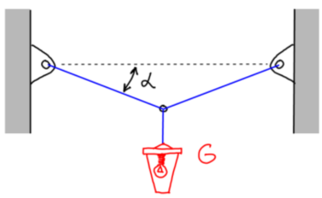
Példa 1.1 (Normál igénybevétel)

1. Rudak, gerendák feszültségi állapota

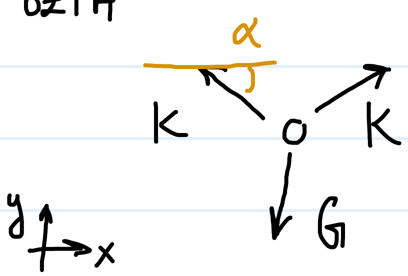
1.1. Normál igénybevétel

1.1. Példa. Egy $G = 700$ N súlyú lámpatestet szeretnék felfüggeszteni a merevnek tekintett falak közé egy $\varnothing d = 3$ mm átmérőjű acélhuzallal, melyre húzás esetén a megengedett feszültség $\sigma_{\text{meg}} = 285$ MPa. Határozzuk meg, hogy mekkora lehet minimálisan a huzal vízszintessel bezárt szöge annak érdekében, hogy a huzalban ébredő normálfeszültség a megengedett érték alatt maradjon.

Megoldás: $\alpha_{\text{meg}} = 10°$.

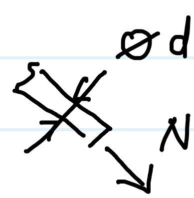


SZTÁ



$$y:\quad 2K\sin\alpha - G = 0$$

$$N = K$$



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4}$$

$$N = \frac{G}{2\sin\alpha} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha \downarrow \\ N \uparrow \\ \sigma \uparrow\end{matrix}$$

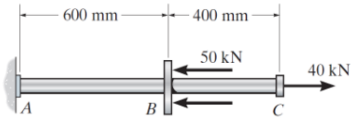
$$\sigma_{meg} = \frac{2G}{d^2\pi\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2G}{\sigma_{meg}\, d^2\pi}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2G}{\sigma_{meg}\, d^2\pi}\right) = 10°$$

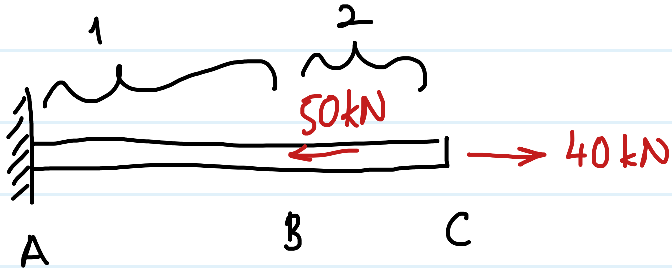
Példa 1.2

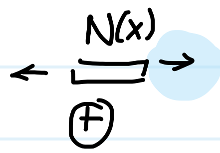
1.2. Példa. Egy 20 mm átmérőjű acél rudat az ábra szerinti 50 kN nagyságú erő terheli körkörösen a B keresztmetszetben, valamint a 40 kN nagyságú erő a C keresztmetszetben. Az acél rugalmassági modulusza 200 GPa. Feladatok: a) Rajzoljuk fel a normál igénybevételi ábrát. b) Számítsuk ki a végkeresztmetszet elmozdulását. c) Határozzuk meg az egyes szakaszokon ébredő feszültségeket.

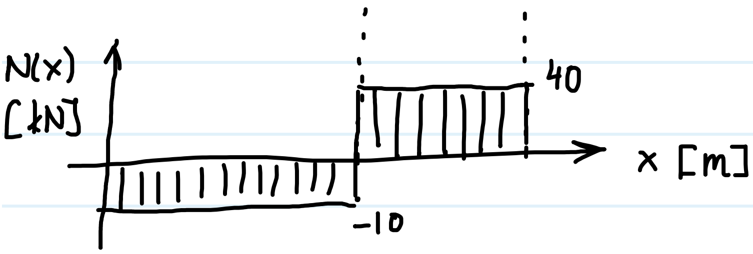
Megoldás: $\Delta L_C = 0,159$ mm; $\sigma_{AB} = -31,83$ MPa, $\sigma_{BC} = 127,324$ MPa.



a)







b)

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A}$$

$$\sigma(x) = E\,\varepsilon(x)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\frac{\Delta l}{l} E = \frac{N}{A} \Rightarrow \Delta l = \frac{Nl}{AE}$$

$$B: \quad \Delta l^{B} = \frac{-10\,000 \cdot 0,6}{\frac{0,02^2}{4}\pi \cdot 200 \cdot 10^9}$$

$$\Delta l^{B} = -0,0955 \text{ mm}$$

$$BC: \quad \Delta l^{BC} = \frac{40000 \cdot 0,4}{\frac{0,02^2\pi}{4} \cdot 200 \cdot 10^9}$$

$$\Delta l^{BC} = 0,2546 \text{ mm}$$

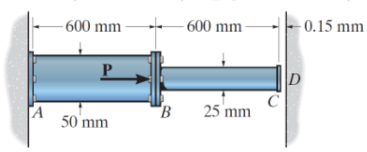
$$\Delta l^{C} = \Delta l^{B} + \Delta l^{BC} = 0,1591 \text{ mm}$$

c) $\sigma^1 = \dfrac{-10\,000}{\frac{0{,}02^2\,\pi}{4}}\ Pa = -31{,}83\ MPa$

$\sigma^2 = \dfrac{40000}{\frac{0{,}02^2\,\pi}{4}}\ Pa = 127{,}32\ MPa$

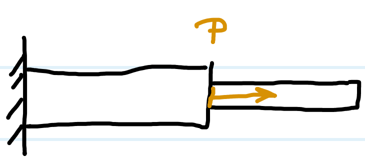
Példa 1.3

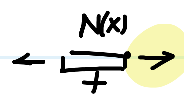
1.3. Példa. A C végkeresztmetszet és a fal közötti hézag 0,15 mm az alábbi feladatnál látható hengeres tömör rudakból álló szerkezetnél a terheletlen állapotban. A terhelés nagysága $P = 300$ kN. Határozzuk meg a falakban ébredő reakcióerőket a terhelés alkalmazásakor. Mekkora az egyes részek hosszváltozása és bennük ébredő feszültség? Az anyag rugalmassági modulusza 70 GPa.
Megoldás: $F_A = -246,872$ kN, $F_D = -53,128$ kN; $\Delta L_{AB} = 1,078$ mm, $\Delta L_{BC} = -0,928$ mm; $\sigma_{AB} = 125,73$ MPa, $\sigma_{BC} = -108,23$ MPa.



