom)

↳ mozoghat x irányba (u), y irányba (v), foroghat z tengely körül (φ)



Kötöttségi fok: csukló + kötél = 3

↓

gátolja a rúd A pontjának elmozdulását x és y irányba

= 2 kötöttségi fok

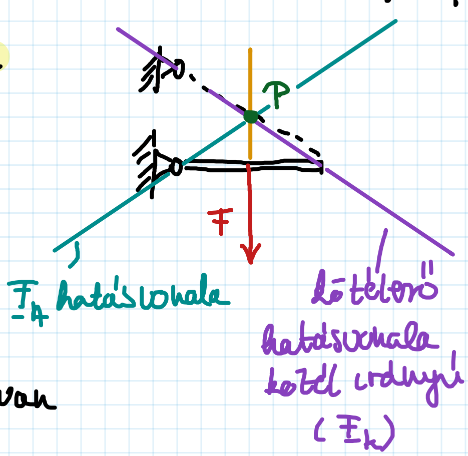
kötél kötélirányban gátolja az elmozdulást: 1 kötöttségi fok

⇒ szabadsági fok (3) = kötöttségi fok (3) ✓ statikailag határozott!

b, szerkesztéssel

mérték: 1 m

erőmérték: 100 N



1 léptékhelyes ábra

2 külső terhelések eredő erővel helyettesít (most csak 1 db F erő van, ez az eredő erő)

3 ismeretlen nagyságú, de ismert irányú erő hatásvonalának közös metszéspontja az eredő erő hatásvonalával (P pont)

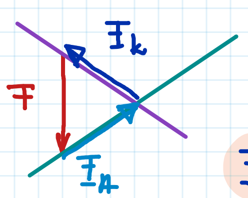
4. ezen át kell menni a A támaszoldali pont reakcióerőnek is

(egyébként nem állna fenn a nyomatéki egyensúly, mert P-re a másik 2 erőnek nincs nyomatéka, ha F_A hatásvonala nem menne át rajta, neki lenne P-re nyomatéka)

mivel egyensúlyban van

$\underline{F}_A + \underline{F} + \underline{F}_k = \underline{0}$

⇒ záródó vektorháromszög



$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} 1{,}5 \text{ lépték} \cdot 100 \\ 1 \text{ lépték} \cdot 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \end{bmatrix} N$

$\underline{F}_k = \begin{bmatrix} 1{,}5 \text{ lépték} \cdot 100 \\ 1 \text{ lépték} \cdot 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ 100 \end{bmatrix} N$

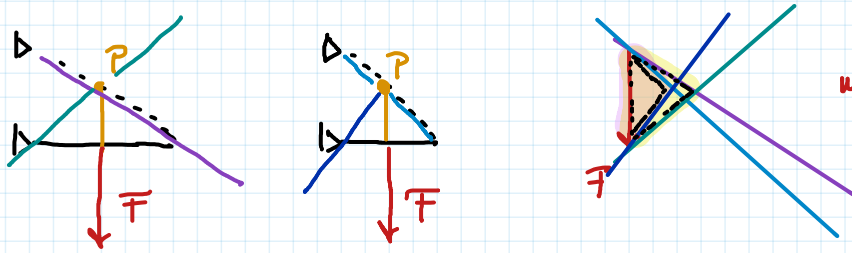
5 záródó vektorháromszög szerkesztése

6 erő leolvasás

lásd 2. hf 2b pontja

megjegyzés: ha az ábra nem léptékhelyes, más hatásvonalak adódnak => más lesz az eredmény!

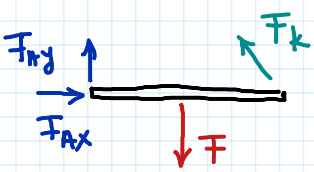
lásd:



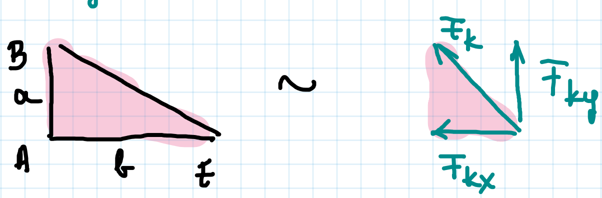
más a 2 háromszög!

számítással

SZTA'



F_k iránya ismert => hasonló háromszögek



$$\frac{F_{kx}}{F_{ky}} = \frac{b}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$F_{kx} = \frac{b}{a} F_{ky}$$

egyensúlyi egyenletek (EE)

$\Sigma F_x = 0: \quad F_{Ax} - F_{kx} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = F_{kx} = 150\,N$

$\Sigma F_y = 0: \quad F_{Ay} - F + F_{ky} = 0 \Rightarrow F_{Ay} = F - F_{ky} = 100\,N$

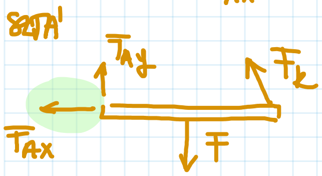
$\Sigma M_A = 0: \quad -F\frac{b}{2} + F_{ky} b = 0 \Rightarrow F_{ky} = \frac{1}{2}F = 100\,N \Rightarrow F_{kx} = 1{,}5 \cdot F_{ky} = 150\,N$

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_k = \begin{bmatrix} -F_{kx} \\ F_{ky} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ 100 \end{bmatrix} N$$

SZTA'-n a nyilacska negatív irányba nézett

Megjegyzés 1: Mi történik, ha F_{Ax}-et másik irányba feltételezzük az SZTA'-n?

SZTA'



EE

$\Sigma F_x = 0: \quad -F_{Ax} - F_{kx} = 0 \rightarrow F_{Ax} = -F_{kx} = -150\,N$

$\Sigma F_y = 0: \quad F_{Ay} - F + F_{ky} = 0 \rightarrow F_{Ay} = 100\,N$

$\Sigma M_A = 0: \quad F_{ky} b - F\,b/2 = 0 \rightarrow F_{ky} = 100\,N, \; F_{kx} = 150\,N$

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} -F_{Ax} \\ F_{Ay} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 100 \end{bmatrix} N$$

vektoriálisan ugyanaz marad!

Megjegyzés 2: bármilyen 3 lineárisan független egyenlet felírható egyensúlyi egyenletekként

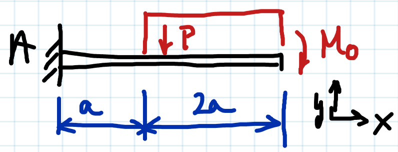
pl: 2 pontra nyomatéki egyensúly + 1 erő egyensúly

3 nyomatéki egyensúly (a 3 pont nem eshet egy egyenesre, mert nem lenne lineárisan független)

síkban maximum 3 független egyensúlyi egyenletet tudunk felírni egy testre

itt pl a 3 nyomatéki egyenletet felírhatjuk A, B és E pontokra ⌂ ell

Példa 2



$a = 1\,m$

$p = 600\ N/m$

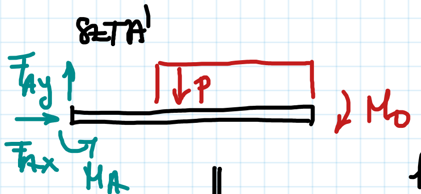
$M_0 = 200\ Nm$

Határozzuk meg a reakcióerőket!

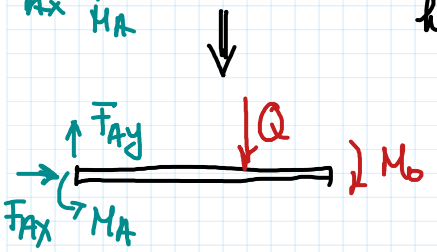
Befogás nem engedi az x, y irányú elmozdulást, se a z irányú elfordulást

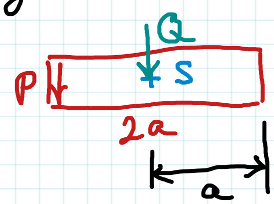
↳ F_{Ax}, F_{Ay} irányú erőt fejt ki, illetve M_A nyomatékot

SZTA



helyettesítjük a megoszló terhelést koncentrált erővel





Q ~ Terület és átmegy a súlyponton

$Q = p2a$

EE

$\Sigma F_x = 0:\ F_{Ax} = 0$

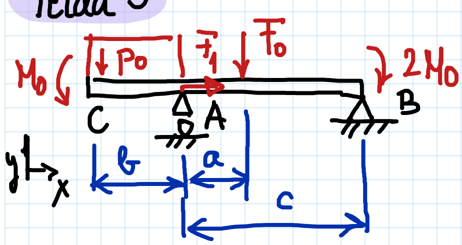
$\Sigma F_y = 0:\ F_{Ay} - Q = 0 \longrightarrow F_{Ay} = 2ap = 1200\,N$

$\Sigma M_a = 0:\ M_A - Q\,2b - M_0 = 0 \longrightarrow M_A = M_0 + 4a^2p = 2600\ Nm$

↳ érdemes olyan pontra felírni a nyomatéki egyensúlyt, ahol van ismeretlen erő, mert az nem jelenik meg az egyenletben

$$F_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1200 \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad M_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2600 \end{bmatrix} Nm$$

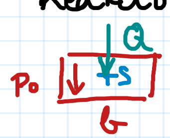
Példa 3



$a = 0{,}5\,m$; $b = 0{,}8\,m$, $c = 1{,}2\,m$

$F_1 = 12\,kN$; $F_0 = 14\,kN$; $M_0 = 2{,}4\,kNm$; $p_0 = 9\,\frac{kN}{m}$

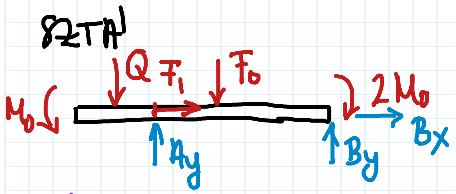
Reakcióerők?



Q ~ terület, átmegy a súlyponton

$Q = p_0 b$

SZTA



EE írjuk fel úgy, hogy 1 erő és 2 nyomatéki egyensúly

$\Sigma F_x = 0:\ B_x + F_1 = 0 \quad (1)$

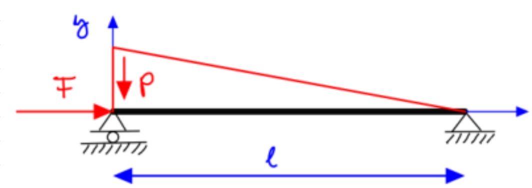
$\Sigma M_a = 0:\ M_0 + Q\frac{b}{2} - F_0 a + B_y c - 2M_0 = 0 \quad (2)$

$\Sigma M_b = 0:\ M_0 - 2M_0 + Q\left(c + \frac{b}{2}\right) - A_y c + F_0(c-a) = 0 \quad (3)$

görgő x irányba el tud gurulni ⇒ csak y-ba fejt ki erőt

(1) $B_x = -F_1 = -12\,kN$ (3) $A_y = 15{,}77\,kN$ (2) $B_y = 5{,}43\,kN$

Példa 4



Adatok: $l = 2\,m$, $p = 1{,}2\,kN/m$, $F = 600\,N$

Szerkesszük meg a reakcióerőket!

Helyettesítsük a megoszló erőrendszert

F_p ~ háromszög területe

x_p ~ háromszög súlypontja

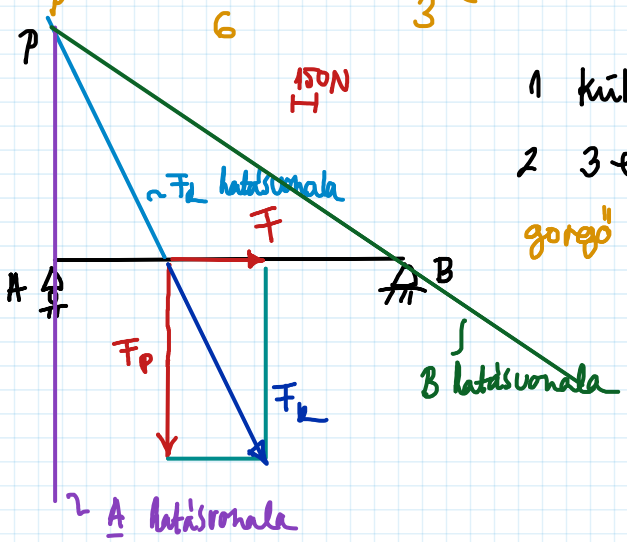
$$F_p = \frac{pl}{2} \qquad x_p = \frac{l}{3}$$

VAGY definíció szerint $F_p = \int_0^l p(x)dx = \left[px - \frac{px^2}{2l}\right]_0^l = pl - \frac{pl}{2} = \frac{pl}{2}$ ✓

$p(x) = p - \frac{p}{l}x$

$$x_p = \frac{\int_0^l x\,p(x)dx}{F_p} = \frac{\int_0^l \left(px - \frac{px^2}{l}\right)dx}{F_p} = \frac{\left[\frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{3l}\right]_0^l}{pl/2} = \frac{\frac{pl^2}{2} - \frac{pl^2}{3}}{pl/2}$$

$$x_p = \frac{2(3l-2l)}{6} = \frac{1}{3}l \ ✓$$



1 külső terhelés eredőjének meghatározása

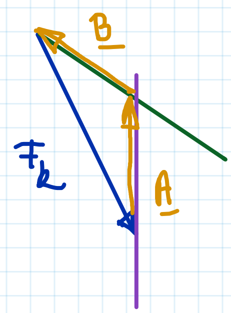
2 3 erő egyensúlya → $\underline{F}_k + \underline{A} + \underline{B} = 0$

görgős csukló 1 szabadságfokot köt meg

↳ 1 reakcióerő, iránya ismert

=> P ponton át kell mennie a B csuklóban ható reakcióerőnek

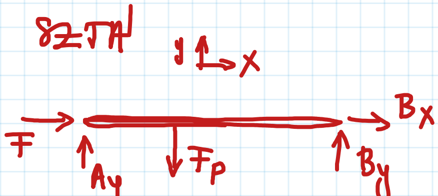
megszerkesztve:



mivel csak a rácsokat használtam szerkesztésnél, a leolvasott erők: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 750 \end{bmatrix} N$ $\underline{B} = \begin{bmatrix} -600 \\ 450 \end{bmatrix} N$

számítással

SZTA



EE

$\Sigma F_x = 0$: $F + B_x = 0 \longrightarrow B_x = -F = -600N$

$\Sigma F_y = 0$ $A_y - F_p + B_y = 0 \longrightarrow A_y = \frac{pl}{2} - \frac{pl}{6} = \frac{pl}{3} = 800N$

$\Sigma M_a = 0$: $B_y l - F_p l/3 = 0 \longrightarrow B_y = \frac{pl}{6} = 400N$

Tehát a szerkesztés kevésbé pontos az erőlépték választás miatt!

