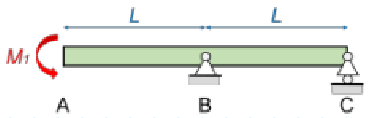
# Példa 2.1

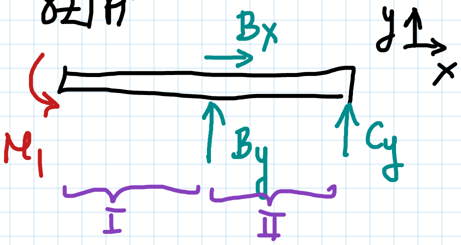
**2.1. Példa.** Az alábbi egyenes rúd terhelése az **A** keresztmetszetben működő $M_1 = 2$ Nm nyomaték. A tartó hajlítómerevsége 150 Nm$^2$, az **AB** és **BC** szakaszok hossza $L = 1$ m. Feladatok: a) Határozzuk meg az **BC** szakaszon a maximális lehajlás értékét és helyét; b) Számítsuk ki az **A**, **B** és **C** keresztmetszetekben a szögelfordulásokat és az **A** helyen a lehajlás értékét! c) Mekkora $d$ átmérőjű kör keresztmetszetű acélból ($E = 200$ GPa) készítsük a tartót ha azt szeretnék, hogy az **A** keresztmetszet lehajlása 10 mm legyen?

**Megoldás:** a) 0,855 mm lehajlás felfele a **C**-től 0,577 m-re b) Óramutató járásával megegyezően $\varphi_A = -1,019°$, $\varphi_B = -0,254°$, $\varphi_C = 0,127°$, $w_A = 11,111$ mm lefele c) $d = 11,415$ mm.




a)

SZTA'




EE

$\Sigma F_x = 0$ $\quad B_x = 0$

$\Sigma F_y = 0: \quad B_y + C_y = 0$

$\Sigma M_c = 0: \quad M_1 - B_y L = 0 \Rightarrow B_y = M_1/L = 2\,N$

$C_y = -2\,N$

$M_{h_I}(x) = M_1 \qquad 0 < x < L$

$M_{h_{II}}(x) = M_1 - B_y(x-L) \qquad L < x < 2L$

Rugalmas szál differenciálegyenlete: $w''(x) = -\dfrac{M_h(x)}{IE}$

↳ hajlítómerevség

Tehát $w_I''(x) = -\dfrac{M_{h_I}(x)}{IE} = -\dfrac{M_1}{IE} \qquad 0<x<L$

$$w_{II}''(x) = -\frac{M_{h_{II}}(x)}{IE} = -\frac{M_1 - B_y(x-L)}{IE} \qquad L<x<2L$$

$w'(x) = \int w''(x)\,dx$ és $w(x) = \int w'(x)\,dx$

szögelfordulás — lehajlás

$$w_I'(x) = -\int \frac{M_1}{IE}dx = -\frac{M_1}{IE}x + C_1$$

$$w_I(x) = \int\left(-\frac{M_1}{IE}x + C_1\right)dx = -\frac{M_1 x^2}{2IE} + C_1 x + C_2$$

$$w_{II}'(x) = -\int \frac{M_1 + B_y L - B_y x}{IE}dx = -\frac{1}{IE}\left((M_1 + B_y L)x - B_y\frac{x^2}{2}\right) + C_3$$

$$w_{II}(x) = \int\left(C_3 - \frac{1}{IE}\left((M_1+B_yL)x - B_y\frac{x^2}{2}\right)\right)dx = \frac{1}{IE}\left[\frac{B_y x^3}{6} - (M_1+B_yL)\frac{x^2}{2}\right] + C_3 x + C_4$$

4 integrálási konstans ⇒ 4 peremfeltétel kell

$w_I(L) = 0 \quad ; \quad w_{II}(L) = 0 \quad ; \quad w_{II}(2L) = 0 \quad \Leftarrow$ csuklók miatt folytonossági feltétel: $w_I'(L) = w_{II}'(L)$

Tehát $w_I(L) = -\frac{M_1}{2IE}L^2 + c_1 L + c_2 = 0$

$$w_{II}(L) = \frac{1}{IE}\left[\frac{B_y L^3}{6} - (M_1 + B_y L)\frac{L^2}{2}\right] + c_3 L + c_4 = 0$$

$$w_{II}(2L) = \frac{1}{IE}\left[\frac{B_y 8L^3}{6} - (M_1 + B_y L)\frac{4L^2}{2}\right] + c_3 2L + c_4 = 0$$

$$-\frac{M_1}{IE}L + c_1 = -\frac{1}{IE}\left[(M_1 + B_y L)L - B_y L^2/2\right] + c_3$$