Hozzáér a falhoz?

Tfh nem:





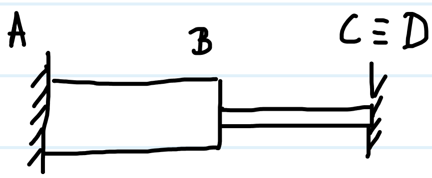
$\Delta l = \dfrac{300\,000 \cdot 0{,}6}{\frac{0{,}05^2\,\pi}{4} \cdot 70 \cdot 10^9} \left(= \dfrac{NL}{AE} \right)$

$\Delta l = 1{,}3\ mm > \delta = 0{,}15\ mm$

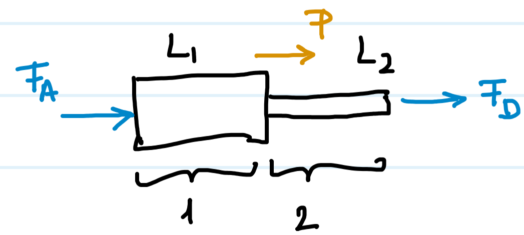
$\Rightarrow$ hozzáér a falhoz!

Túlhatározott, DE rugalmas testként kezelve megoldható!

$$\Delta l^{C} = \delta$$



SZTA'



$$N^{1} = -F_A \qquad N^{2} = -F_A - P \left(= F_D\right)$$

$$\Delta l^{B} = \frac{N^{1} \cdot L_1}{A_1 E}$$

$$\Delta l^{BC} = \frac{N^{2} L_2}{A_2 E}$$

$$\Delta l^{C} = \delta = \Delta l^{B} + \Delta l^{BC} = \frac{-F_A L_1}{A_1 E} - \frac{(F_A + P) L_2}{A_2 E}$$

$$\delta A_1 A_2 E = -F_A \left(L_1 A_2 + L_2 A_1\right) - P L_2 A_1$$

$$F_A = -\frac{\delta A_1 A_2 E + P L_2 A_1}{L_1 A_2 + L_2 A_1} = -246{,}87 \text{ kN}$$

$$F_D = -F_A - P = -53{,}13 \text{ kN}$$

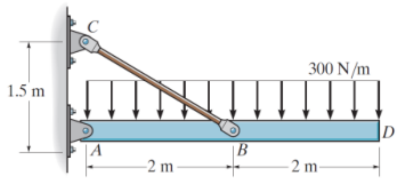
b) $\Delta l^{B} = \dfrac{-F_A L_1}{A_1 E} = 1{,}078 \text{ mm}$ $\qquad \Delta l^{BC} = \delta - \Delta l^{B} = -0{,}928 \text{ mm}$

$$\sigma^{1} = \frac{N_1}{A_1} = 125{,}73 \text{ MPa} \qquad \sigma^{2} = \frac{N_2}{A_2} = -108{,}231 \text{ MPa}$$

Példa 1.4

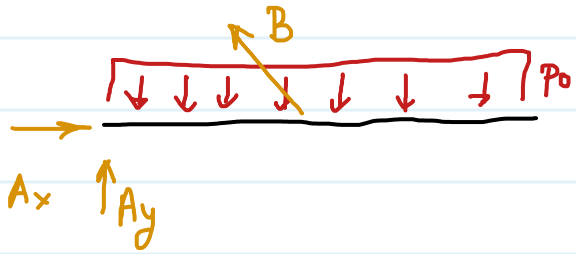
1.4. Példa. A merev ABD egyenes merev rúd megtámasztása az ábra szerinti. A rugalmas CB rúd keresztmetszetének területe 150 mm², anyagának rugalmassági modulusza 100 GPa. A merev rúd terhelése az egyenletesen megoszló erőrendszer. Határozzuk meg a D keresztmetszet függőleges elmozdulását!

Megoldás: $f_D = 1,1$ mm.



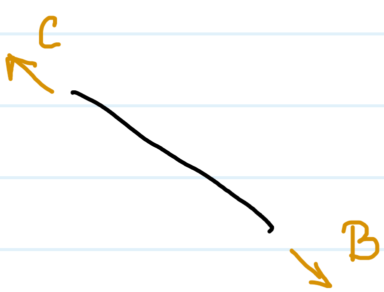
statika

SZTA'



y x

L = 2m



B = N

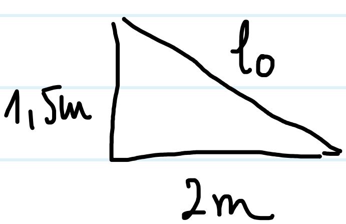
CB statikai rúd
↳ rúdirányú erő!

EE

$$x: \; A_x - B_x = 0 \quad (1)$$

$$y: -p_0 2L + A_y + B_y = 0 \quad (2)$$

$$z: \; B_y L - p_0 2L^2 = 0 \quad (3)$$



$$l_0 = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ m}$$

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{2}{1,5} \quad (4)$$

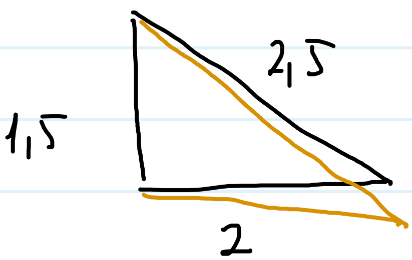
$$\left.\begin{aligned}(3):\quad & B_y = 2p_0L = 1{,}2\,kN \\ (4):\quad & B_x = 1{,}6\,kN\end{aligned}\right\}\; B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 2\,kN$$

sziltan

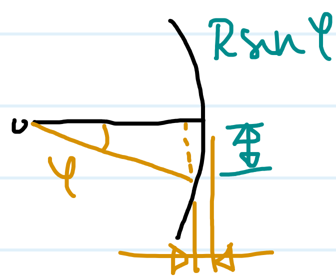
$$\sigma = \frac{B}{A} = 13{,}33\,MPa$$

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = 1{,}33 \cdot 10^{-4}$$

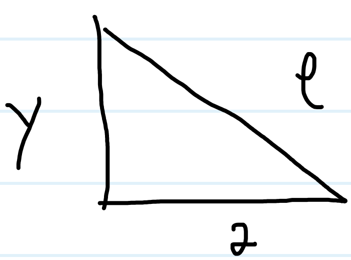
$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0} \Rightarrow \Delta\ell = \varepsilon \cdot \ell_0 = 0{,}333\,mm$$