6. Gyakorlat

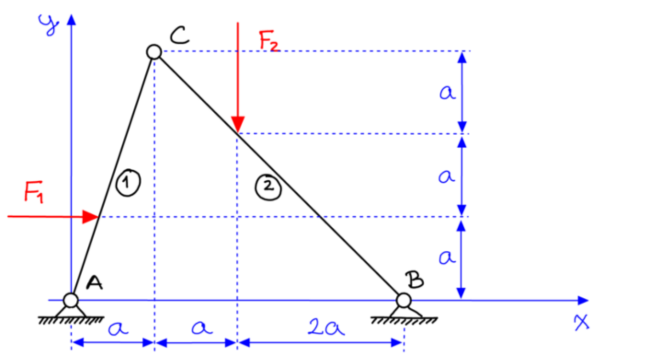
Síkbeli csuklós szerkezetek

- merev, egyenes rudakból állnak
- rudak csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz (nem feltétlen a végeiken)
- terhelés tetszőleges helyen hat (nem csak a csuklókban, mint a rácsos szerkezeteknél)

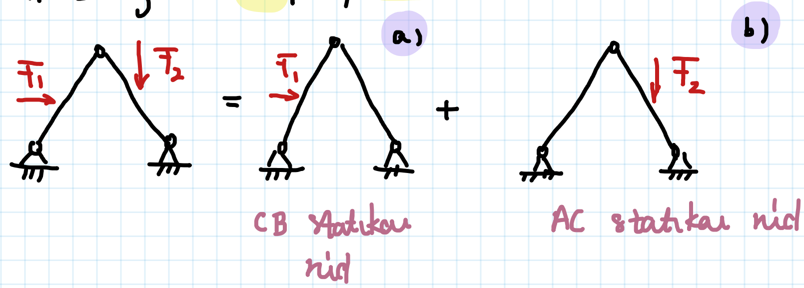
megoldás: → részekre bontás
→ szuperpozíció elve (ugyanaz, mint lineáris rendszereknél
bemenő jel ~ terhelés
kimenő jel ~ reakció
⇒ n-szeres terhelés n-szeres reakciót jelent)

Példa 6.1

6.1. Példa. Határozzuk meg számítással és szerkesztéssel az alábbi bakállvány esetén a reakcióerőket!
Adatok: $F_1 = 300$ N, $F_2 = 400$ N.
Megoldás: $F_{Ax} = -158,333$ N, $F_{Ay} = 125$ N, $F_{Bx} = -141,667$ N, $F_{By} = 275$ N.



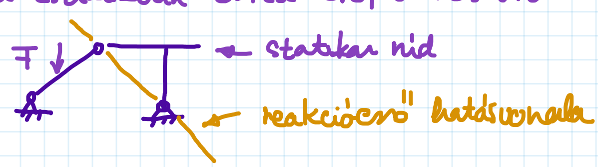
Használjuk a szuperpozíció elvét!



Statikai rúd: csuklókban ébredő reakcióerők rúd irányúak

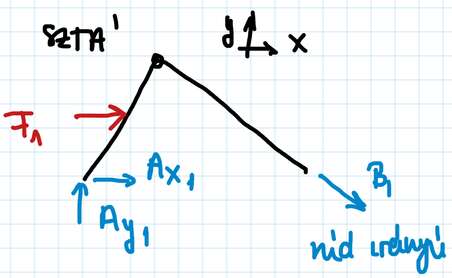
Miért? Mivel egyensúlyban van a szerkezet, minden tagja egyensúlyban van. Mivel a statikai rúd esetén csak a csuklókban ébred erő, a két erő azonos nagyságú, irányú, de ellentétes értelmű

pl.:



a) számítás

SZTA'

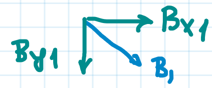


EE

$\Sigma F_x = 0: \; F_1 + A_{x1} + B_{x1} = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0: \; A_{y1} - B_{y1} = 0$ (2)

$\Sigma M_a = 0: \; -F_1 a - B_{y1} \cdot 4a = 0$ (3)

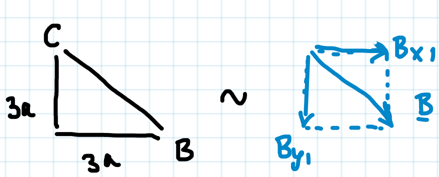


felbontva

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{x1} \\ -B_{y1} \end{bmatrix}$$

(3): $B_{y1} = -F_1/4 = -75$N (2) $A_{y1} = B_{y1} = -75$ N

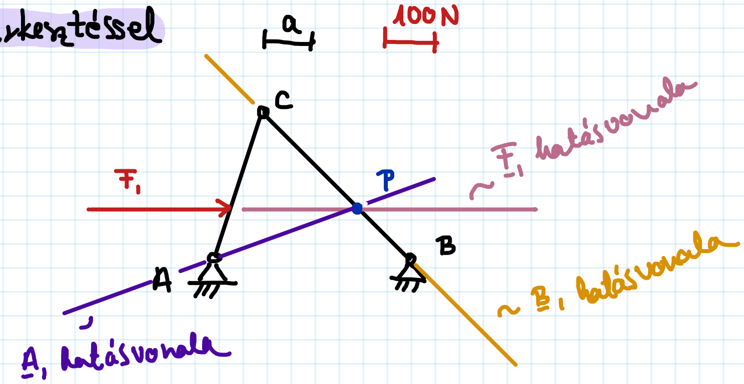
B_1 iránya ismert



$\frac{B_{x1}}{B_{y1}} = \frac{3a}{3a} \Rightarrow B_{x1} = -75$ N

(1) $A_{x_1} = -F_1 - B_{x_1} = -225\,N$ $\qquad \underline{A}_1 = \begin{bmatrix}-225\\-75\end{bmatrix} N \qquad \underline{B}_1 = \begin{bmatrix}-75\\75\end{bmatrix} N$

szerkesztéssel



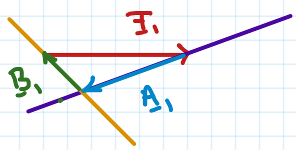
3 erő egyensúlya

F_1 és B_1 hatásvonala ismert

↦ ? metszéspont

A_1 hatásvonala átmegy A-n és P-n

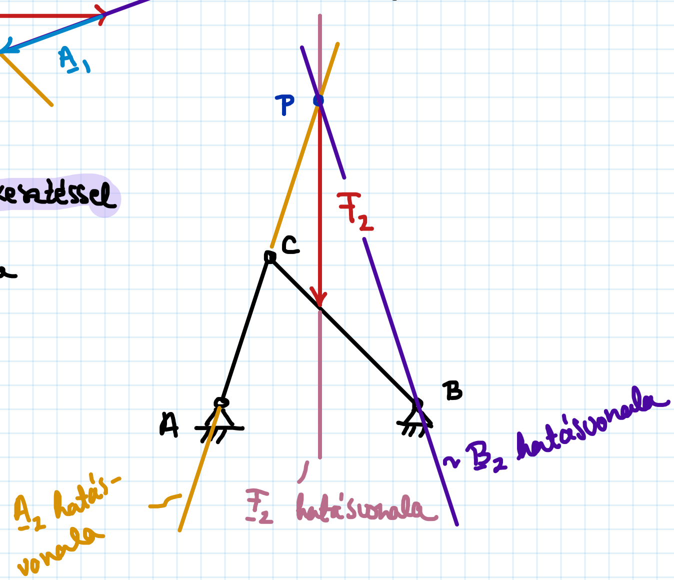
⇒ vektorfolyam szerkeszt

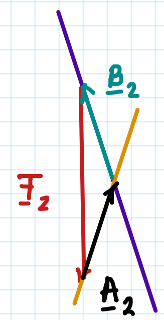


vektorfolyam

b) szerkesztéssel

A_2, F_2 iránya ismert

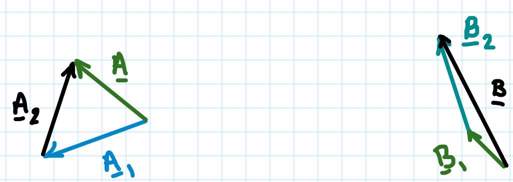




vektorfolyam

A terhelés a kettő vektoriális összege

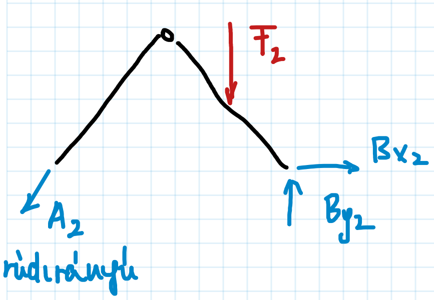
$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \qquad \underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2$



leolvasva: $\underline{A} = \begin{bmatrix}-1{,}5\cdot 100\\1{,}25\cdot 100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-150\\125\end{bmatrix} N \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix}-1{,}5\cdot 100\\2{,}75\cdot 100\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-150\\275\end{bmatrix} N$

számítással

SZTA'

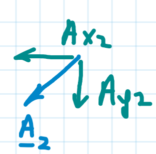


EE

$\Sigma F_x = 0: \; -A_{x2} + B_{x2} = 0 \qquad (1)$

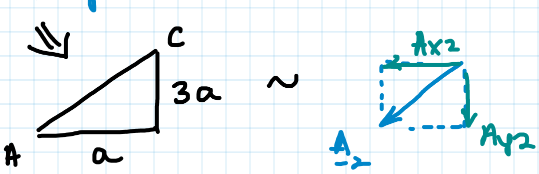
$\Sigma F_y = 0: \; -A_{y2} + B_{y2} - F_2 = 0 \qquad (2)$

$\Sigma M_b = 0: \; A_{y2}\cdot 4a + F_2 \cdot 2a = 0 \qquad (3)$



$\underline{A}_2 = \begin{bmatrix}-A_{x2}\\-A_{y2}\end{bmatrix}$

(3) $A_{y2} = -F_2/2 = -200\,N \qquad$ (2) $B_{y2} = A_{y2} + F_2 = 200\,N$



$\frac{3a}{a} = \frac{A_{y2}}{A_{x2}} \Rightarrow A_{x2} = \frac{A_{y2}}{3} = -66{,}67\,N$

$B_{x2} = A_{x2} = -66{,}67$ N $\qquad \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 66{,}67 \\ 200 \end{bmatrix}$ N $\qquad \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} -66{,}67 \\ 200 \end{bmatrix}$ N

A terhelés a kettő vektor összege! $\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} -225 \\ -75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 66{,}67 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -158{,}33 \\ 125 \end{bmatrix}$ N

$\underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} -75 \\ 75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -66{,}67 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -141{,}67 \\ 275 \end{bmatrix}$ N

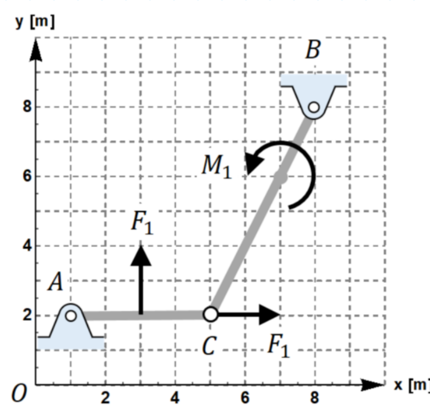
Szerkesztés és számolás összhangban van, mivel a szerkesztés 25 N pontossági volt

Példa 6.3

6.3. Példa. A vázolt csuklós szerkezetet az AC és BC merev rudak alkotják, melyek a C csuklóval kapcsolódnak egymáshoz. A berajzolt terhelések nagyságai: $F_1 = 20$ kN, $M_1 = 12$ kNm.

Feladatok: **a)** Rajzolja fel külön-külön az AB és BC rudak szabadtest ábráit, valamint határozza meg a szerkezet reakcióerőit és írja fel vektorosan az $\boldsymbol{F}_A$ és $\boldsymbol{F}_B$ reakcióerőket! **b)** Írja fel vektorosan a CB rúdról az C *csuklóra* (*csapra*) átadódó $\boldsymbol{N}_{CB}$ erővektort! **c)** Írja fel vektorosan az AC rúdról az C *csuklóra* (*csapra*) átadódó $\boldsymbol{N}_{AC}$ erővektort!

Megoldás: $F_{Ax} = -17$ kN, $F_{Ay} = -10$ kN, $F_{Bx} = -3$ kN, $F_{By} = -10$ kN, $\boldsymbol{N}_{CB} = \boldsymbol{F}_B$, $N_{ACx} = -17$ kN, $N_{ACy} = 20$ kN.

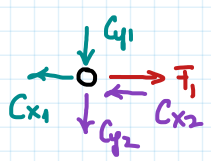


Oldjuk meg részekre bontással!

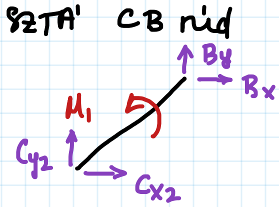
Ha csuklóban hat külső terhelés, az erőt csak az egyik testen tüntetjük fel!

