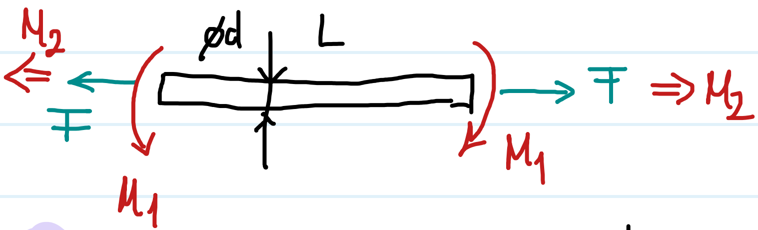
Példa 6.2

6.2. Példa. Egy $L = 1$ m hosszú, $d = 10$ mm átmérőjű egyenes rúd végein $F = 1$ kN húzóerő, M_1 hajlítónyomaték és M_2 csavarónyomaték működik. Hogyan válasszuk meg az M_1/F ill. M_2/F arányt, ha azt akarjuk, hogy az egyes terhelések hatására azonos mértékű alakváltozási energia halmozódjon fel a rúdban? Mekkora lesz ebben az esetben (amikor mindhárom igénybevétel működik) a teljes alakváltozási energia? Adatok: $E = 200$ GPa, $\nu = 0{,}3$.

Megoldás: $M_1/F = d/4$, $M_2/F = \frac{d}{4\sqrt{1+\nu}}$, $U = 0{,}095$ J.



a)

N: $$U_N = \int_0^L \frac{N^2}{2AE}\,dx = \int_0^L \frac{F^2}{2AE}\,dx = \left[\frac{F^2 x}{2AE}\right]_0^L = \frac{F^2 L}{2AE} = \frac{2F^2 L}{d^2 \pi E}$$

$N(x) = F$

M_h: $$U_{M_h} = \int_0^L \frac{M_h^2}{2IE}\,dx = \left[\frac{M_1^2 x}{2IE}\right]_0^L = \frac{M_1^2 L}{2IE} = \frac{M_1^2\, 32\, L}{d^4 \pi E}$$

$M_h(x) = M_1$

$$U_N = U_{M_h} \Longrightarrow \frac{M_1}{F} = \sqrt{\frac{d^2}{16}} = \frac{d}{4}$$

M_t: $$U_{M_t} = \int_0^L \frac{M_t^2}{2I_p G}\,dx = \left[\frac{M_2^2 x}{2I_p G}\right]_0^L = \frac{M_2^2 L}{2 I_p G} = \frac{16\, M_2^2\, L\, 2(1+\nu)}{d^4 \pi E}$$

$M_t(x) = M_2$

$$U_N = U_{M_t} \Longrightarrow \frac{M_2}{F} = \sqrt{\frac{d^2}{16(1+\nu)}} = \frac{d}{4\sqrt{1+\nu}}$$

b)

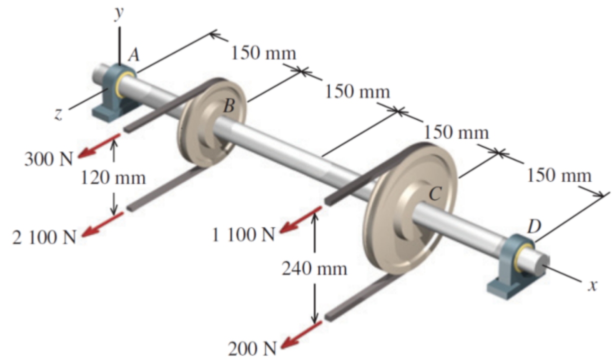
$$U = 3N = \frac{6F^2 L}{d^2 \pi E} = 0{,}095\ \mathrm{J}$$

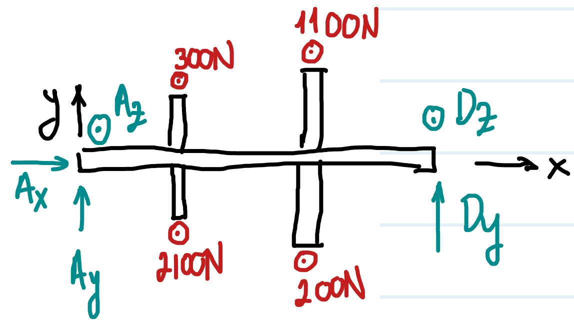
Példa 6.4

nincs reakció nyomaték!