Közelítsük tisztán vertikális elmozdulással $\underbrace{}_{\sim\varphi}$



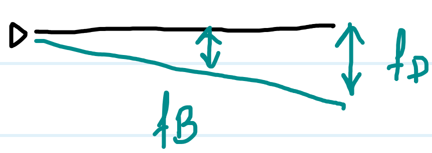
$$R - R\underbrace{\cos\varphi}_{\sim 1} = 0$$



$$Y = \sqrt{\ell^2 - 2^2} = 1{,}500555\,m$$

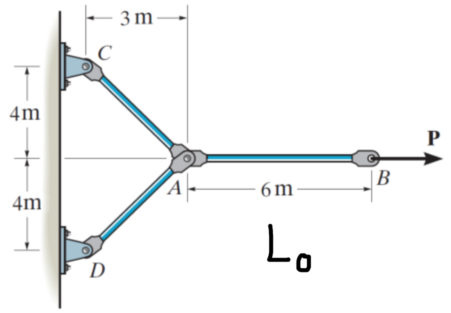
$$f_B = Y - 1{,}5 = 0{,}555\,mm$$

$$f_D = 2f_B = 1{,}1\,mm$$

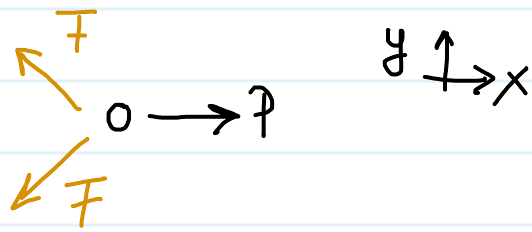


Példa 1.5

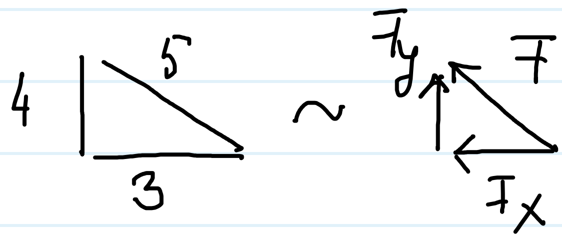
1.5. Példa. Az ábrán látható rudak átmérője 30 mm, anyaguknak rugalmassági modulusza 200 GPa. Mekkora legyen a végpont P terhelése, hogy a B pont elmozdulása 5 mm legyen?
Megoldás: $P = 54,616$ kN.



SZTA'



statika

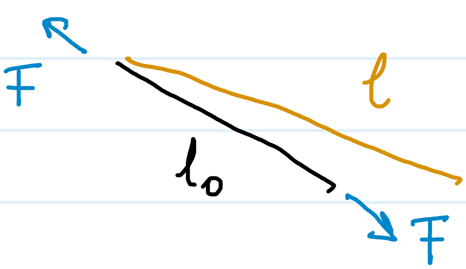


$$x.\quad P - 2F_x = 0$$

$$F_x = F\,\frac{3}{5}$$

$$P = \frac{6}{5}F$$

szltan



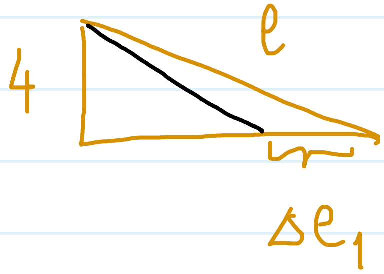
$$\ell_0 = 5\,m$$

$$\sigma_{CA} = \frac{N_{CA}}{A}$$

$$N_{CA} = F = \frac{5}{6}P$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4}$$

$$\sigma_{CA} = \frac{5P}{6A} = E\,\varepsilon_{CA} = E\,\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$



$$\Delta \ell_1 = \sqrt{\ell^2 - 4^2} - 3$$

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = E\,\varepsilon_{AB} = E\,\frac{\Delta \ell_2}{L_0}$$

$$N_{AB} = P$$

$$\Delta \ell_B = \Delta \ell_2 + \Delta \ell_1$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{P L_0}{AE}$$

$$\ell = \frac{5 P \ell_0}{6AE} + \ell_0 = \ell_0 \left(\frac{5P}{6AE} + 1 \right)$$

$$\Delta \ell_1 = \sqrt{\ell_0^2 \left(\frac{5P}{6AE} + 1 \right)^2 - 4^2} - 3$$

$$\Delta \ell_B = \frac{P L_0}{AE} + \sqrt{\ell_0^2 \left(\frac{5P}{6AE} + 1 \right)^2 - 4^2} - 3 = 0{,}005$$

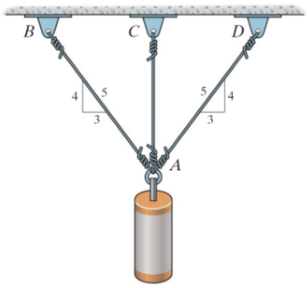
$$L_0 = 6\,m$$

$$P = 54{,}616\ kN$$

Példa 1.6

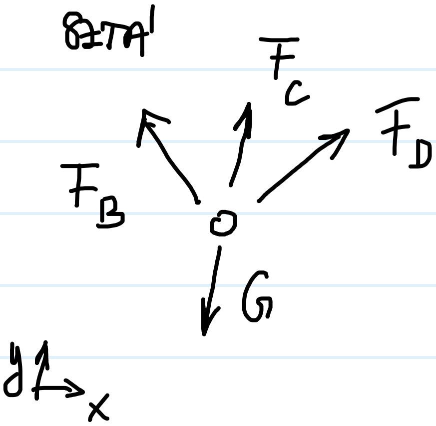
1.6. Példa. Az ábrán látható $G = 130$ N súlyú terhet 3 azonos anyagú horgászzsinórral függesztettünk fel, melyek rugalmassági modulusza 2 GPa. A zsinórhosszak ismertek: $L_{AB} = L_{AD} = 2$ m, $L_{AC} = 1,6$ m. Az AB és AD zsinórok átmérője azonos, $\phi d_{AB} = \phi d_{AD} = 2$ mm. Mekkora legyen az AC zsinór átmérője, ha azt szeretnénk, hogy mindegyik zsinórban ugyanakkora normál igénybevétel ébredjen?