SZTA AC rúd

SZTA C csukló



SZTA CB rúd



most a csuklóban ható erőt a C csuklón tüntettem fel

Figyeljük meg, hogy a 3 szabadtest ábrát összeillesztve a C csukló belső erői kiejtik egymást, és csak az F_1 külső terhelés marad ott!

3 + 2 + 3 egyensúlyi egyenletet lehet felírni a 3 SZTA-hoz.

EE AC rúd

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + C_{x1} = 0 \qquad (1)$

$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + F_1 + C_{y1} = 0 \qquad (2)$

$\Sigma M_c = 0: \quad -A_y \cdot 4m - F_1 \cdot 2m = 0 \qquad (3)$

EE C csukló

$\Sigma F_x = 0: \quad F_1 - C_{x1} - C_{x2} = 0 \qquad (4)$

$\Sigma F_y = 0: \quad -C_{y1} - C_{y2} = 0 \qquad (5)$

EE CB rúd

$\Sigma F_x = 0: \quad B_x + C_{x2} = 0 \qquad (6)$

$\Sigma F_y = 0: \quad C_{y2} + B_y = 0 \qquad (7)$

$\Sigma M_c = 0: \quad M_1 + B_y \cdot 3m - B_x \cdot 6m = 0 \qquad (8)$

(3) $A_y = -\frac{F_1}{2} = -10$ kN

(2) $C_{y1} = -A_y - F_1 = -10$ kN

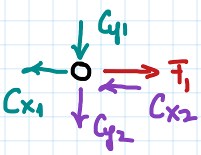
(5) $C_{y2} = -C_{y1} = 10$ kN

(7) $B_y = -C_{y2} = -10\,kN$ (8) $B_x = \frac{M_1}{6} + \frac{B_y}{2} = -3\,kN$ (9) $C_{x2} = -B_x = 3\,kN$

(4) $C_{x1} = F_1 - C_{x2} = 17\,kN$ (1) $A_x = -C_{x1} = -17\,kN$

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ -10 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{F}_B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix} kN$$

SZTA alapján a C csukló terhelésen



BC rúdról $\underline{N}_{BC} = \begin{bmatrix} -C_{x2} \\ -C_{y2} \end{bmatrix}$

AC rúdról $\underline{N}_{AC} = \begin{bmatrix} -C_{x1} \\ -C_{y1} \end{bmatrix}$

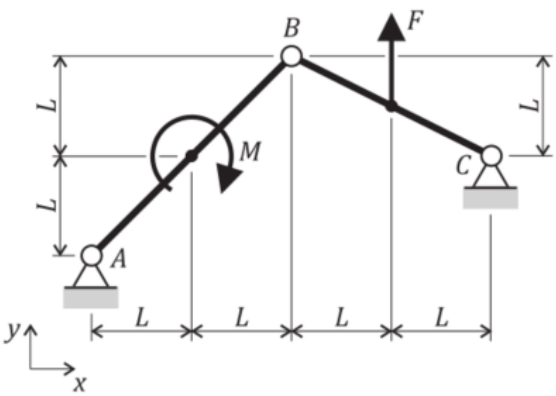
Tehát $\underline{N}_{BC} = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{N}_{AC} = \begin{bmatrix} -17 \\ 10 \end{bmatrix} kN$

Példa 6.2

6.2. Példa. Az AB és BC egyenes merev rudakat a B csukló kapcsolja össze. A tartó terhelése a megadott F nagyságú koncentrált erő és M nagyságú koncentrált erőpár a megadott értelemekben. A tartó nyugalomban van. Adatok: $L = 1\,\mathrm{m}$, $F = 20\,\mathrm{N}$, $M = 50\,\mathrm{Nm}$.

Feladatok: **a)** Rajzolja fel külön-külön az AB és BC rudak szabadtest ábráit! A BC rúdról az AB rúdra átadódó erőt jelölje $\underline{F}_B$-vel! **b)** Határozza meg az A és C csuklós támaszoknál fellépő $\underline{F}_A$ és $\underline{F}_C$ reakcióerő vektorokat! **c)** Adja meg a BC rúdról az AB rúdra átadódó erőt $\underline{F}_B$ erő vektort!

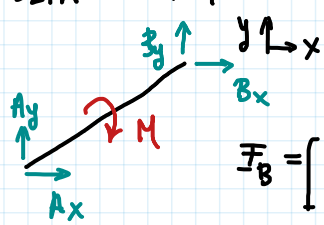
Megoldás: $F_{Ax} = 10$ N, $F_{Ay} = -15$ N, $F_{Cx} = -10$ N, $F_{Cy} = 15$ N, $\boldsymbol{N}_{CB} = \boldsymbol{F}_B$, $F_{Bx} = -10$ N, $F_{By} = 15$ .N



Oldjuk meg részekre bontás elvével!

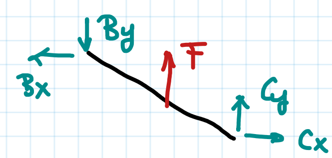
Most elég 2 részre bontani a csuklónál, mert csak 2 test csatlakozik és nincs rajta külső terhelés!

SZTA AB rúd



$\underline{F}_B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$

SZTA BC rúd



EE AB rúd

$\Sigma F_x = 0: \; A_x + B_x = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \cdot \; A_y + B_y = 0$ (2)

$\Sigma M_b = 0: \; A_x \cdot 2L - A_y \cdot 2L - M = 0$ (3)

EE BC rúd

$\Sigma F_x = 0 \cdot \; C_x - B_x = 0$ (4)

$\Sigma F_y = 0: \; C_y - B_y + F = 0$ (5)

$\Sigma M_b = 0 \quad F \cdot L + C_y \cdot 2L + C_x\, L = 0$ (6)

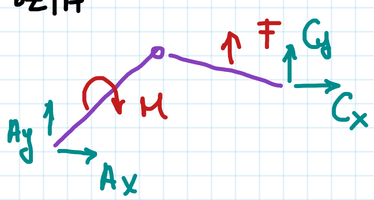
6 egyenlet, 6 ismeretlen

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_C = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \end{bmatrix} N$$

BC rúd hatása AB-re az AB rúd SZTA'-jából olvasható le, azaz $\underline{F}_B = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \end{bmatrix} N$

Megjegyzés

SZTA



Szerkezetre felírt 3 egyensúlyi egyenletet lehet ellenőrzésre használni

$\Sigma F_x = 0: \; A_x + C_x = 0$

$\Sigma F_y = 0: \; A_y + C_y + F = 0$

$\Sigma M_a = 0: \; -M + F \cdot 3L + C_y \cdot 4L - C_x\, L = 0$

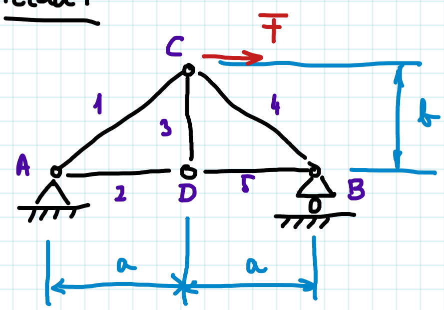
7. Gyakorlat

Síkbeli rácsos szerkezetek

- merev, egyenes rudakból állnak
- rudak végeikkel csuklósan kapcsolódnak egymáshoz
- terhelés koncentrált erőkből áll, melyek a csuklókban hatnak
- szerkezet statikailag határozott

megoldás: → csomóponti módszer
↳ átmetsző módszer

Példa 1



$a = 1\,m$

$b = 1{,}2\,m$

$F = 2\,kN$

csuklókat betűkkel, rudakat számokkal jelöljük

Statikailag határozott?

szabadsági fok: $5 \cdot 3 = 15$ (5 test, mindegyiknek 3 szabadsági foka van)

kötöttségi fok:	csukló	test		kötöttségi fok (csukló 2, görgő 1)
csukló	A	0, 1, 2	3db	$2 \cdot (3-1) = 4$
görgő	B	0, 4	2db	$1 \cdot (2-1) = 1$
csukló	C	1, 3, 4	3db	$2 \cdot (3-1) = 4$
csukló	D	2, 3, 5	3db	$2 \; (3-1) = 4$
csukló	B	4, 5	2db	$2 \cdot (2-1) = 2$
				$\Sigma\, 15$ ✓

megjegyz.: talajt 0. testként jelöljük

kötöttségi fok = szabadsági fok
⇒ statikailag határozott

Oldjuk meg csomóponti módszerrel!

Alapötlet: szerkezet egyensúlyban ⇒ minden rúd egyensúlyban van

Mivel rudak végpontjain terheltek, csak ott lép fel reakcióerő. A 2 reakcióerő egyensúly esetén azonos hatásvonalú, nagyságú és ellentétes értelmű.

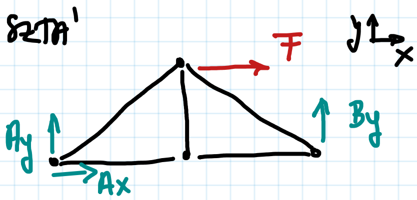
Def.: végpontjain terhelt rudat statikai rúdnak hívjuk

Rúd lehet húzott vagy nyomott
↓ pozitív ↓ negatív rúderő (Számításainknál ez fontos → rúderő pozitív vagy negatív hosszváltozást eredményez)

Hasonlóan, minden csukló egyensúlyban van

1. lépés: reakcióerők meghatározása

SZTA



EE

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + F = 0 \longrightarrow A_x = -F = -2\,kN$

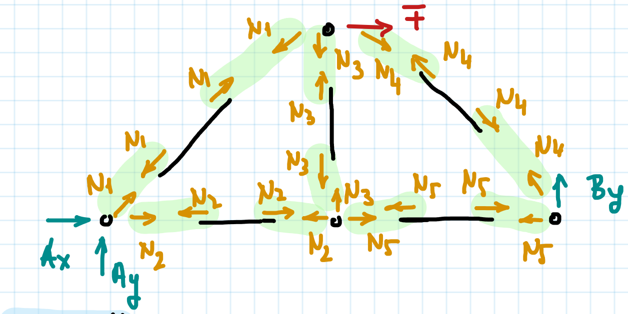
$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + B_y = 0 \longrightarrow A_y = -B_y = -1{,}2\,kN$

$\Sigma M_a = 0: \quad -F \cdot b + B_y \cdot 2a = 0 \longrightarrow B_y = F \frac{b}{2a} = 1{,}2\,kN$

2. lépés: rúderők meghatározása, most csomóponti módszerrel
↳ csuklók egyensúlyát vizsgáljuk
↳ 2 független egyenlet

előnye: jól algoritmizálható; összes rúderőt kiszámoljuk

Feltételezés: rudak húzottak



4 csukló → 4 SZTA'

↳ $2 \cdot 4 = 8$ egyenlet

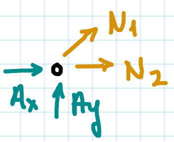
csuklónak mint kiterjedése, pontszerű

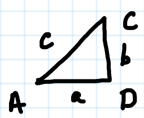
↳ x, y irányú egyenlet

olyan csuklóval érdemes kezdeni, ahol max 2 ismeretlen erő van

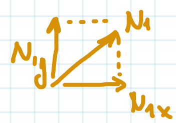
utána csuklóról csuklóra haladunk

A csukló





~



$$\frac{N_{1x}}{N_{1y}} = \frac{a}{b}$$

EE

$\Sigma F_x = 0: \ A_x + N_2 + N_{1x} = 0$

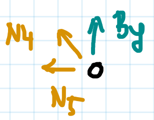
$\Sigma F_y = 0: \ A_y + N_{1y} = 0$

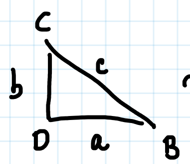
$N_{1y} = -A_y = 1{,}2\,kN \Rightarrow N_{1x} = \frac{a}{b} N_{1y} = 1kN$

$$\frac{N_1}{N_{1x}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \Rightarrow N_1 = N_{1x}\frac{c}{a} = 1{,}562\,kN$$ húzott

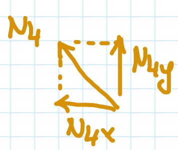
$N_2 = -A_x - N_{1x} = 1kN$ húzott

B csukló





~



EE

$\Sigma F_x = 0: \ -N_5 - N_{4x} = 0$

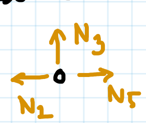
$\Sigma F_y = 0: \ B_y + N_{4y} = 0 \rightarrow N_{4y} = -B_y = -1{,}2\,kN$

$$\frac{N_{4x}}{N_{4y}} = \frac{a}{b} \Rightarrow N_{4x} = N_{4y}\frac{a}{b} = -1kN \Rightarrow N_4 = N_{4x}\frac{c}{a} = -1{,}562\,kN$$ nyomott

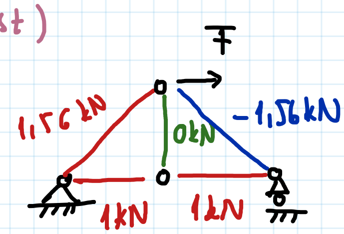
$$\frac{N_4}{N_{4x}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

$N_5 = -N_{4x} = 1kN$ húzott

C csukló

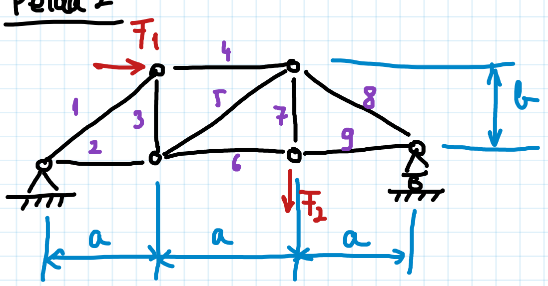


$\Sigma F_y = 0: \ N_3 = 0\,kN$ vakrúd (nem vesz fel terhelést)



Megjegyzés: fennmaradó 3 egyenletet ellenőrzésre lehet használni

Példa 2



$a = 2m$

$b = 1{,}5m$

$F_1 = 2kN$

$F_2 = 3kN$

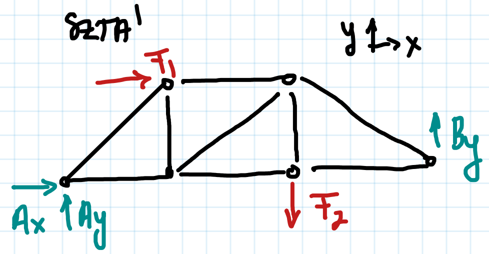
Mekkora a 4-es rúdban ébredő rúderő?