6.4. Példa. Egy 20 mm átmérőjű acél tengelyt az A és D csapágyak támasztják meg, melyek engedik a tengely kismértékű szögelfordulását. Az A csapágy gátolja a tengelyirányú elmozdulást, míg a D csapágy engedélyezi. A tengely terhelése a B és C szíjtárcsákról átadódó erők és nyomatékok. Határozzuk meg a tengelyben ébredő maximális Mohr és HMH-féle egyenértékű feszültségeket! Mekkora legyen a tengely átmérője ha $\sigma_{meg} = 300$ MPa?

Megoldás: $\sigma_{egy}^{Mohr} = 428{,}51$ MPa, $\sigma_{egy}^{HMH} = 422{,}96$ MPa, $d_{min}^{Mohr} = 22{,}52$ mm, $d_{min}^{HMH} = 22{,}43$ mm.





$$[\underline{F}, \underline{M}_A]_A = [\underline{0}, \underline{0}]_A \text{ , mert egyensúlyban van}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300+2100+1100+200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg\} \text{ 3 egyenlet}$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}06 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ -0{,}06 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}12 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ -0{,}12 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}$$

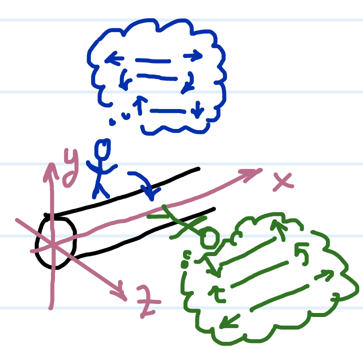
$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -945 - 0{,}6 D_z \\ 0{,}6 D_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg\} \text{ 3 egyenlet}$$