Megoldás: $\phi d_{AC} = 1,602$ mm.

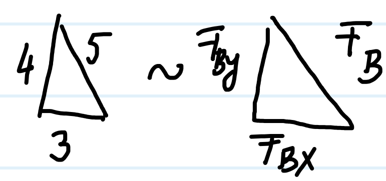


Statika

SZTÁ



$F_B = F_D$



EE

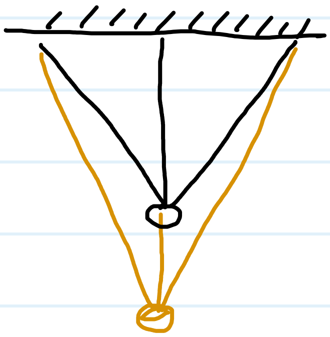
y: $F_C - G + 2F_{By} = 0$

$F_{By} = F_B \, 4/5$

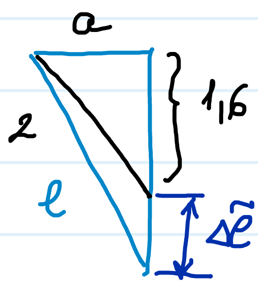
$$F_C - G + \frac{8}{5} F_B = 0$$

$N_B = N_D = F_B$ $\qquad$ $N_C = F_C = F_B$

Tehát: $\frac{13}{5} F_C = G \Rightarrow F_C = \frac{5}{13} G = 50\,N$



$$\sigma_C = \frac{N_C}{A_C} = \frac{\Delta \ell_C}{\ell_C} E$$



$$a = \sqrt{2^2 - 1{,}6^2} = 1{,}44 m$$

$$\Delta\tilde{\ell} = \sqrt{\ell^2 + a^2} - 1{,}6 = \Delta \ell_C$$

$$\sigma_B = \frac{N_B}{A_B} = \frac{N_B\, 4}{d_B^2\, \pi} \left(= 15{,}92\, MPa\right) \qquad \sigma_B = \frac{\Delta \ell_B}{\ell_B} E$$

$$\Delta \ell_B = \frac{N_B}{A_B} \frac{\ell_B}{E} = \ell - \ell_B \Rightarrow \ell = \ell_B \left[\frac{N_B}{A_B\, E} + 1 \right] \left(= 2{,}016\, m\right)$$

$$\Delta\tilde{\ell} = 0{,}01985 m = \Delta \ell_C$$

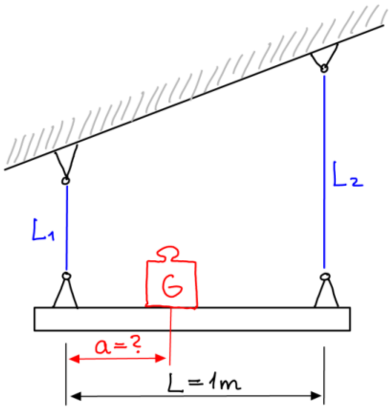
$$A_C = \frac{N_C}{E} \frac{\ell_C}{\Delta \ell_C} = 496\,260\, m^2 \qquad A_C = \frac{d_C^2\, \pi}{4}$$

$$d_C = 1{,}602\, mm$$

Példa 1.7

1.7. Példa. A vízszintes, merevnek tekintett rudat két huzal tartja egyensúlyban. A rúd terhelése a rajta elhelyezett $G = 5000$ N súlyú teher. A bal oldali huzal anyaga acél, rugalmassági modulusza $E_1 = 200$ GPa. A jobb oldali huzal alumíniumból készült, rugalmassági modulusza $E_2 = 70$ GPa. A huzalok keresztmetszetei és hosszaik az alábbiak: $A_1 = 120\ \text{mm}^2$, $A_2 = 240\ \text{mm}^2$, $L_1 = 15$ m, $L_2 = 25$ m. Hol helyezkedjen el a G teher, ha azt szeretnénk, hogy a merev rúd a terhelés hatására vízszintes maradjon? Mekkora feszültségek ébrednek ekkor a huzalokban?

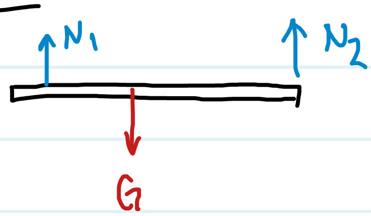
Megoldás: $a = 295,77$ mm, $\sigma_1 = 29,34$ MPa, $\sigma_2 = 6,16$ MPa.



$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$

$$\Delta L_1 = \frac{N_1}{A_1}\frac{L_1}{E_1} = \frac{N_2}{A_2}\frac{L_2}{E_2} = \Delta L_2$$

SZTÁ



EE

$y.\quad N_1 + N_2 - G = 0$

$z.\quad N_2 L - G a = 0 \Rightarrow N_2 = G\frac{a}{L}$

$$N_1 = G\left(1 - \frac{a}{L}\right)$$

$$\frac{L_1\left(1-\frac{a}{L}\right)}{A_1 E_1} = \frac{a}{L}\frac{L_2}{A_2 E_2} \Rightarrow a = 295,78\ \text{mm}$$

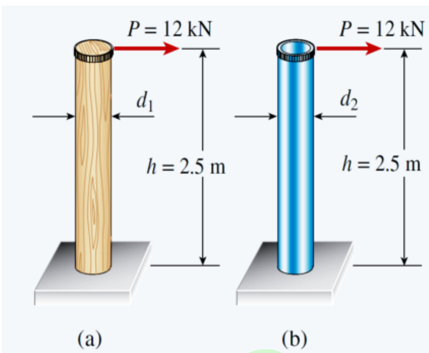
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 29,34\ \text{MPa} \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 6,16\ \text{MPa}$$