Oldjuk meg átmetsző módszerrel!

Átmetsző módszer: akkor használjuk, ha a rúderőt csak az egyik rúdjára kell a szerkezetnek meghatározni.

Használat: 2 részre vágjuk a szerkezetet úgy, hogy a kérdéses rúdon kívül még max másik 2 rudat vágunk el. A három rúd nem futhat közös csomópontba. Ezután a szerkezet egyik felére felírjuk az egyensúlyi egyenleteket.

1. lépés. reakcióerők



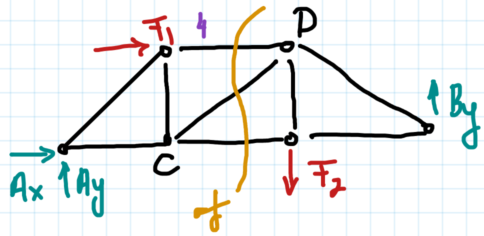
EE

$\Sigma F_x = 0:\ A_x + F_1 = 0 \rightarrow A_x = -2\,kN$

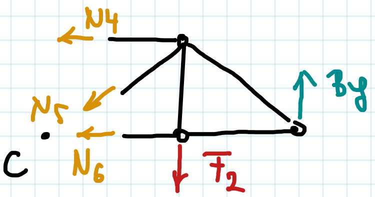
$\Sigma F_y = 0:\ A_y - F_2 + B_y = 0 \rightarrow A_y = 0{,}5\,kN$

$\Sigma M_a = 0:\ -F_1 b - F_2 \cdot 2a + B_y \cdot 3a = 0 \rightarrow B_y = 2{,}5\,kN$

2. lépés: szerkezet átmetszése
bármelyik felének kiválasztása
Legyen a jobb fele



rúderők mind irányukat húzottnak feltételezzük őket



EE

$\Sigma F_x = 0:\ -N_4 - N_{5x} - N_6 = 0$ (1)

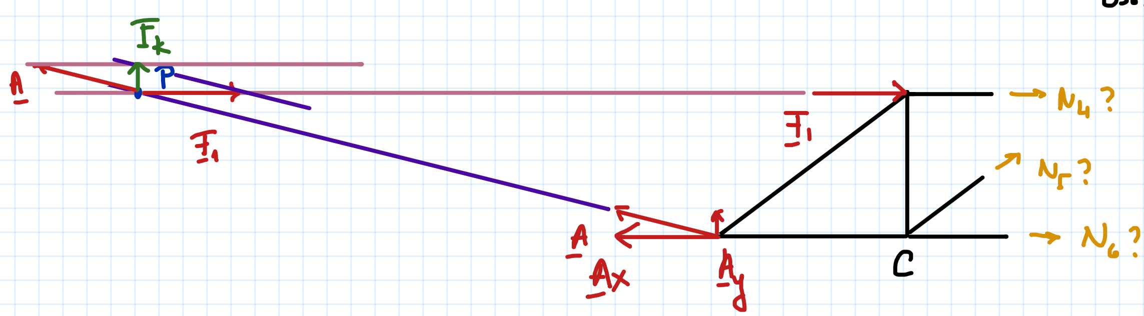
$\Sigma F_y = 0:\ -N_{5y} - F_2 + B_y = 0$ (2)

$\Sigma M_c = 0:\ N_4 b - F_2 a + B_y \cdot 2a = 0$ (3)

(3) $N_4 = -2{,}667\,kN$

Szerkesztéssel

1. kiválasztjuk az egyik felet, méretarányos ábrát készítünk (legyen a bal!) 0,5 m
2. erőléptéket veszünk fel 0,5 kN
3. külső terhelések eredőjét megszerkesztjük → hatásvonalak közös metszéspontjában összegez ↳ F_k



4. Négy erő egyensúlya: $\underline{F}_k + \underline{N}_4 + \underline{N}_5 + \underline{N}_6 = \underline{0}$ ⇒ Cullmann szerkesztés

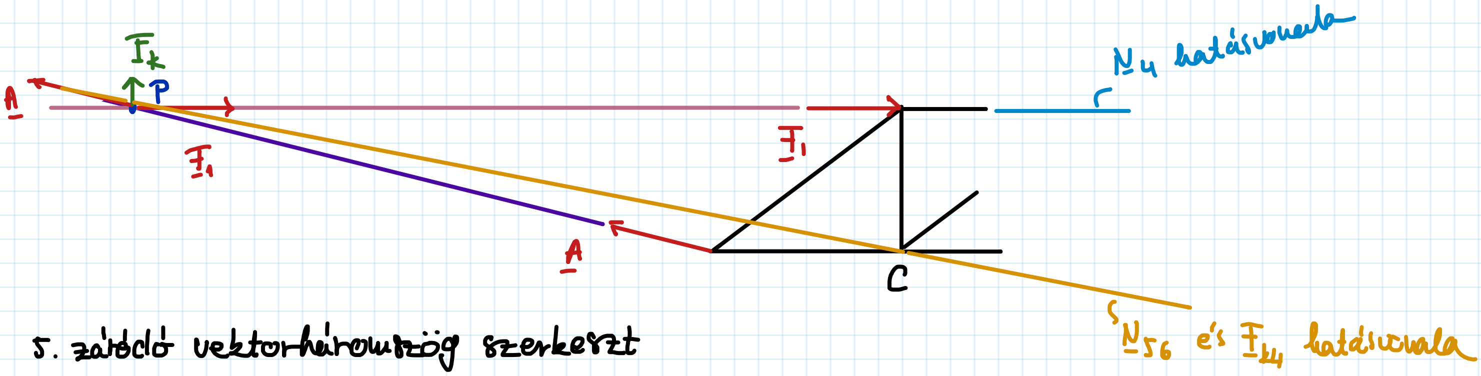
$\underbrace{\underline{F}_k + \underline{N}_4}_{\text{hatásvonalak}} = -(\underbrace{\underline{N}_5 + \underline{N}_6}_{})$

hatásvonalak C pontban metszik egymást ⇒ összegvektoruk átmegy C-n

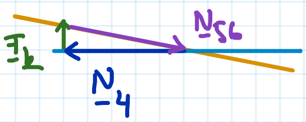
P pontban metszik egymást ⇒ összegvektoruk átmegy P-n

$\underline{F}_{k4} = -\underline{N}_{56}$ ⇒ egyensúly esetén a két összegvektor azonos hatásvonalú
↳ hatásvonal átmegy P-n és C-n

$\underline{F}_k + \underline{N}_4 + \underline{N}_{56} = \underline{0}$ ← 3 erő egyensúlya; $\underline{N}_{56}$ iránya ismert a fentiekből, $\underline{N}_4$ rúdirányú



5. záródó vektorháromszög szerkeszt



6 leolvas

$$\underline{N}_4 = \begin{bmatrix} -5 \cdot 0{,}5\ kN \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} kN$$

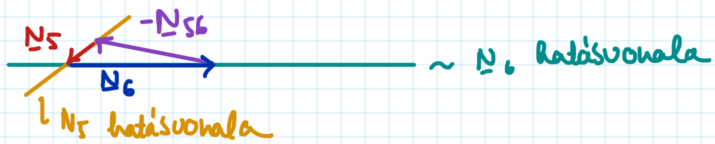
visszarajzolva látjuk, hogy nyomná a rudat az erő => 4-es nyomott rúd

$N_4 = -2{,}5\ kN$

A szerkesztés összhangban van a számítással, ugyanis a szerkesztés pontosság 0,25 kN volt

megjegyzés:

N_5 és N_6 is kiszerkeszthető, mivel $\underline{N}_{56}$ már ismert, illetve N_5 és N_6 irányuk



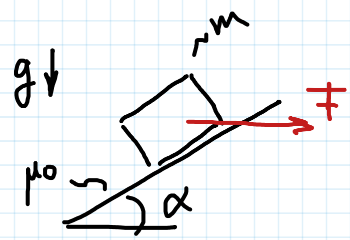
$\underline{N}_{56} = \underline{N}_5 + \underline{N}_6 \Rightarrow \underline{N}_5 + \underline{N}_6 - \underline{N}_{56} = \underline{0}$

alkot záródó vektorháromszöget

N_6 húzott, nagysága kb 6 egység: $N_6 = 3\ kN$

N_5 nyomott, nagysága kb 1,5 egység. $N_5 = -0{,}75\ kN$

8. gyakorlat



μ_0: tapadási súrlódási együttható

Hasáb tömegpontként kezelhető

Adott: m, μ_0, F

F vízszintes

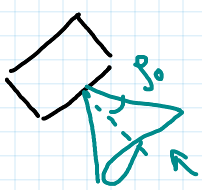
Mekkora az a minimális és maximális erő, amivel hatva a hasábra az nyugalomban marad?

Nyugalomban marad, ha $\underline{K}$ kényszererő a súrlódási kúpon belül marad

$\underline{K} = \underline{N} + \underline{S}$

$\underline{N}$: felületre normális irányú komponens

$\underline{S}$: felület síkjába eső komponens



súrlódási kúp

$\mu_0 = \operatorname{tg} \rho_0$

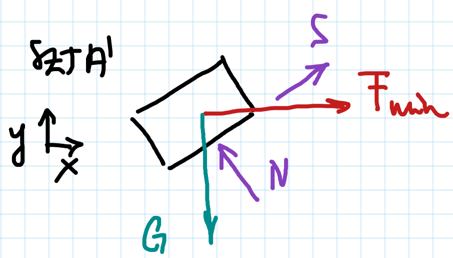
ρ_0: súrlódási félkúpszög

a) $F_{min} = ?$

↓

pont nem csúszik le a hasáb

SZTA



$G = mg$

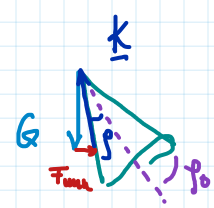
$\underline{F_{min}} + \underline{G} + \underline{K} = \underline{0}$

3 erő egyensúlya

↳ S a lefele mozgást akadályozza: felfele mutat a lejtőn

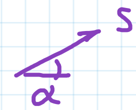
K maradjon a félkúpban, de szélső helyzetben

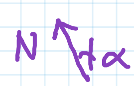
$\operatorname{tg} \rho = \dfrac{S}{N}$, $\rho \leq \rho_0$ esetén a félkúpon belül vagyunk



$\Rightarrow$ szélsőhelyzet esetén $\rho = \rho_0 \Rightarrow \operatorname{tg} \rho_0 = \mu_0 = \dfrac{S}{N}$ (1)

EE





$\Sigma F_x = 0$: $F_{min} + S \cdot \cos\alpha - N \sin\alpha = 0$ (2)

$\Sigma F_y = 0$: $-G + S \sin\alpha + N \cos\alpha = 0$ (3)

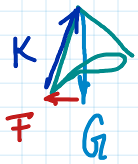
(1): $N = \mu_0 S$

(3) $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha + \mu_0 \sin\alpha}$

(2) $F_{min} = \dfrac{\sin\alpha - \mu_0 \cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_0 \sin\alpha} \cdot mg$

Ha $\sin\alpha - \mu_0 \cos\alpha \le 0$ külső erő nélkül is nyugalomban marad a test, mivel tolni kéne, hogy lecsússzon (F_{min} negatív)

ábrázolva pl.:

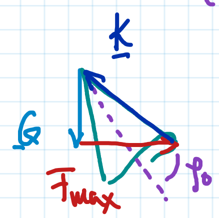


$\underline{G}$ a súrlódási félkúpban volt, balra mutató $\underline{F}$ vektorral érintenénk a palástot

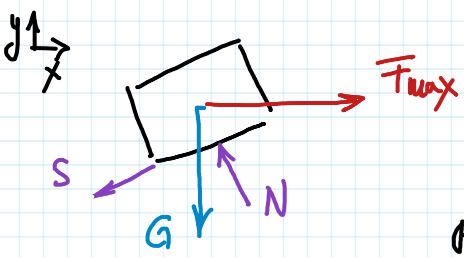
Mikor igaz ez? $\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha \le 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \le \mu_0 = \operatorname{tg}\rho_0 \Rightarrow \alpha \le \rho_0$

b) $F_{max} = ?$ → pont nem indul meg felfelé ⇒ S lefelé mutat a lejtőn (akadályoz)

megjegyz.: F_{max} esetén $\underline{K}$ a másik palásttal párhuzamos



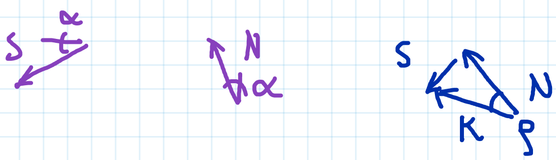
SZTÁ



$$\Sigma F_x = 0: \quad F_{max} - S\cos\alpha - N\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad -G + N\cos\alpha - S\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

pont nem csúszik meg: $\mu_0 = S/N \qquad (3)$



(3) $\mu_0 N = S$

(2) $N = \dfrac{1}{\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha}\, mg$

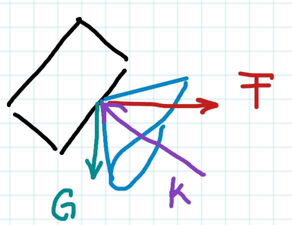
(1) $$F_{max} = \frac{\mu_0\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha} \cdot mg$$

$\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha > 0$ esetén érvényes

ha $\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha \le 0$ $\quad F_{max} \to \infty \Rightarrow$ önzárás

↳ $\cos\alpha \le \mu_0\sin\alpha \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha \le \mu_0$

azaz nincs olyan nagy erő, amivel elkezdene felfelé csúszni a hasáb!