$c_1 = 4/225$ ; $c_2 = -1/90$ , $c_3 = 11/450$ ; $c_4 = -1/75$

BC szakasz max lehajlása ott van, ahol $w_{II}'(x_z) = 0$

$$\frac{1}{IE}\left[B_y \frac{x_z^2}{2} - (M_1 + B_y L)x\right] + c_3 = 0 \Rightarrow x_z = 1{,}423 \text{ m}$$

$w_{II}(x_z) = 0{,}855$ mm

b) $w_A = w_I(0) = c_2 = -11{,}11$ mm $\qquad \varphi_A = w_I'(0) = c_1 = 0{,}0178$ rad $= 1{,}019°$

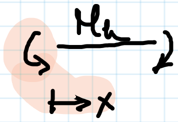
$w_B = w_I(L) = w_{II}(L) = 0$ mm (peremfeltétel)

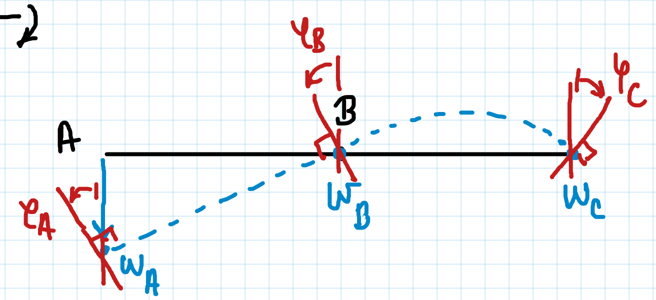
$w_C = w_{II}(2L) = 0$ mm (peremfeltétel)

$$\varphi_B = w_I'(L) = -\frac{M_1}{IE}L + c_1 = 0{,}0044 \text{ rad} = 0{,}255°$$

$$\varphi_C = w_{II}'(2L) = \frac{1}{IE}\left(B_y \frac{4L^2}{2} - (M_1 + B_y L)2L\right) + c_3 = -0{,}0022 \text{ rad} = -0{,}127°$$

Mit jelent ez az elfordulás?



c) $w_A = 10\,\text{mm} = c_2 = -\frac{5L^2 M_1}{6IE}$ → peremfeltételekből a) részben numerikus értékek behelyettesítése előtt

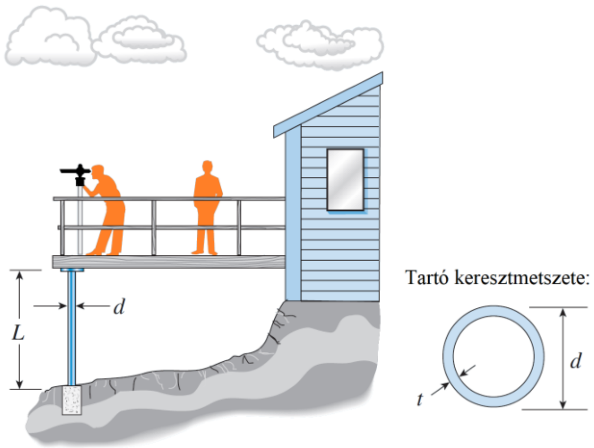
$$I = \frac{d^4\pi}{64}$$

$$c_2 = \frac{5L^2 M_1 64}{6 d^4 \pi E} \Rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{5 M_1 64 L^2}{6 \pi E c_2}} = 11{,}41\,\text{mm}$$

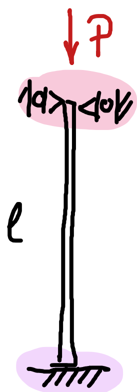
## Példa 3.1

**3.1. Példa.** Az ábrán látható kilátó $P = 100$ kN nyomó terhelését az $L = 3,5$ m hosszúságú $d = 100$ mm külső átmérőjű alumínium cső tartja, aminek rugalmassági modulusza 72 GPa. A cső alsó megtámasztása befogásnak tekinthető, míg a felső rögzítés a vízszintes irányú mozgást gátolja, de az elfordulást engedi. Mekkora legyen a cső $t$ falvastagsága ha azt szeretnénk, hogy a tartó háromszoros biztonsággal feleljen meg kihajlásra? A választott anyag kritikus törőfeszültsége az Euler-féle képlet alkalmazási tartományának alsó határán $\sigma_0 = 480$ MPa.