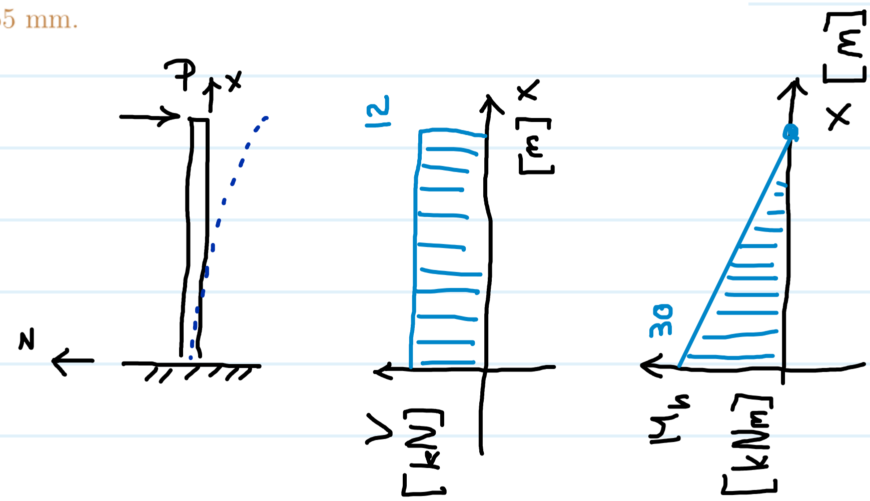
Példa 1.8 (Hajlító igénybevétel)

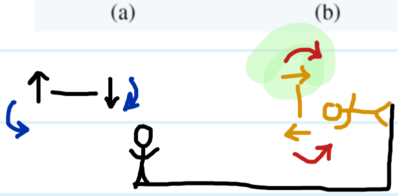
1.2. Hajlító igénybevétel

1.8. Példa. Egy függőleges oszlop terhelése a felső végén működő koncentrált erő az ábrán látható módon. Célunk meghatározni az oszlop anyagát és keresztmetszetét az alábbi módon: a) Tömör kör keresztmetszetű fából kívánjuk elkészíteni b) Alumínium csőből gyártjuk le úgy, hogy a cső falvastagsága a külső átmérő nyolcada. A fára és az alumíniumra megengedhető feszültségek: $\sigma_{\text{meg,fa}} = 15$ MPa, $\sigma_{\text{meg,alu}} = 50$ MPa. Határozzuk meg a szükséges méreteket!

Megoldás: $d_1 = 273,1$ mm, $d_2 = 207,55$ mm.







$T = 12 \cdot h = 30$ ↳ $-\int V(x)dx$

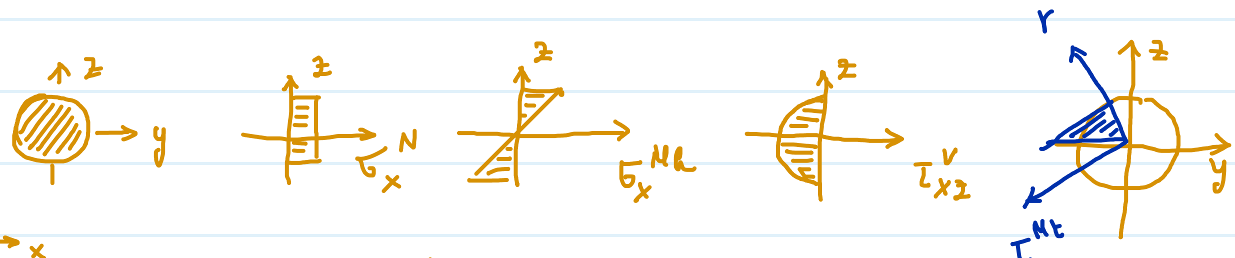
Veszélyes KM: $x_{knt} = 0$ m

általában

$V \rightarrow \tau_V << \sigma_{Mh} \leftarrow M_h$

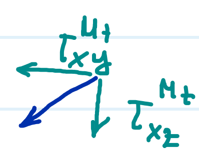
---

megjegyz.:



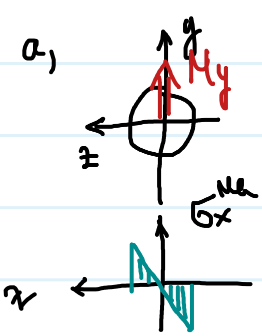
$N, M_h, M_t \rightarrow$ szélső szál veszélyes

$V \rightarrow$ súlyponti szál veszélyes



---

a)



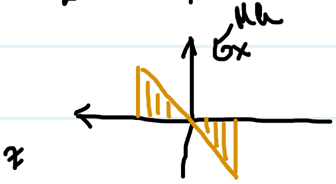
$$\sigma_{max}^{Mh} = \frac{M_{h,max}}{I_{y,fa}} \frac{d_{fa}}{2} \leq \sigma_{meg,fa}$$

$$I_{y,fa} = \frac{d_{fa}^4 \pi}{64}$$

$$\sigma_{meg,fa} = \frac{M_h(x_{krit})}{d_{fa}^3\,\pi}\cdot 32 \Rightarrow d_{fa} = \sqrt[3]{\frac{M_h(x_{krit})\cdot 32}{\sigma_{meg,fa}\,\pi}} = 273,11\,mm$$

b1)

$$I_{y,alu} = \frac{d_{alu}^4\,\pi}{64} - \frac{81\,d_{alu}^4\,\pi}{16384} = d_{alu}^4\,\pi\,\frac{175}{16384}$$



$s = \frac{d_{alu}}{8} \leftarrow$ feladat

$$d_{belső} = d_{alu} - \frac{d_{alu}}{4} = \frac{3d_{alu}}{4}$$

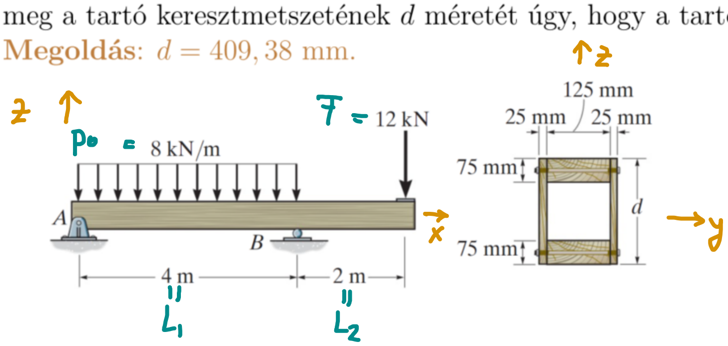
$$\sigma_{meg,alu} = \frac{M_h(x_{krit})}{I_{y,alu}}\,\frac{d_{alu}}{2} = \frac{M_h(x_{krit})\cdot 8192}{d_{alu}^3\,\pi\,175}$$

$$d_{alu} = \sqrt[3]{\frac{8192\cdot M_h(krit)}{175\,\pi\,\sigma_{meg,alu}}} = 207,55\,mm$$

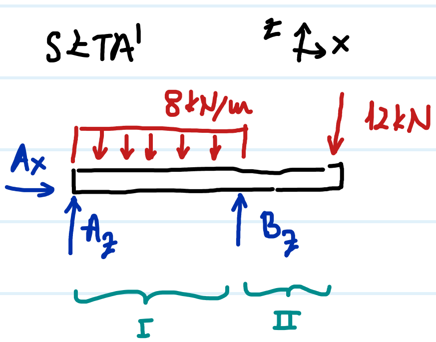
Példa 1.9

1.9. Példa. A megengedhető legnagyobb normálfeszültség 6 MPa az alábbi tartónál. Határozzuk meg a tartó keresztmetszetének d méretét úgy, hogy a tartó hajlításra megfeleljen.