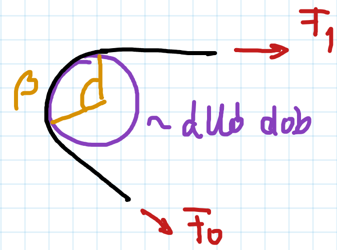
F erő a kúpon belül van

$$\underline{F} + \underline{G} + \underline{K} = 0 \Rightarrow \underline{K} = -\underline{F} - \underline{G} = -\underbrace{(\underline{F} + \underline{G})}$$

nem érintheti a felső palástot semmi esetben megjegyzés Adzihoz: kötélsúrlódás

β: átfogási szög radiánban

(β lehet nagyobb, mint 2π (360°), ha a kötél többször át van vetve)



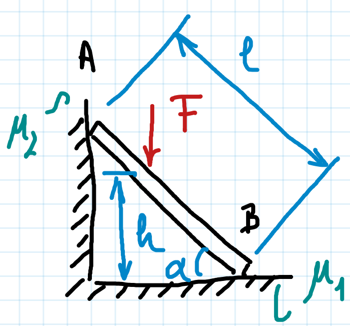
nyugalom: $F_0 e^{-\mu_0\beta} \le F_1 \le F_0 e^{\mu_0\beta}$

megcsúszás határa

F_0 irányba: $F_1 = F_0 e^{-\mu_0\beta}$

F_1 irányba: $F_1 = F_0 e^{\mu_0\beta}$

Példa 2



$F = 700\,N$

$l = 2\,m$

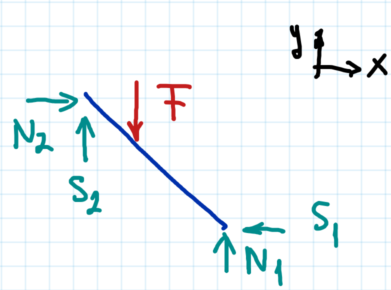
$\alpha = 60°$

$\mu_1 = 0{,}4$

$\mu_2 = 0{,}25$

Milyen magasra mászhat az ember, hogy a létra épp ne csússzon meg?

SZTA'



szélsőhelyzetben $\mu_2 = \frac{N_2}{S_2}$ (1)

$\mu_1 = \frac{N_1}{S_1}$ (2)

(1) $S_2 = N_2\mu_2$ (2) $S_1 = N_1\mu_1$

(3) $N_2 = N_1\mu_1$

(4) $N_1(\mu_1\mu_2 + 1) = F$

EE

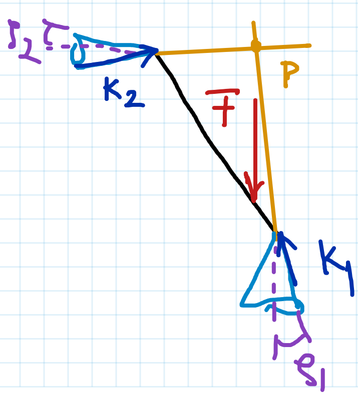
$\Sigma F_x = 0$: $N_2 - S_1 = 0$ (3)

$\Sigma F_y = 0$ $S_2 + N_1 - F = 0$ (4)

$\Sigma M_B = 0$: $F \cdot h/\mathrm{tg}\alpha - S_2 l \cos\alpha - N_2 l \sin\alpha = 0$ (5)

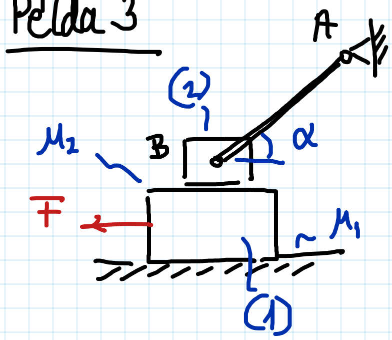
(5) $\frac{N_1(\mu_1\mu_2+1)h}{\mathrm{tg}\alpha} = l N_1(\mu_1\mu_2\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha) \Rightarrow h = \frac{l\mu_1(\mu_2\cos\alpha + \sin\alpha)\,\mathrm{tg}\alpha}{\mu_1\mu_2 + 1} = 1{,}25\,m$

ábrázolva



Növelve bármelyik félkúpszöget a metszéspont balra vándorolna

Példa 3



$\alpha = 45°$

$G_1 = 15\,kN$

$G_2 = 30\,kN$

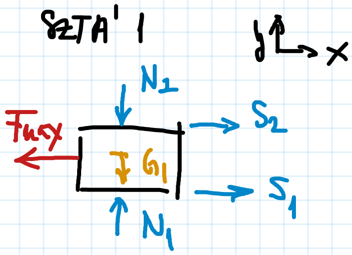
$\mu_1 = 0{,}3$

$\mu_2 = 0{,}2$

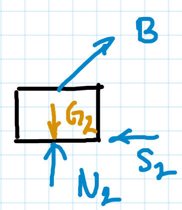
Max mekkora F erővel lehet húzni az alsó dobozt, hogy a rendszer egyensúlyban maradjon?

2 test $\longrightarrow$ 2 SZTA : mindkettő doboz pontszerű testként kezelhető (nincs kiterjedése)

SZTA 1



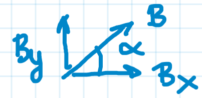
SZTA 2



BA rúd statikai rúd

↳ csak a csuklókban terhelt

⇒ B vektor rúdirányú



megcsúszás határa: $\mu_1 = \dfrac{N_1}{S_1}$ (1) $\qquad \mu_2 = \dfrac{N_2}{S_2}$ (2)

EE 1

$\Sigma F_x = 0: \; -F_{max} + S_2 + S_1 = 0$ (3)

$\Sigma F_y = 0: \; N_1 - N_2 - G_1 = 0$ (4)

EE 2

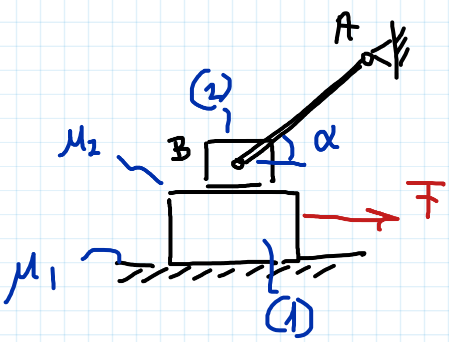
$\Sigma F_x = 0: \; B_x - S_2 = 0$ (5)

$\Sigma F_y = 0: \; B_y - G_2 + N_2 = 0$ (6)

$B_x = B\cos\alpha$ (7) $\qquad B_y = B\sin\alpha$ (8)

$$F_{max} = \mu_1 G_1 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{1 + \mu_2 \,\mathrm{tg}\alpha} G_2 = 17\,kN$$

Példa 4 ⌂



Ebben az esetben mekkora a max F?

Az adatok megegyeznek az előző feladatéval

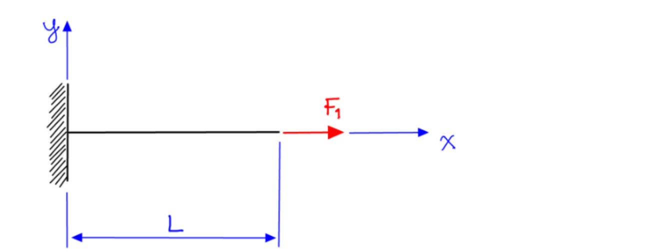
Most gyakorló példa

$$F_{max} = \mu_1 G_1 + \frac{\mu_1 \mu_2}{1 - \mu_2 \,\mathrm{tg}\alpha} G_2 = 23{,}25\,kN$$

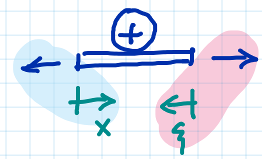
9. Gyakorlat

Példa 8.1

8.1. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!
Megoldás: $N(x) = F_1$, $V(x) = 0$, $M_h(x) = 0$, $M_t(x) = 0$.

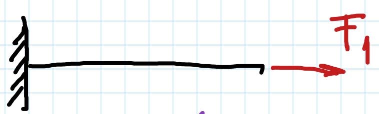


KM felületére normális irányú erő
↳ normál igénybevétel

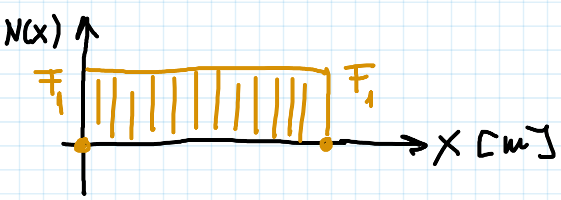
N:  : előjelkonvenció

x irányból felírva: ← nyilacskák okoznak + irányba ugrást az erő támadáspontjában

ξ irányból felírva: → nyilacskák okoznak + irányba ugrást az erő támadáspontjában



ξ ↤ → pozitív



0-ból indul 0-ba érkezik
⇒ befogásnál a reakció ← F_1 kell legyen!

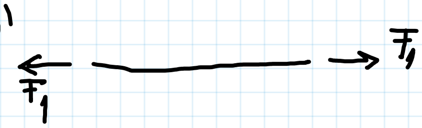
$N(x) = F_1$

$V(x) = 0$

$M_h(x) = 0$

$M_t(x) = 0$

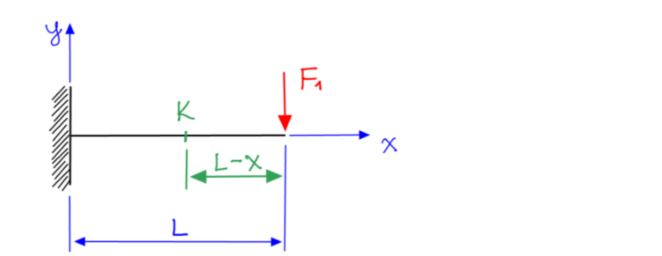
SZTA



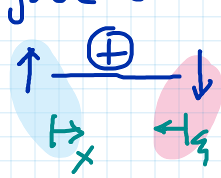
$A_y = 0$ N
$M_A = 0$ N
$A_x = -F_1$

Példa 8.2

8.2. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!
Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = F_1$, $M_h(x) = F_1(L - x)$, $M_t(x) = 0$.

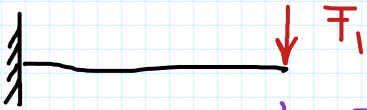


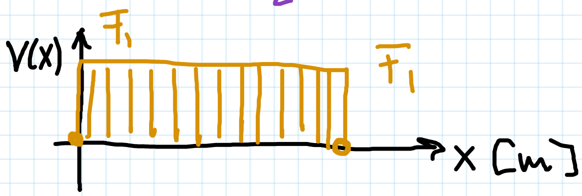
KM síkjába eső erő: nyíróigénybevétel

V:  : előjelkonvenció

x irányból felírva. ↑ nyilacska + ugrást eredményez az erő támadáspontjában

ξ irányból felírva: ↓ nyilacska + ugrást okoz az erő támadáspontjában





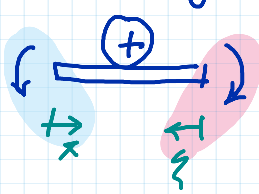
0-ból indul 0-ba érkezik
⇒ befogásnál a reakcióerő ↑ F_1

$A_y = F_1$

$N(x) = 0$ $M_t(x) = 0$

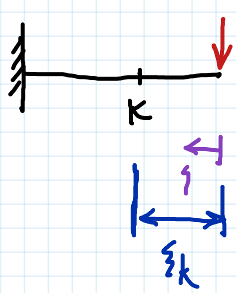
KM síkjába eső nyomaték : hajlítóigénybevétel

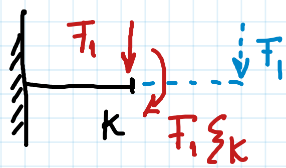
M_h :



: előjelkonvenció

x irány felől redukál ↺ nyomatékok pozitívak
ξ irány felől redukál : ↻ nyomatékok pozitívak





---- itt található erőrendszert redukáljuk K pontba

erőrendszer redukáltja : ↓ F_1 ↻ $F_1 \xi_K$

nyíró igénybevétel hajlítóigénybevétel

Tehát ξ függvényében bárhova redukálunk, a redukált erőrendszer

↓ F_1 erőből és ↻ $F_1 \cdot \xi$ nyomatékból áll

↓ $V(\xi)$ ↻ $M_h(\xi)$

⇒ $V(\xi) = F_1$ $M_h(\xi) = F_1 \xi$

Mivel $\xi = L - x$, ezért $V(x) = F_1$ $M_h(x) = F_1 L - F_1 x$

megjegyz. $V(x) = -M_h'(x)$

0-ból indul, 0-ba érkezik
⇒ befogásnál ↺ $F_1 \cdot L$ reakciónyomaték ébred !

megjegyz. $M_h(x)$ függvény meredeksége $-V(x)$ függvény

$M_h(x)$ értéke 0 és L között $-\int_0^L V(x)\,dx$ nagyságot változik

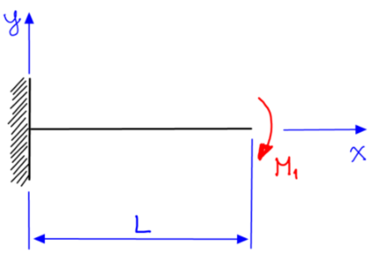
↳ előjelhelyes terület

$-F_1 \cdot L$

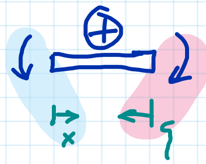
Példa 8.3

8.3. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!

Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = 0$, $M_h(x) = M_1$, $M_t(x) = 0$.