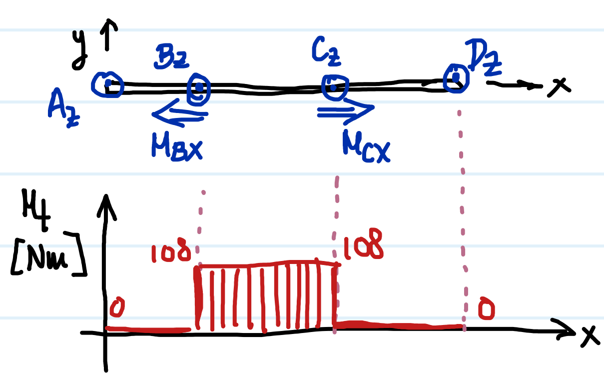
$A_x = 0$ N $A_y = 0$ N

$D_y = 0$ N $A_z = -2125$ N

$D_z = -1575$ N

$N \equiv 0$; $M_t = ?$; $V_y \equiv 0$; $V_z = ?$; $M_{hy} = ?$; $M_{hz} = 0$



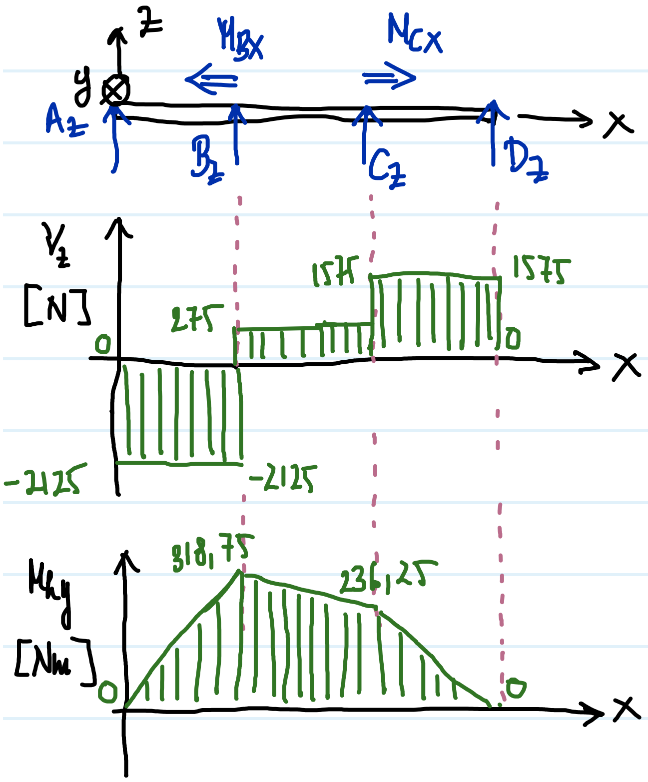


$M_{Bx} = (2100-300) \cdot 0{,}06$

$M_{Bx} = 108$ Nm

$M_{Cx} = (1100-200) \cdot 0{,}12$

$M_{Cx} = 108$ Nm



$B_z = 2400\,N$

$C_z = 1300\,N$

$M_{hmax} = 318{,}75\,Nm \longrightarrow \sigma_x$

$x_{krit} = 0{,}15\,m$

$M_t = 108\,Nm \longrightarrow \tau$

$K_y = \dfrac{d^3\pi}{32} = 785{,}4\,mm^4$

$$M_{red}^{Mohr} = \sqrt{318{,}75^2 + 108^2} = 336{,}55\,Nm \longrightarrow \sigma_{egy}^{Mohr} = \frac{M_{red}^{Mohr}}{K_y} = 428{,}51\,MPa$$

$$M_{red}^{HMH} = \sqrt{318{,}75^2 + 3/4 \cdot 108^2} = 332{,}19\,Nm \longrightarrow \sigma_{egy}^{HMH} = \frac{M_{red}^{HMH}}{K_y} = 422{,}96\,MPa$$

VAGY! $\sigma = \dfrac{M_h}{I}\dfrac{d}{2}$ $\qquad \tau = \dfrac{M_t}{I_p}\dfrac{d}{2}$; $I_p = 2I \Rightarrow \tau = \dfrac{M_t}{I}\dfrac{d}{4}$

$$\sigma_{egy}^{Mohr} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{1}{I}\cdot\frac{d}{2}\sqrt{M_h^2 + 4\cdot M_t^2/4} = \frac{M_{red}^{Mohr}}{K_y}$$

$$\sigma_{egy}^{HMH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \frac{1}{I}\cdot\frac{d}{2}\sqrt{M_h^2 + 3\,M_t^2/4} = \frac{M_{red}^{HMH}}{K_y}$$

$$d_{min}^{Mohr} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot M_{red}^{Mohr}}{\pi\,\sigma_{meg}}} = 22{,}52\,mm$$

$$d_{min}^{HMH} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot M_{red}^{HMH}}{\pi\,\sigma_{meg}}} = 22{,}43\,mm$$

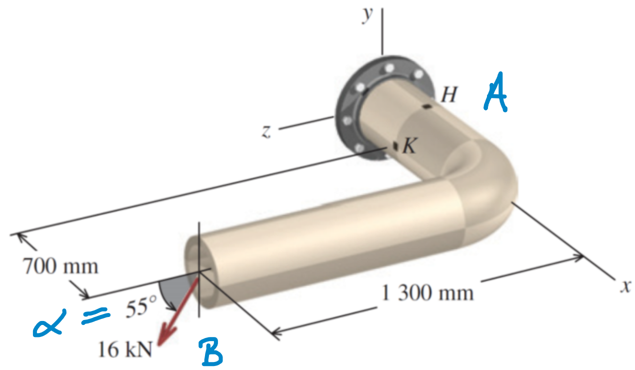
Ell.: a fentieknél a kerületi pontot feltételeztük veszélyesnek. Középpontnál? +

$\tau = \dfrac{4}{3}\dfrac{V_{max}}{A} = 9{,}02\,MPa$ << kerületi pont egyenértékű fesz.-e

Példa 6.5

6.5. Példa. Egy 140 mm külső átmérőjű és 7 mm falvastagságú csőidom terhelése és megfogása látható az ábrán. Határozzuk meg a H és K felületi pontokban a Mohr- és a HMH-féle egyenértékű feszültségek nagyságát! A nyírásból adódó feszültségeket hanyagoljuk el.

Megoldás: $\sigma_{\mathrm{egyH}}^{\mathrm{HMH}} = 187,55\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_{\mathrm{egyH}}^{\mathrm{Mohr}} = 208,88\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_{\mathrm{egyK}}^{\mathrm{HMH}} = 173,71\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_{\mathrm{egyK}}^{\mathrm{Mohr}} = 196,55\,\mathrm{MPa}$.