Megoldás: $d = 409,38$ mm.



SZTA



EE

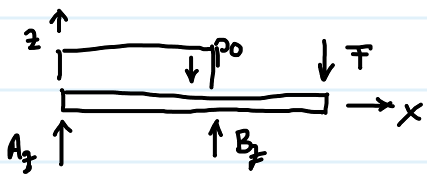
$x: \; A_x = 0 \qquad (1)$

$z: \; A_z + B_z - F - p_0\cdot L_1 = 0 \qquad (2)$

$y: \; B_z L_1 - F(L_1 + L_2) - p_0 L_1 \frac{L_1}{2} = 0 \qquad (3)$

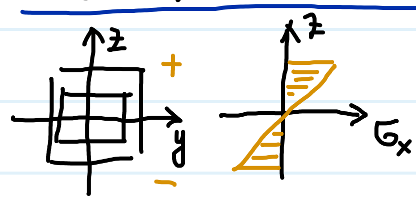
(3) $B_z = 34$ kN (2) $A_z = 10$ kN

I: $0 < x < 4m$ II: $4m < x < 6m$



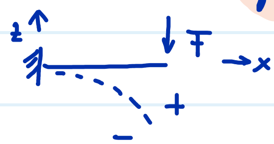
$x_{krit} = 4m$

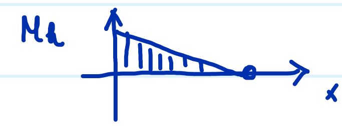
$M_h(x_{krit}) = 24\,kNm$

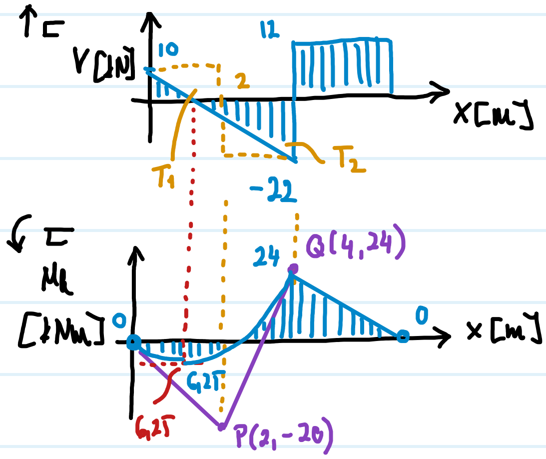


előjel eldöntése egyszerű feladat segítségével

analógia:







$T_1 = 10 \cdot 2 = 20$

$T_2 = -22 \cdot 2 = 44$

$V(x_{sz}) = 0$

$V_I(x_{sz}) = 10 - 8x_{sz} = 0$

$x_{sz} = 1{,}25m$

$M_{h\,sz} = 0 - \frac{1{,}25 \cdot 10}{2} = 6{,}25\ kNm$

$P = 0 - T_1 = -20$

$Q = -20 - T_2 = 24$

ha

$\Rightarrow M_h \oplus \Rightarrow z+ \rightarrow \sigma_x \oplus$

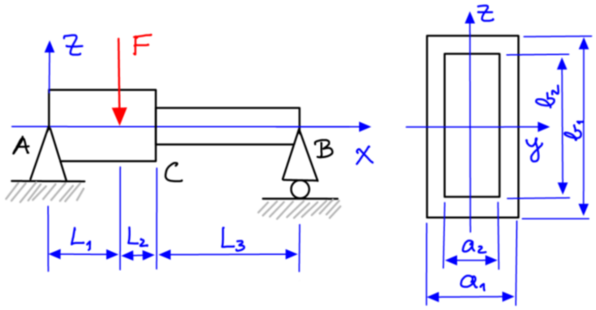
$z- \rightarrow \sigma_x \ominus$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{meg} &= \frac{M_h(x_{krit})}{I_y}\frac{d}{2} \\ I_y &= \frac{(125 + 2\cdot 25)\,d^3}{12} - \frac{125\,(d - 2\cdot 75)^3}{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow d = \begin{cases} -1547{,}69\,mm & ↯ \\ 13{,}32\,mm & ↯\ (< 75\,mm) \\ 409{,}38\,mm & ✓ \end{cases}$$

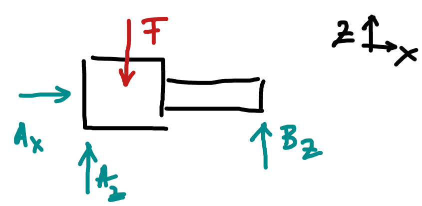
Példa 1.10

1.10. Példa. Határozzuk meg az alábbi tartó AC és CB részein a keresztmetszet méreteit úgy, hogy a $b_2/a_2 = b_1/a_1 = 2$ feltétel mellett hajlításra megfeleljen a tartó! Adatok: $L_1 = 2$ m, $L_2 = 1$ m, $L_3 = 4$ m, $F = 14$ kN, $\sigma_{meg} = 100$ MPa.

Megoldás: $a_{1min} = 66,9$ mm, $a_{2min} = 62,1$ mm.