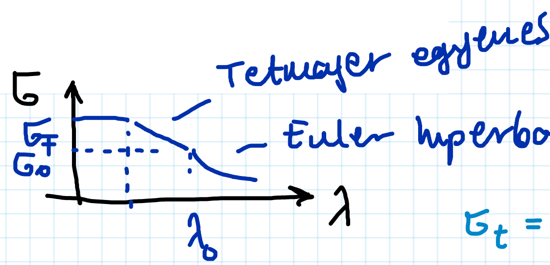
**Megoldás**: $t = 8,3$ mm.




modell :




$L_0 = 0{,}7\,\ell$




$F_t = nP = 300\,\text{kN}$

$\sigma_t = \frac{F_t}{A}$

Feltételezzük, hogy az Euler elmélet kell.

$$F_t = \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2 I_2 E$$

$I_2$: legkisebb másodrendű nyomatéka a KM-nek
↓
most mindegy, mert cső a KM

$$I_2 = \frac{\pi}{64}\left(d^4 - (d-2t)^4\right)$$

Behelyettesítve $t = 8{,}3\,\text{mm}$

a többi gyök nem lehetséges

Jó volt az Euler képlet?

$\lambda = L_0 / i_2$ karcsúsági tényező

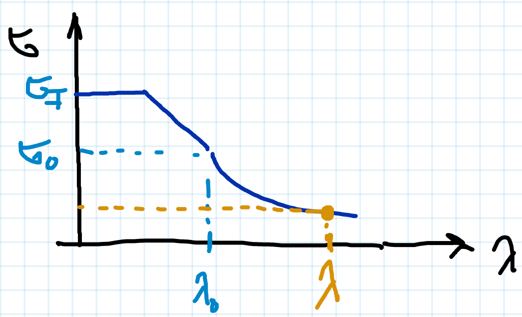
$i_2 = \sqrt{I_2 / A} = 32{,}55\,\text{mm}$

$A = \frac{\pi}{4}\left(d^2 - (d-2t)^2\right)$

$\lambda = 75{,}27 \overset{?}{\geq} \lambda_0$

Euler hiperbola képlete: $\sigma_t = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E$

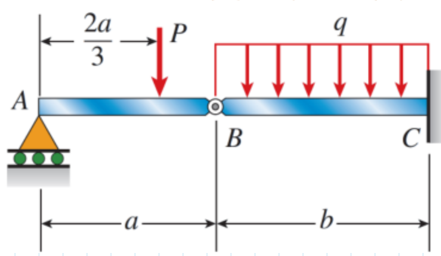
Tehát $\sigma_0 = \left(\frac{\pi}{\lambda_0}\right)^2 E \Rightarrow \lambda_0 = 38{,}48 < \lambda$ ✓



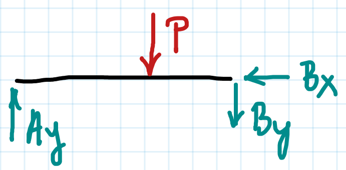

## Példa 2.2

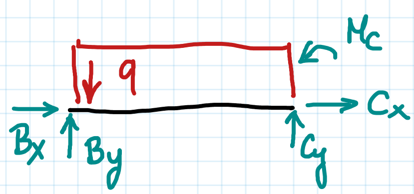
**2.2. Példa.** Az ábrán látható **AB** és **BC** rúd csuklósan kapcsolódik a **B** pontban. A tartó terhelése a $P$ koncentrált erő és az állandó intenzitású $q$ megoszló terhelés. Határozzuk meg a **B** csukló lehajlását a szuperpozíció elvének és a járulékképletek felhasználásával.

**Megoldás**: $f_B = qb^4/(8IE) + 2b^3/(9IE)$.




SZTA 1 $\quad y \uparrow \rightarrow x \quad$ SZTA 2



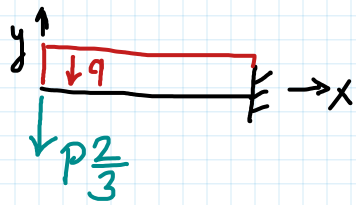




EE1

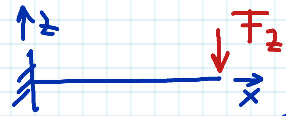
$\Sigma F_x = 0: \quad B_x = 0$

$\Sigma M_A = 0: \quad -P\frac{2a}{3} - B_y a = 0 \Rightarrow B_y = -P\frac{2}{3}$

Tehát



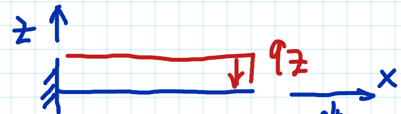

járulékképlet:




$$w_{max} = \frac{F_z \ell^3}{3EI_y}$$

Tehát

$$w_B = \frac{\frac{2}{3} P b^3}{3EI_z} + \frac{q b^4}{8EI_z} = \frac{b^3}{EI_z}\left[\frac{2}{9}P + \frac{qb}{8}\right]$$




$$w_{max} = \frac{q_z \ell^4}{8EI_y}$$