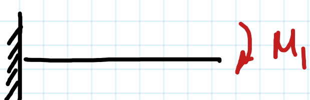
M_h



. előjelkonvenció

x felől: ↶ nyíl pozitív irányban okoz ugrást a támadáspont helyén

ξ felől: ↷ nyíl pozitív ugrást okoz a támadáspont helyén



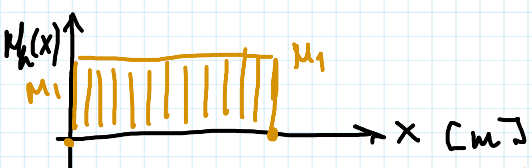
ξ pozitív

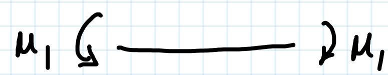
$M_h(x) = M_1$

$M_t(x) = 0$

$N(x) = 0$

$V(x) = 0$



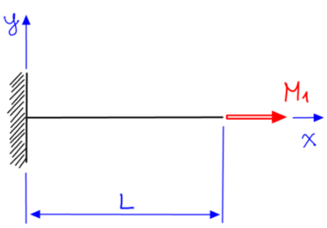


0-ból indul 0-ba ér A befogásnál ↶ M_1 reakciónyomaték ébred

Példa 8.4

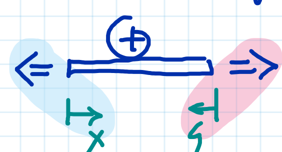
8.4. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!

Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = 0$, $M_h(x) = 0$, $M_t(x) = M_1$.



KM-re normális irányú nyomaték: csavaró igénybevétel

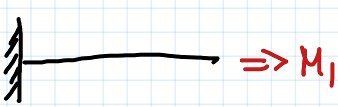
M_t:

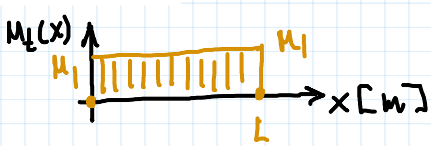


. előjelkonvenció

x irányból ⇐ nyíl + irányú ugrás a támadáspontnál

ξ irányból: ⇒ nyíl + irányú ugrás a támadáspontnál





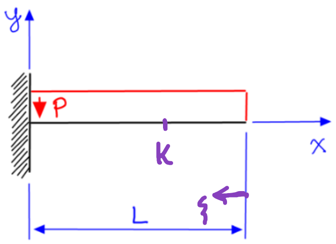
0-ból indul 0-ba ér

↳ A befogásnál ⇐ M_1 reakciónyomaték

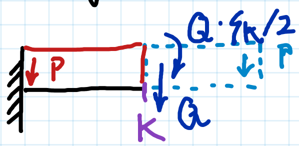
$M_t(x) = M_1$ $N(x) = 0$ $V(x) = 0$ $M_h(x) = 0$

Példa 8.5

8.5. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!
Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = p(L-x)$, $M_h(x) = p(L-x)^2/2$, $M_t(x) = 0$.



Redukáljuk az erőrendszert jobbról K pontba!



Redukált erőrendszer $\downarrow Q = p\,\xi_K$ $\quad Q\cdot \xi_K/2$

Tehát ξ függvényében: $\downarrow p\xi$ $\quad p\xi^2/2$

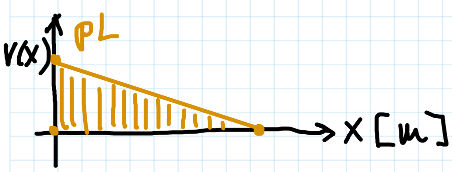
nyíróigénybevétel $V(\xi)$ ⊕ $\quad$ hajlítóigénybevétel $M_h(\xi)$ ⊕

$V(\xi) = p\xi$

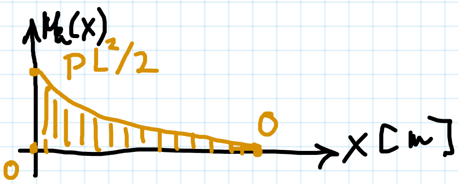
$M_h(\xi) = p\,\xi^2$

mivel $\xi = L - x$: $\quad V(x) = pL - px \qquad M_h(x) = p\,(L-x)^2\cdot\frac{1}{2}$

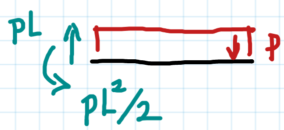
$M_h'(x) = -p(L-x) = -V(x)$



0-ból indul 0-ba ér: befogásnál reakcióerő $\uparrow pL$



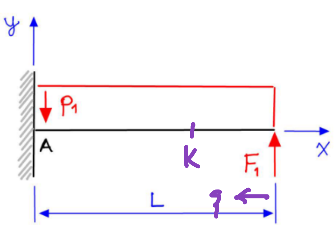
0-ból indul, 0-ba ér: Befogásnál $pL^2/2$ reakciónyomaték

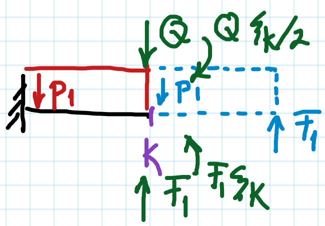


$N(x) = 0 \qquad M_t(x) = 0$

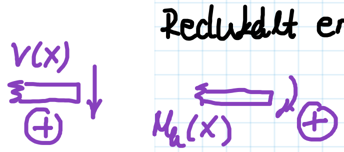
Példa 8.8

8.8. Példa. Írjuk fel az igénybevételi függvényeket és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat (parabolaívek esetén az érintővel együtt)! Adatok: $L = 4$ m, $p_1 = 3$ kN/m, $F_1 = 3$ kN.
Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = 9 - 3x$, $M_h(x) = 12 - 9x + 1,5x^2$, $M_t(x) = 0$.





redukáljunk jobb oldalról!



Redukált erőrendszer: $\downarrow Q = p_1\xi_K$ $\quad \uparrow F_1$ $\quad$ nyíróigénybevétel

$Q\,\xi_K/2$ $\quad F_1\xi_K$ $\quad$ hajlítóigénybevétel

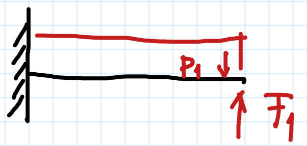
Azaz ξ függvényében $\quad V(\xi) = p_1\xi - F_1 \qquad M_h(\xi) = p_1\,\xi^2/2 - F_1\,\xi$

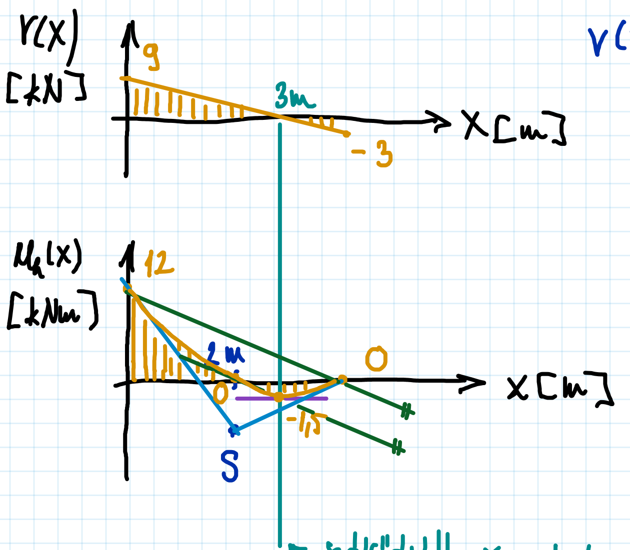
Mivel $\xi = L - x$: $\quad V(x) = p_1L - F_1 - p_1x = 9 - 3x$

$M_h(x) = p_1\,(L-x)^2/2 - F_1L + F_1x = 1{,}5x^2 - 9x + 12$

$M_h'(x) = 3x - 9 = -V(x)$ ✓

$N(x) = 0$ $\quad$ $M_t(x) = 0$





$V(x)$ függvény $p_1(x)$ meredekségű.

0 és L közt $\int_0^L p_1(x)\,dx$ nagyságot változik

↳ előjelhelyes terület: $-p_1 \cdot L = -12$ kN

$M_h(0m) = 12$ kNm $\quad$ $M_h(4m) = 0$ kNm

$M_h(2m) = 0$ kNm

← szélsőérték x_{sz} helyen lesz, ahol $M_h'(x_{sz}) = 0$

$-V(x_{sz}) = 0$ $\quad$ $3x_{sz} - 9 = 0 \Rightarrow x_{sz} = 3m$

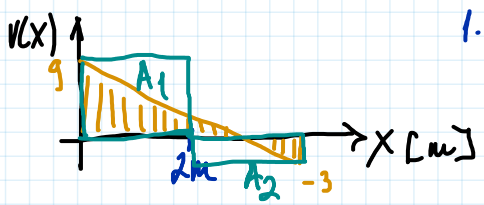
$M_h(x_{sz}) = M_h(3m) = 12 - 9 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 3^2 = -1{,}5$ kNm

itt az érintő vízszintes

$M_h(0)$ és $M_h(4m)$ helyekre érintő szerkesztése segédpontokkal

$A_1 = 9 \cdot 2 = 18$ kNm

$A_2 = -3 \cdot 2 = -6$ kNm



1. lépés lin intervallum 2 egyenlő részre bont

2. lépés: 2 terület felmér, területek magassága $V(0)$ és $V(4m)$

3. lépés S segédpont kiszámítása

$S = M_h(0) - A_1 = 12 - 18 = -6$ kNm

↳ S felvesz $(2m, -6\,kNm)$ pontba

4. lépés. $M_h(0) - S$ és $S - M_h(4m)$ összekötése

$\Rightarrow$ meredekségek 0m és 4m pontokba

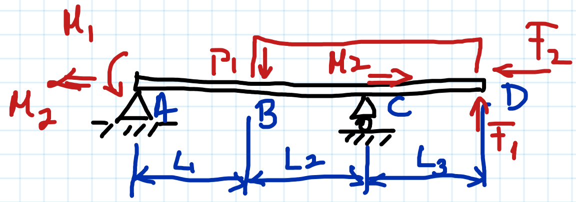
megjegyz. $M_h(4m) \overset{?}{=} S - A_2$ $\qquad$ $S - A_2 = -6 - 6 = 0$ kNm $= M_h(4m)$ ✓

azaz $M_h(4m)$ az S segédpont és A_2 terület segítségével is megkapható

$M_h(2m)$-nél (2m a fele a lin szakasznak) a meredekség az $M_h(0) - M_h(4m)$ húr

utolsó lépés parabola megrajzolása pontokban lévő érintők segítségével

Példa 1



$L_1 = 2m$ $F_1 = 8\,kN$

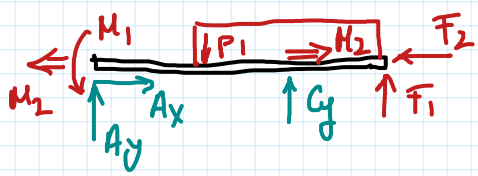
$L_2 = 3m$ $F_2 = 7\,kN$

$L_3 = 4m$ $M_1 = 4\,kNm$

$p_1 = 5\,kN/m$ $M_2 = 6\,kNm$

1. reakciók kiszámítása

SZTÁ



EE

$\Sigma F_x = 0: A_x - F_2 = 0$

$\Sigma F_y = 0: A_y - p_1(L_2+L_3) + C_y + F_1 = 0$

$$\Sigma M_a = 0: M_1 - p_1(L_2+L_3)\left[\frac{L_2+L_3}{2} + L_1\right] + C_y(L_1+L_2) + F_1(L_1+L_2+L_3) = 0$$

$A_x = F_2 = 7\,kN$ $C_y = 23{,}3\,kN$ $A_y = 3{,}7\,kN$

2. igénybevételek

$N(x) = -A_x$ $0 < x < L_1 + L_2 + L_3$

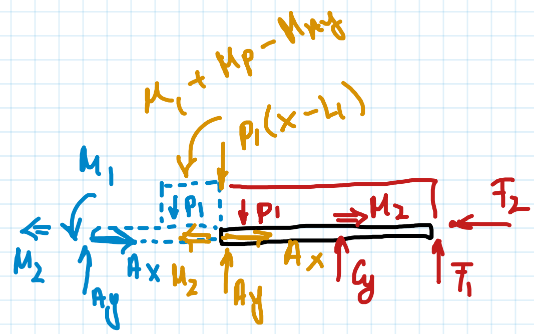
$M_{t_1}(x) = M_2$ $0 < x < L_1 + L_2$

$M_{t2}(x) = 0$ $L_1 + L_2 < x < L_1 + L_2 + L_3$

$V_1(x) = A_y$ $0 < x < L_1$

$V_2(x) = A_y - p_1(x - L_1)$ $L_1 < x < L_1 + L_2$

$V_3(x) = A_y - p_1(x-L_1) + C_y$ $L_1 + L_2 < x < L_1 + L_2 + L_3$



$M_{h_1}(x) = M_1 - A_y x$ $0 < x < L_1$

$M_{h_2}(x) = M_1 - A_y x + p_1(x-L_1)\cdot\frac{x-L_1}{2}$ $L_1 < x < L_1 + L_2$

$M_{h_3}(x) = M_1 - A_y x + \frac{p_1}{2}(x-L_1)^2 - C_y(x - L_1 - L_2)$ $L_1 + L_2 < x < L_1 + L_2 + L_3$