SZTA



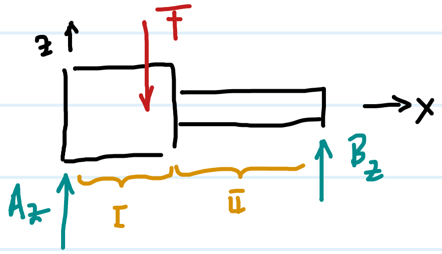
EE

x: $A_x = 0$

z: $A_z - F + B_z = 0$

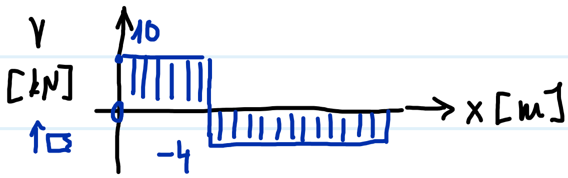
y: $B_z(L_1 + L_2 + L_3) - F L_1 = 0$

$B_z = 4\,kN \qquad A_z = F - B_z = 10\,kN$

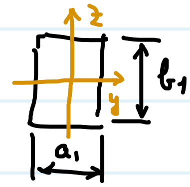


$x^{I}_{krit} = L_1$

$x^{II}_{krit} = L_1 + L_2$



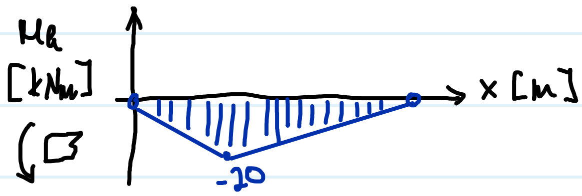
I : $\sigma_{meg} = \dfrac{M_h(x^{I}_{krit})}{I^1_y}\,\dfrac{b_1}{2}$



$I^1_y = \dfrac{b_1^3\,a_1}{12}$

$\sigma_{meg} = \dfrac{M_h(x^{I}_{krit})}{b_1^2\,a_1}\cdot 6$

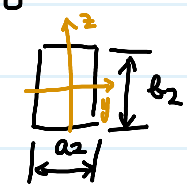
$b_1 = 2a_1$
(feladat szerint)



$\sigma_{meg} = \dfrac{M_h(x^{I}_{krit})}{2\;a_1^3}\cdot 3$

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{M_h(x^{I}_{krit})\cdot 3}{2\,\sigma_{meg}}} = 66{,}94\,mm$$

II : $\sigma_{meg} = \dfrac{M_h(x^{II}_{krit})}{I^2_y}\,\dfrac{b_2}{2}$



$I^2_y = \dfrac{b_2^3\,a_2}{12}$

$b_2 = a_2\cdot 2$
(feladat szerint)

$$\sigma_{meg} = \frac{M_h(x^{II}_{krit})}{b_2^2\,a_2}\cdot 6 = \frac{M_h(x^{II}_{krit})}{2\,a_2^3}\cdot 3 \Rightarrow a_2 = \sqrt[3]{\frac{M_h(x^{II}_{krit})}{\sigma_{meg}\cdot 2}\cdot 3} = 62{,}14\,mm$$

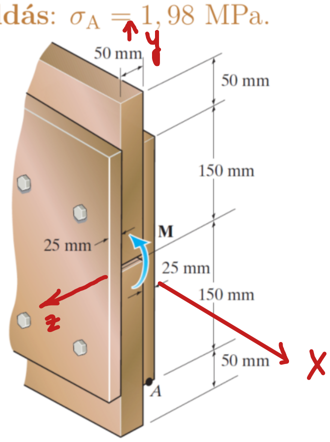
$L_1 < x < L_1 + L_2 + L_3$: $M_h(x) = -A_z\cdot x + F(x - L_1)$

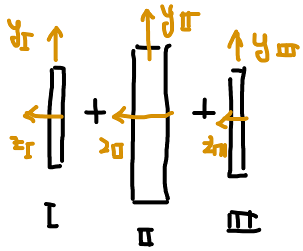
$M_h(x^{II}_{krit}) = -A_z(L_1 + L_2) + F L_2 = -16\,kNm$

Példa 1.11

1.11. Példa. Az alábbi keresztmetszet terhelése az $M = 5$ kNm hajlítónyomatéki igénybevétel az ábrán látható módon. Határozzuk meg az A pontban ébredő normálfeszültség nagyságát!

Megoldás: $\sigma_A = 1,98$ MPa.



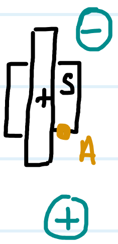


$$I_{z_I} = I_{z_{III}} = \frac{25 \cdot 300^3}{12}$$

$$I_{z_{II}} = \frac{50 \cdot 400^3}{12}$$

$$I_z = 2 I_{z_I} + I_{z_{II}} = 37\,916,67 \text{ cm}^4$$

(z tengelyek fedik egymást ⇒ nincs Steiner tag)

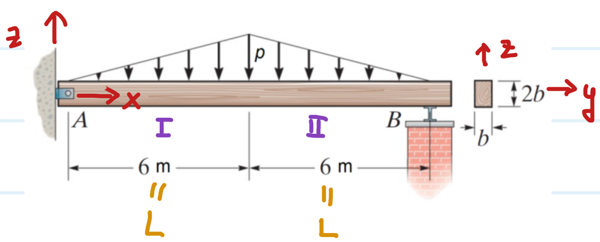


$$\sigma_A = \frac{M}{I_z} \cdot 15 = 1,98 \text{ MPa}$$

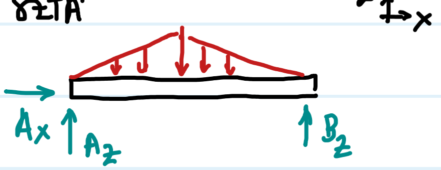
Példa 1.12

1.12. Példa. Mekkora lehet a megoszló terhelés p intenzitása (a tartó közepén), ha az anyagra megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 50$ MPa? A tartó mérete ismert: $b = 10$ cm.

Megoldás: $p = 2,778$ kN/m.