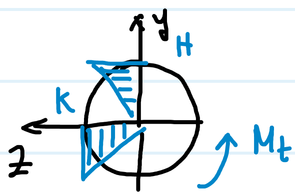


$$\underline{F} = 16 \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -13,11 \\ 9,18 \end{bmatrix} \mathrm{kN}$$

$$\underline{M}_A = \underline{r}_{AB} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0 \\ 1,3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -13,11 \\ 9,18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,04 \\ -6,42 \\ -9,17 \end{bmatrix} \mathrm{kNm}$$

$N = 0$; $V_y = -13,1$ kN; $V_z = 9,18$ kN; $M_t = 17$ kNm; $M_{hy} = -6,42$ kNm, $M_{hz} = -9,2$ kNm

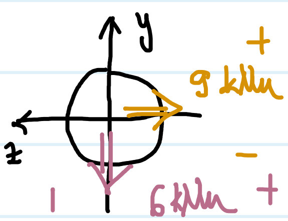
$$\tau = \frac{M_t}{I_p}\frac{d}{2} = 91,96\,\mathrm{MPa}$$



$$\tau_{xz}^{H} = 91,96\,\mathrm{MPa}$$

$$\tau_{xy}^{K} = -91,96\,\mathrm{MPa}$$

$$I_p = \frac{d_k^4 \pi}{32} - \frac{d_b^4 \pi}{32}$$



$$\sigma_x(y,z) = \frac{M_{hy}}{I_y} z - \frac{M_{hz}}{I_z} y$$

$$\sigma_x^{H} = \sigma_x(d/2, 0) = 99,03\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_x^{K} = \sigma_x(0, d/2) = -69,34\,\mathrm{MPa}$$

$$I_y = I_z = \frac{d_k^4 \pi}{64} - \frac{d_b^4 \pi}{64}$$

H

$$\sigma_{egyH}^{Mohr} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 208,88\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{egyH}^{HMH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 187,55\,\mathrm{MPa}$$

K

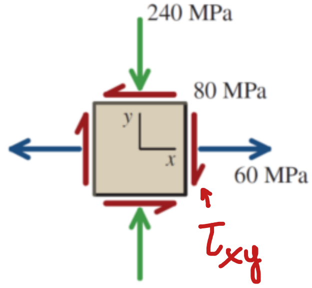
$$\sigma_{egyK}^{Mohr} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 196,55\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{egyK}^{HMH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 173,71\,\mathrm{MPa}$$

Példa 6.6

6.6. Példa. Egy felületi pont feszültségi állapotát szemlélteti az alábbi ábra. Mekkora a $\sigma_F =$ 500 MPa értékű folyáshatárral szemben a biztonsági tényező nagysága ha a Mohr-féle egyenértékű feszültség elméletet használjuk? Mekkora p felületi nyomás esetén lesz a HMH-féle egyenértékű feszültség 340 MPa?

Megoldás: $n = 1,47$, $p = 260$ MPa.



a)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 60 & -80 & 0 \\ -80 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

1. Főfesz.?

$$\sigma_k = \frac{60-240}{2} = -90 \text{MPa} \quad ; \quad R = \sqrt{(60-(-90))^2 + (-80)^2} = 170 \text{MPa}$$

$$\sigma_1 = -90 + 170 = 80 \text{MPa} \quad ; \quad \sigma_2 = 0 \text{MPa} \quad ; \quad \sigma_3 = -90 - 170 = -260 \text{MPa}$$

$$\sigma^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3 = 80 - (-260) = 340 \text{MPa}$$

$$n = \frac{500}{340} = 1,47$$

b)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 60 & -80 & 0 \\ -80 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}}_h = \frac{1}{3} tr \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -60 - \frac{p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -60 - \frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -60 - p/3 \end{bmatrix}$$

$$tr \underline{\underline{\sigma}} = 60 - 240 - p = -180 - p$$

Mivel $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_h + \underline{\underline{\sigma}}_d \longrightarrow$

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \begin{bmatrix} 120 + p/3 & -80 & 0 \\ -80 & -180 + p/3 & 0 \\ 0 & 0 & 60 - 2p/3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d = (120 + p/3)^2 + (-180 + p/3)^2 + (60 - 2p/3)^2 + 2(-80)^2 = \frac{2}{3} p^2 - 120p + 63200$$

$$\sigma_{egy}^{HMH} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d} = \sqrt{p^2 - 180p + 94800} = 340 \text{MPa}$$

$$p_{1,2} = \begin{cases} -80 \text{MPa} & \text{↯, mert nyomásnak van kitéve, és } \sigma_z = -p \\ 260 \text{MPa} \end{cases}$$