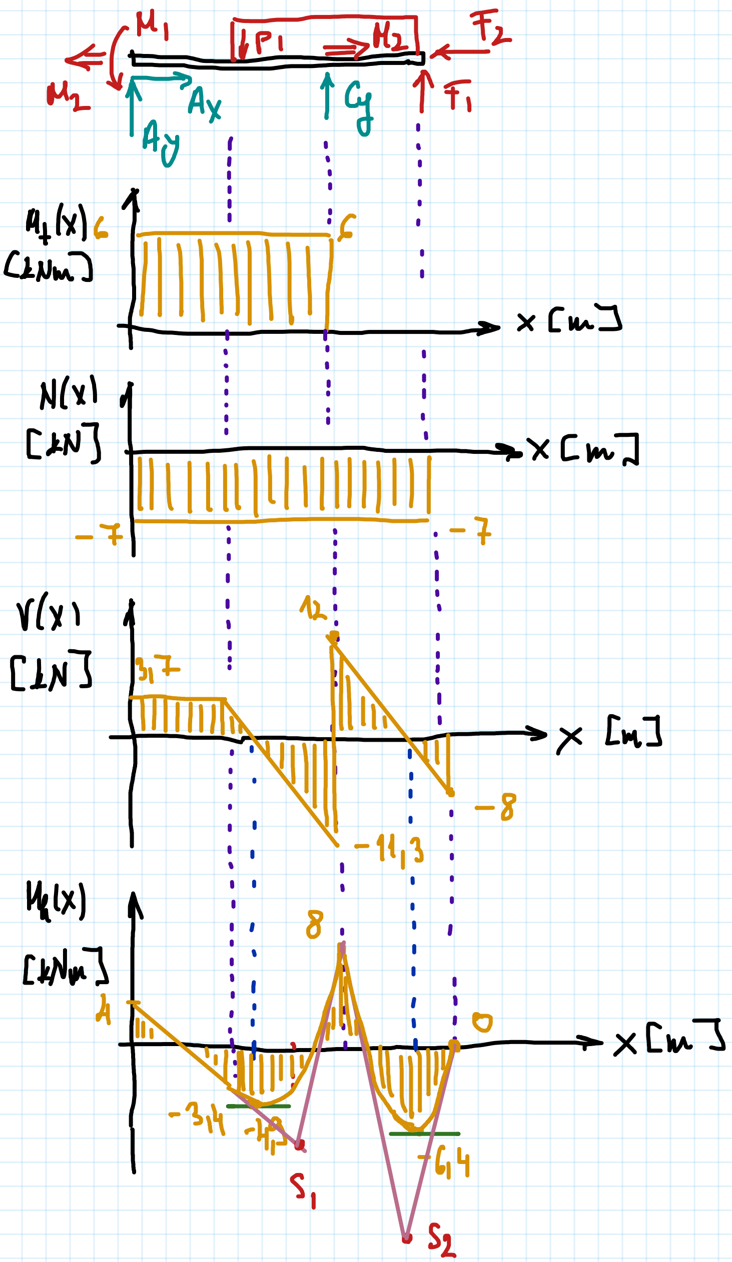
Tehát az igénybevételi függvényeket 3 szakaszra kell osztani

$M'_{h_1}(x) = -A_y = -V_1(x)$ ✓

$M'_{h_2}(x) = -A_y + p_1(x - L_1) = -V_2(x)$ ✓ ellenőrzés

$M'_{h_3}(x) = -A_y + p_1(x-L_1) - C_y = -V_3(x)$ ✓

Igénybevételi ábrák



Figyelni kell a tengelyek arányaira a függvények ábrázolásával!

$V_1(0) = 3,7\ kN = V_2(L_1)$

$V_2(L_1+L_2) = -11,3\ kN$

$V_3(L_1+L_2) = 12\ kN$

$V_3(L_1+L_2+L_3) = -8\ kN$

$M_{h_1}(0) = 4\ kNm$ $\quad M_{h_1}(L_1) = -3,4\ kNm$

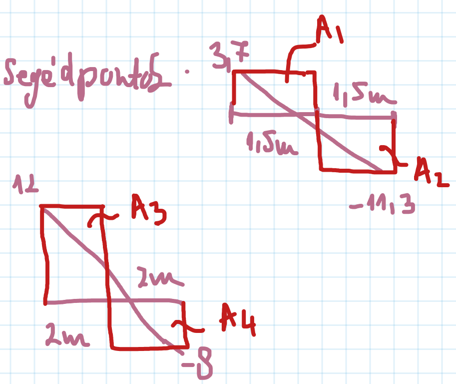
$V_2(x_{t2,1}) = 0 \Rightarrow x_{t2,1} = 2,74\ m$

$V_3(x_{t2,2}) = 0 \Rightarrow x_{t2,2} = 7,4\ m$

$M_h(x_{t2,1}) = -4,88\ kNm$

$M_h(x_{t2,2}) = -6,4\ kNm$

Segédpontok:



$S_1 = M_{h_2}(L_1) - A_1 = M_{h_2}(L_1) - 3,7 \cdot 1,5 = -8,95\ kNm$

$x_{S_1} = 3,5\ m$

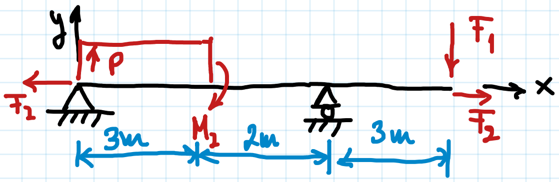
$M_{h_2}(L_1+L_2) = 8\ kNm = M_{h_3}(L_1+L_2)$

$S_2 = M_{h_3}(L_1+L_2) - A_3 = M_{h_3}(L_1+L_2) - 12 \cdot 2 = -16\ kNm$

$x_{S_2} = 7\ m$

$M_{h_3}(L_1+L_2+L_3) = 0\ kNm$

10. gyakorlat

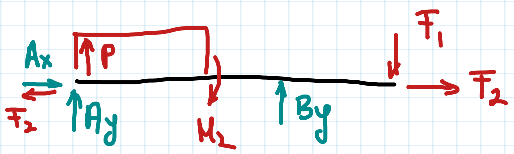


Adatok:

$F_1 = 40\,kN$ $F_2 = 30\,kN$ $p = 20\,kN/m$ $M = 20\,kNm$

Igénybevételi ábrák?

1.) SZTA'



EE

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + F_2 - F_2 = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + p\ 3m + B_y - F_1 = 0$

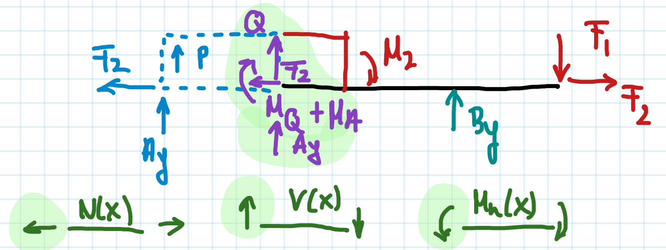
$\Sigma M_a = 0: \quad p \cdot 3m \cdot 1{,}5m - M_2 + B_y\ 5m - F_1 \cdot 8m = 0$

$A_x = 0\,kN$ $B_y = 50\,kN$ $A_y = -70\,kN$

A_x-et elhagyom, mivel zérus

Igénybevételi függvények 3 folytonos szakaszra oszthatók

I. $0m < x < 3m$



jobbról redukálva az előjelkonvenciók

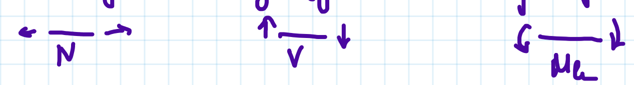
Redukált vektorkettős elemei jobbról:

$\leftarrow F_2$ $\uparrow Q = px$ $M_Q = px\,\frac{x}{2}$

$\uparrow A_y$ $M_A = A_y\ x$

elhagyott terület

normáligbevétel nyíróigbevétel hajlítóigbevétel



$N_1(x) = F_2 = 30\,kN$

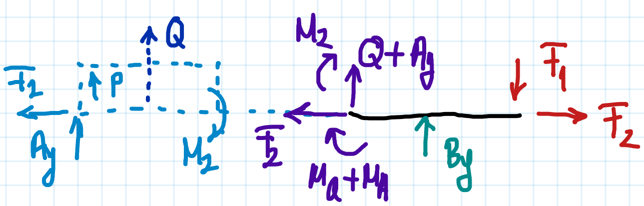
$V_1(x) = px + A_y = -70 + 20x$

$M_{h_1}(x) = -\frac{1}{2}px^2 - A_y \cdot x = 70x - 10x^2$

} $0m < x < 3m$

ellenőrzés $M_{h_1}'(x) = -px - A_y = -V_1(x)$ ✓

második szakasz II: $3m < x < 5m$



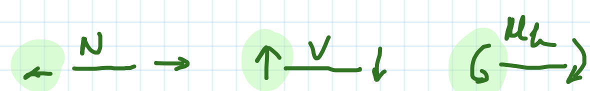
Redukált vektorkettős elemei:

$\leftarrow F_2$ $\uparrow Q = p \cdot 3m$ M_2

$\uparrow A_y$ $M_Q = p \cdot 3m \cdot (x - 1{,}5m)$

$M_A = A_y \cdot x$

normáligbv. N(x) nyíróigbv. V(x) hajlítóigbv. $M_h(x)$



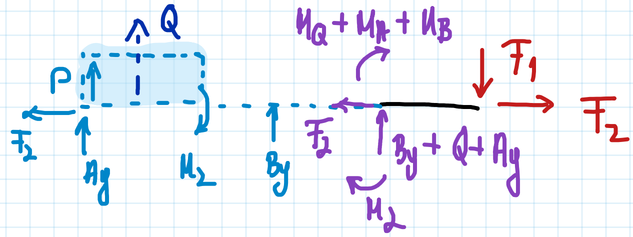
$N_2(x) = F_2 = 30\,kN$ $3m < x < 5m$

$V_2(x) = p \cdot 3m + A_y = -10\,kN$ $3m < x < 5m$

$M_{h_2}(x) = -M_2 - p\cdot 3m(x - 1{,}5m) - A_y\cdot x = 70 + 10x$ $\qquad 3m < x < 5m$

$M_{h_2}'(x) = 10\,kNm = -V_2(x)$ ell ✓

Harmadik szakasz : III : $5m < x < 8m$



Redukált vektorkettős elemei jobbról

$\leftarrow F_2$ $\quad \uparrow Q = p\cdot 3m \quad \circlearrowleft M_2$

$\uparrow A_y \quad \curvearrowright M_Q$

$\uparrow B_y \quad \curvearrowright M_A$

$\curvearrowright M_B$

$N(x)$: $\leftarrow \;—\; \rightarrow$

$V(x)$: $\uparrow —— \downarrow$

$M_h(x)$: $\circlearrowleft —— \circlearrowright$

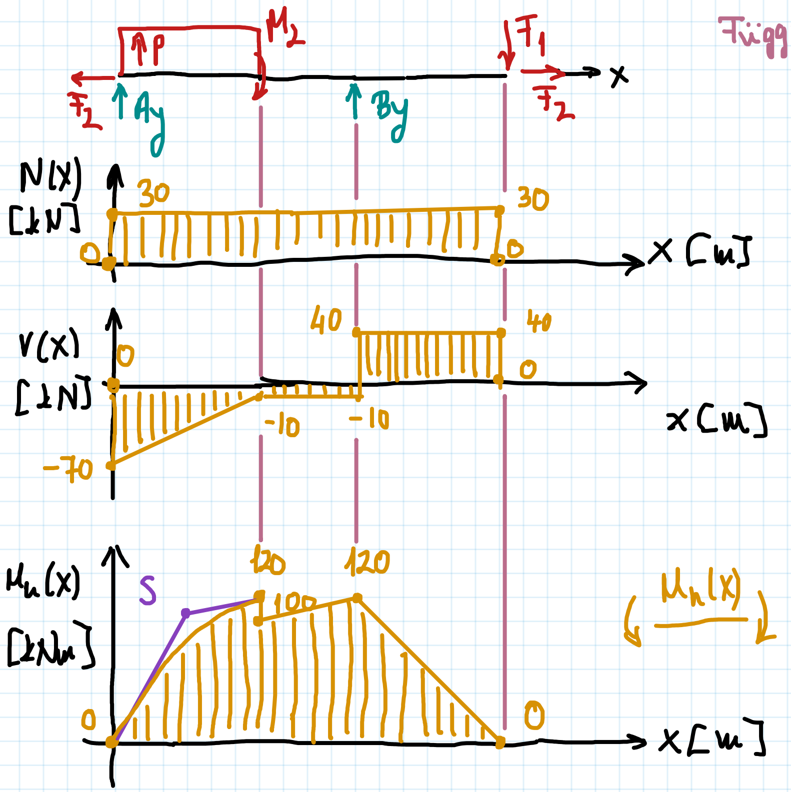
$N_3(x) = F_2 = 30\,kN$ $\qquad 5m < x < 8m$

$V_3(x) = p\cdot 3m + A_y + B_y = 40\,kN$ $\qquad 5m < x < 8m$

$M_{h_3}(x) = -M_2 - p\,3m(x - 1{,}5m) - A_y\cdot x - B_y(x - 5m) =$
$= 320 - 40x$ $\qquad 5m < x < 8m$

ell.: $M_{h_3}'(x) = -40 = -V_3(x)$ ✓

Igénybevételi ábrák $\qquad$ szerkezetről méretarányos rajz ! $\quad$ 0,5m



Függvények 0-ból indulnak, 0-ba érkeznek

$N(x)$: $\leftarrow — \rightarrow$

$\Delta V = \int_0^{3m} p(x)\,dx$ terület $\Rightarrow \Delta V = p\cdot 3m$

$V(x)$: $\uparrow — \downarrow$

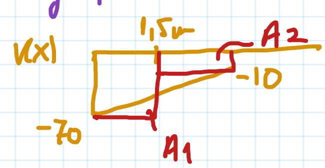
$V_1(0) = -70\,kN$

$V_1(3m) = V_1(0) + \Delta V = -70 + 60 = -10\,kN$

$M_{h_1}(0) = 0\,kNm$

$M_h(x)$: $\circlearrowleft — \circlearrowright$

Segédpont meredekséghez :



$S = M_{h_1}(0) - A_1$

$A_1 = 1{,}5m\cdot(-70) = -105\,kNm$

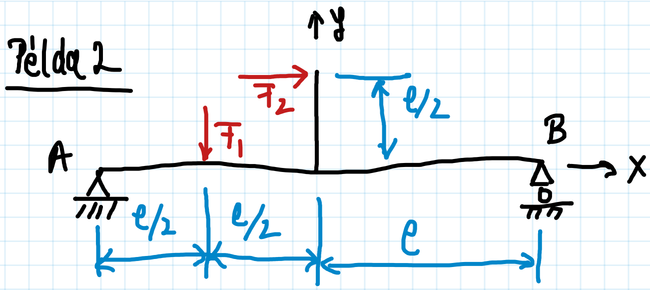
$S = 105\,kNm$ $\qquad M_{h_1}(3m) = S - A_2 = 105 - 1{,}5m(-10) = 120\,kNm = M_{h_1}(3m)$

$M_{h_2}(3m) = 100\,kNm$ $\qquad M_{h_2}(5m) = 120\,kNm = M_{h_2}(3m) - \underbrace{\int_{3m}^{5m} V_2(x)\,dx}_{\text{terület 3m és 5m közt}} = 100\,kNm - (-10\cdot 2m)$

$M_{h_3}(5m) = 120\,kNm$

$M_{h_3}(8m) = 0\,kNm = M_{h_3}(5m) - \int_{5m}^{8m} V_3(x)\,dx = 120 - 40\cdot 3m$

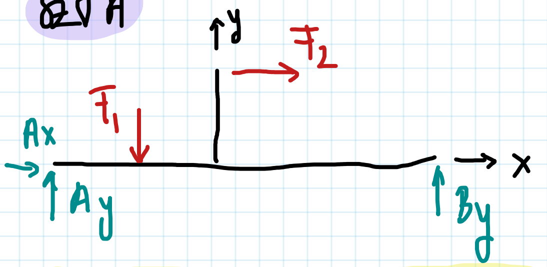
Példa 2



$l = 1\,m \qquad F_1 = 120\,N \qquad F_2 = 200\,N$

Igénybevételi ábrák?