SZTÁ



EE

$x: \; A_x = 0 \quad (1)$

$z: \; A_z + B_z - pL = 0 \quad (2)$

$y: \; B_z 2L - pL^2 = 0 \quad (3)$

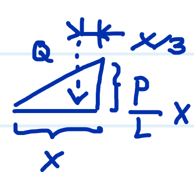
$(3) \quad B_z = p\frac{L}{2} \qquad (2) \quad A_z = p\frac{L}{2}$ ✓

(szimmetrikus)

$I: \; 0 < x < L$

$$M_{h_I}(x) = -A_z x + \frac{px}{L} \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} =$$

$$= -p\frac{L}{2} x + \frac{p}{L} \frac{x^3}{6} = \frac{px}{2}\left[\frac{x^2}{3L} - L\right]$$



elég az I. szakaszt vizsgálni szimmetria miatt!

szélsőérték: $V_I(x_{sz}) = 0$

$$V_I(x) = A_z - \frac{px}{L}\,\frac{x}{2} = p\,\frac{L}{2} - \frac{p}{L}\,\frac{x^2}{2} \quad \left(= -M_{hI}'(x)\right) \checkmark$$

$$V_I(x_{sz}) = \underbrace{\frac{p}{2}}_{\neq 0}\underbrace{\left[L - \frac{x^2}{L}\right]}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = L^2 \quad \Rightarrow \quad x = L = 6m$$

$$M_{h\,max} = M_{hI}(L) = \frac{pL}{2}\left[\frac{L}{3} - L\right] = -\frac{pL}{2}\cdot\frac{2L}{3} = -\frac{pL^2}{3}$$

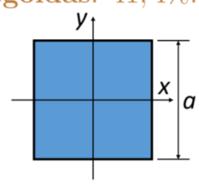
$$\sigma_{meg} = \frac{M_{h\,max}}{I_y}\cdot b = \frac{pL^2}{2b^3} \Rightarrow p = \frac{2b^3\sigma_{meg}}{L^2} = 2,778\ kN/m$$

$$I_y = \frac{b\cdot(2b)^3}{12} = \frac{2b^4}{3}$$

Példa 1.13

1.13. Példa. Tiszta hajlítással terhelt tartó keresztmetszete a oldalhosszúságú négyzet, a hajlítás tengelye az x-tengely. Hány százalékkal nő a maximális feszültség a keresztmetszetben, ha 45°-kal elforgatjuk a keresztmetszetet?

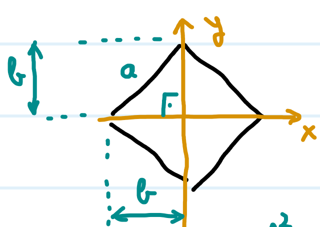
Megoldás: $41,4\%$.



négyzet KM esetén minden irány főirány

$$I_x = \frac{a^4}{12} = I_{\tilde{x}}$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x}\,\frac{a}{2}$$



$$\tilde{\sigma} = \frac{M_{\tilde{x}}}{I_{\tilde{x}}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{M_x}{I_x}\,\frac{a}{\sqrt{2}}$$

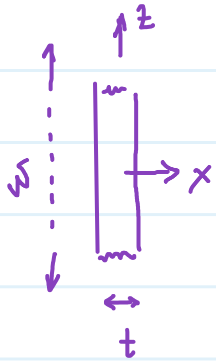
$$2b^2 = a^2 \Rightarrow b = a/\sqrt{2}$$

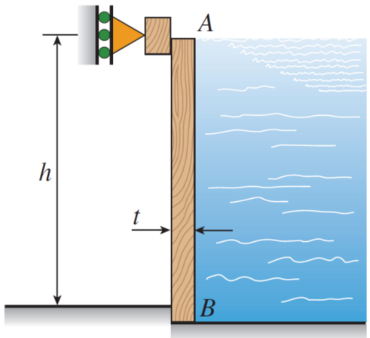
$$\Rightarrow \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} = \frac{M_x a}{I_x\sqrt{2}}\cdot\frac{I_x\, 2}{M_x a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,4142 \Rightarrow 41,42\%\text{-kal nő!}$$

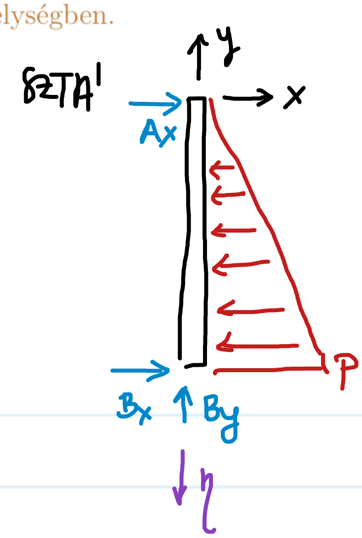
Példa 1.14

1.14. Példa. Egy fából készült vízzáró gát egyszerű modelljét szemlélteti az alábbi ábra. A gát falvastagsága $t = 12$ cm, magassága $h = 2$ m. Határozzuk meg, hogy mekkora a hajlításból adódó maximális normálfeszültség a gátban és adjuk meg a helyét! A gát B megtámasztását csuklós támasszal modelezzük!

Megoldás: $\sigma_{max} = 2,1$ MPa $1,1547$ m mélységben.







EE

$x: \quad A_x + B_x - p\frac{h}{2} = 0 \quad (1)$

$y: \quad B_y = 0 \quad (2)$

$z: \quad p\frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} - A_x h = 0 \quad (3)$

$(3) \quad A_x = p\frac{h}{6}$

$$V(\eta) = A_x - \frac{p\eta}{h}\frac{\eta}{2} = p\frac{h}{6} - \frac{p\eta^2}{2h} = \frac{p}{2}\left[\frac{h}{3} - \frac{\eta^2}{h}\right]$$

szélsőérték: $\eta_{fz}^2 = \frac{h^2}{3} \Rightarrow \eta_{fz} = h/\sqrt{3} = 1,1547\,m$

$$M_h(\eta) = A_x \cdot \eta - \frac{p\eta}{h}\frac{\eta}{2}\frac{\eta}{3} = p\frac{h}{6}\eta - \frac{p\eta^3}{6h} = \frac{p\eta}{6}\left[-\frac{\eta^2}{h} + h\right] \quad \left(= \int V(\eta)\,d\eta\right)$$

$$M_{h\,max} = \frac{p\,h}{6\sqrt{3}}\left[h - \frac{h}{3}\right] = \frac{p\,h^2}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{p\,h^2}{9\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\sigma_{max}} = \frac{M_{h\,max}}{I_z}\frac{t}{2} = \frac{\rho_{víz} \cdot h \cdot w \cdot g \cdot h^2}{9\sqrt{3}\,t^3 w}\,6t = \frac{\rho_{víz}\, g\, h^3 \cdot 2}{3\sqrt{3}\,t^2} = \boxed{2,098\,MPa}$$

$$I_z = \frac{t^3 w}{12} \quad ; \quad p = \rho_{víz} \cdot h \cdot w \cdot g$$

$$[kg/m^3] \cdot [m] \cdot [m]\,[N/kg] \rightarrow [N/m]$$

$(\rho_{víz} = 1000\,kg/m^3)$