SZTA'



EE

$\Sigma F_x = 0: \; A_x + F_2 = 0 \implies A_x = -F_2 = -200\,N$

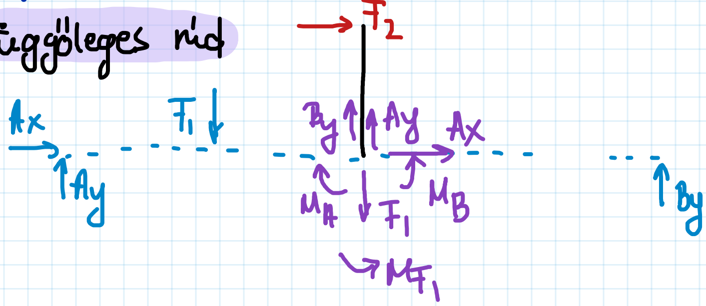
$\Sigma F_y = 0: \; A_y - F_1 + B_y = 0$

$\Sigma M_a = 0: \; -F_1 \cdot l/2 + F_2 \cdot l/2 - B_y \cdot 2l = 0$

$B_y = 80\,N \qquad A_y = 40\,N$

Igénybevételek felírhatók egyenként a rudakra. vízszintes + függőleges

Függőleges rúd



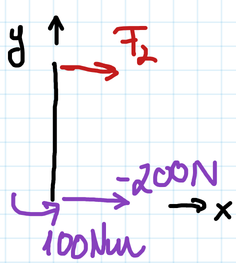
Ilyenkor a vízszintes rudat elhagyjuk, a rajta lévő erőrendszert redukáljuk oda, ahol a 2 rúd csatlakozott!

Redukált erőrendszer: x irányú erők: $A_x = -200\,N$

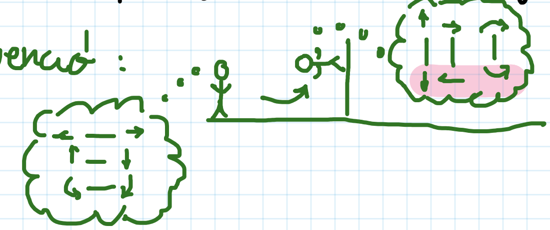
y irányú erők: $B_y + A_y - F_1 = 0\,N$

nyomatékok: $M_{F_1} + M_B - M_A = F_1 \, l/2 - A_y \cdot l + B_y \, l = 100\,Nm$

Tehát:



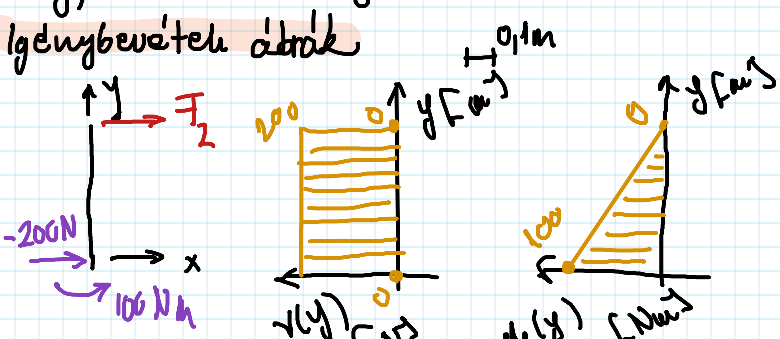
Előjelkonvenció:



lentről felfele redukálva

$N(y) = 0 \qquad V(y) = -(-200\,N) = 200\,N \qquad M_h(y) = 100\,Nm + (-200) \cdot y = 100 - 200y$

Igénybevételi ábrák

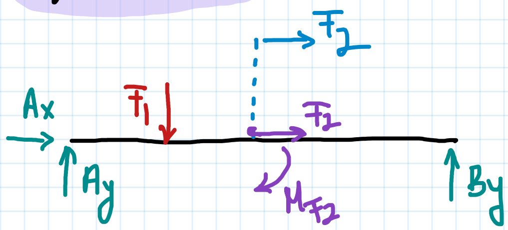


ell.: $M_h'(y) = -200 = -V(y)$ ✓

$M_h(0) = 100\,Nm$

$M_h(l/2) = 0\,Nm = M_h(0) - \underbrace{\int_0^{l/2} V(y)\,dy}_{\text{terület } = 200 \cdot 0{,}5}$

Vízszintes rúd



függőleges rudat elhagyjuk, rajta lévő erőrendszert a rudak csatlakozási pontjába redukáljuk

$M_{F_2} = F_2 \cdot \ell/2$

Igénybevételek 3 folytonos szakaszra bonthatók

I.: $0 < x < \ell/2$

$N_1(x) = -A_x = 200\,N$

$V_1(x) = A_y = 40\,N$

$M_{h_1}(x) = -A_y \cdot x = -40x$

II.: $\ell/2 < x < \ell$

$N_2(x) = -A_x = 200\,N$

$V_2(x) = A_y - F_1 = -80\,N$

$M_{h_2}(x) = -A_y x + F_1(x - \ell/2) = 80x - 60$

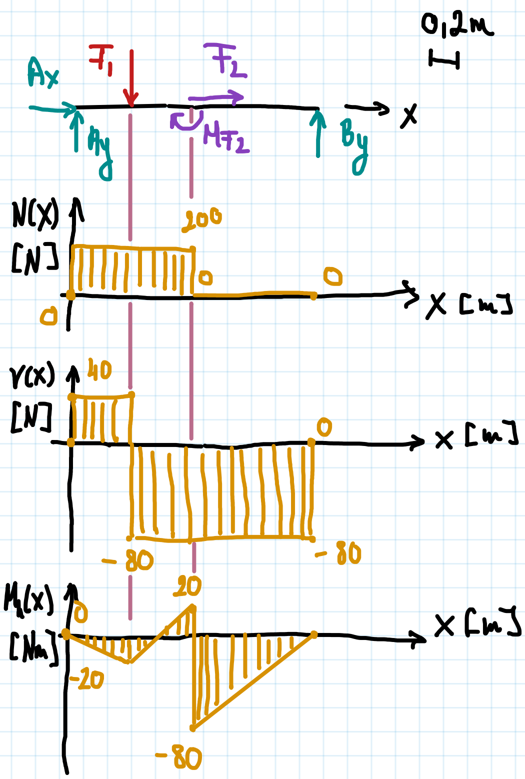
III.: $\ell < x < 2\ell$

$N_3(x) = -A_x - F_2 = 0\,N$

$V_3(x) = A_y - F_1 = -80\,N$

$M_{h_3}(x) = -A_y x - F_1(x - \ell/2) - F_2 \ell/2 = 80x - 160$

Igénybevételi ábrák

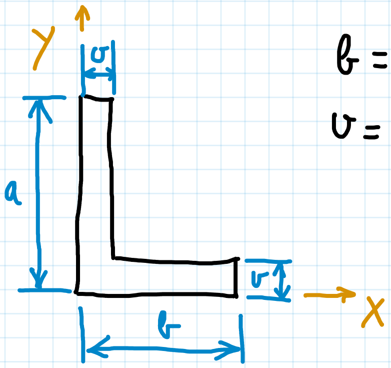


$M_{h_1}(0) = 0\,Nm$ $\quad$ $M_{h_1}(\ell/2) = -20\,Nm$ $\quad$ $M_{h_2}(\ell/2) = -20\,Nm$

$M_{h_2}(\ell) = 20\,Nm$ $\quad$ $M_{h_3}(\ell) = -80\,Nm$ $\quad$ $M_{h_3}(2\ell) = 0\,Nm$

13. gyakorlat

Példa 1



$a = 45\ mm$

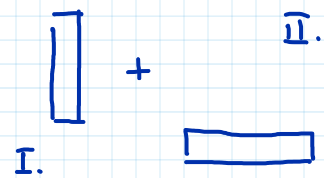
$b = 23\ mm$

$v = 4\ mm$

$I_1,\ I_2 = ?$ főmásodrendű nyomatékok

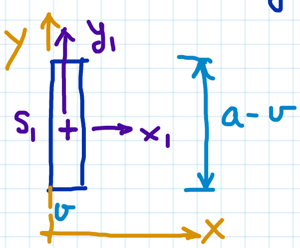
$\underline{e}_1,\ \underline{e}_2 = ?$ másodrendű főirányok

KM felbontása alapsíkidomokra.



Elemek másodrendű nyomatéka a saját súlypontjukra:

I

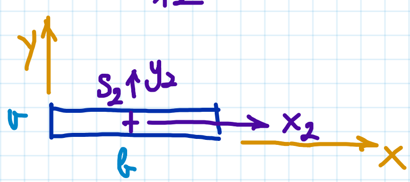


$$\underline{r}_{S_1} = \begin{bmatrix} v/2 \\ v + \frac{a-v}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 24,5 \end{bmatrix} mm$$

$$A_1 = (a-v) \cdot v = 164\ mm^2$$

$$I_{x_1} = \frac{(a-v)^3 \cdot v}{12} = 22973,67\ mm^4 \qquad I_{y_1} = \frac{v^3(a-v)}{12} = 218,67\ mm^4 \qquad I_{x_1y_1} = 0\ mm^4$$

II.



$$\underline{r}_{S_2} = \begin{bmatrix} b/2 \\ v/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,5 \\ 2 \end{bmatrix} mm$$

$$A_2 = b \cdot v = 92\ mm^2$$

$$I_{x_2} = v^3 \cdot b = 122,67\ mm^4 \qquad I_{y_2} = b^3 v = 4055,67\ mm^4 \qquad I_{x_2y_2} = 0\ mm^4$$

KM súlypontjának számítása

$$\underline{r}_S = \frac{A_1 \underline{r}_{S_1} + A_2 \underline{r}_{S_2}}{A_1 + A_2}$$

$$x_S = \frac{A_1 x_{S_1} + A_2 x_{S_2}}{A_1 + A_2} = 5,414\ mm$$

$$y_S = \frac{A_1 y_{S_1} + A_2 y_{S_2}}{A_1 + A_2} = 16,414\ mm$$

Elemek másodrendű nyomatékának számítása a KM súlypontjára

$$I_x^{(1)} = I_{x_1} + (\underbrace{y_S - y_{S_1}}_{\text{x és } x_1 \text{ tengelyek távolsága}})^2 A_1 = 33696,55\ mm^4$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2} + (y_S - y_{S_2})^2 \cdot A_2 = 19236,9\ mm^4$$

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = 52933,45\ mm^4$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + (x_S - x_{S_1})^2 A_1 = 2130,15\ mm^4$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + (x_S - x_{S_2})^2 A_2 = 7463,29\ mm^4$$

$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 9593{,}44\ mm^4$

$I_{xy}^{(1)} = (y_S - y_{S_1})(x_S - x_{S_1})A_1 + I_{x_1y_1} = -4527{,}32\ mm^4$

$I_{xy}^{(2)} = (y_S - y_{S_2})(x_S - x_{S_2})A_2 + I_{x_2y_2} = -8070{,}57\ mm^4$

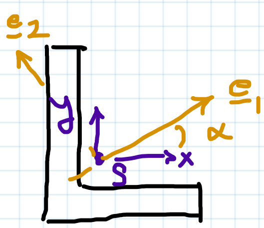
$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} = -12597{,}89\ mm^4$

Fő másodrendű nyomatékok és másodrendű főirányok

($\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$ sajátértékei és sajátvektorai)

$tg\,2\alpha = -\dfrac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = 0{,}581 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\,arctg(0{,}581) = 15{,}09^\circ$

$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9655 \\ 0{,}2603 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}2603 \\ 0{,}9655 \end{bmatrix}$



sp-i (x, y) koordináták α szöggel való elforgatásával megkapjuk a főirányok koordinátarendszerét ($\underline{e}_1$ és $\underline{e}_2$)

(itt a másodrendű nyomatéki mátrix $\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$)

$I_1 = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - I_{xy} \sin 2\alpha = 56\,329\ mm^4$

$I_2 = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + I_{xy} \sin 2\alpha = 6198\ mm^4$

Ha a km-nek van szimmetria tengelye, akkor az másodrendű főirány