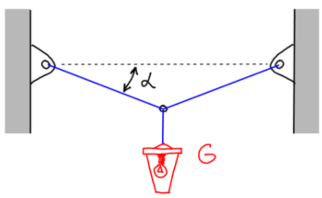
Példa 1.1 (Normál igénybevétel)

1. Rudak, gerendák feszültségi állapota

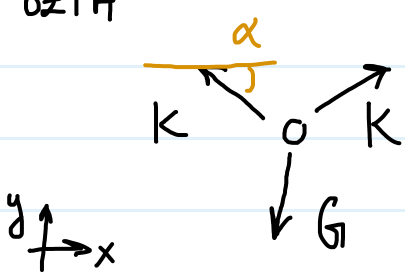
1.1. Normál igénybevétel

1.1. Példa. Egy $G = 700$ N súlyú lámpatestet szeretnék felfüggeszteni a merevnek tekintett falak közé egy $\emptyset d = 3$ mm átmérőjű acélhuzallal, melyre húzás esetén a megengedett feszültség $\sigma_{\text{meg}} = 285$ MPa. Határozzuk meg, hogy mekkora lehet minimálisan a huzal vízszintessel bezárt szöge annak érdekében, hogy a huzalban ébredő normálfeszültség a megengedett érték alatt maradjon.

Megoldás: $\alpha_{\text{meg}} = 10°$.

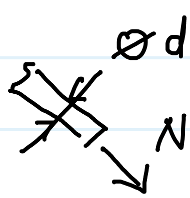


SZTÁ



$$y: \quad 2K \sin\alpha - G = 0$$

$$N = K$$



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$A = \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$N = \frac{G}{2 \sin\alpha} \Rightarrow \alpha \downarrow \quad N \uparrow \quad \sigma \uparrow$$

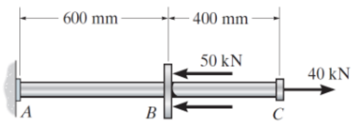
$$\sigma_{meg} = \frac{2G}{d^2 \pi \sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2G}{\sigma_{meg} d^2 \pi}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2G}{\sigma_{meg} d^2 \pi}\right) = 10°$$

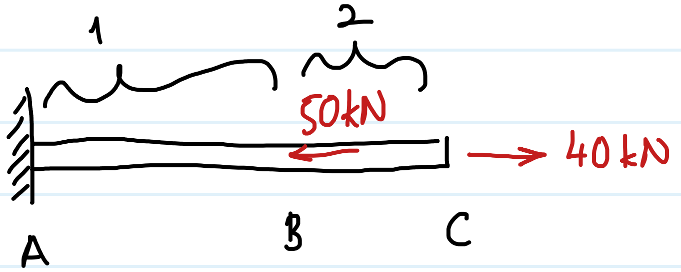
Példa 1.2

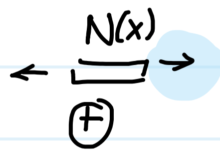
1.2. Példa. Egy 20 mm átmérőjű acél rudat az ábra szerinti 50 kN nagyságú erő terheli körkörösen a B keresztmetszetben, valamint a 40 kN nagyságú erő a C keresztmetszetben. Az acél rugalmassági modulusza 200 GPa. Feladatok: a) Rajzoljuk fel a normál igénybevételi ábrát. b) Számítsuk ki a végkeresztmetszet elmozdulását. c) Határozzuk meg az egyes szakaszokon ébredő feszültségeket.

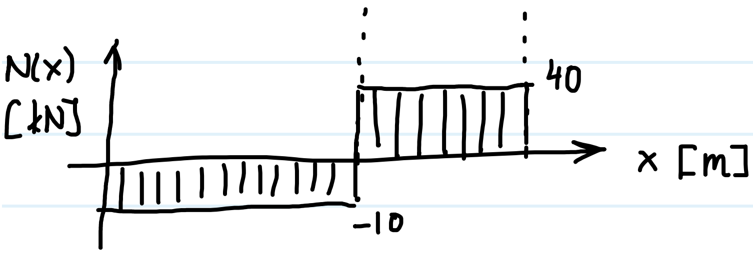
Megoldás: $\Delta L_C = 0,159$ mm; $\sigma_{AB} = -31,83$ MPa, $\sigma_{BC} = 127,324$ MPa.



a)







b)

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A}$$

$$\sigma(x) = E\,\varepsilon(x)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\frac{\Delta l}{l} E = \frac{N}{A} \Rightarrow \Delta l = \frac{Nl}{AE}$$

$$B:\quad \Delta l^{B} = \frac{-10\,000 \cdot 0,6}{\frac{0,02^2}{4}\pi \cdot 200 \cdot 10^9}$$

$$\Delta l^{B} = -0,0955 \text{ mm}$$

$$BC:\quad \Delta l^{BC} = \frac{40000 \cdot 0,4}{\frac{0,02^2\pi}{4} \cdot 200 \cdot 10^9}$$

$$\Delta l^{BC} = 0,2546 \text{ mm}$$

$$\Delta l^{C} = \Delta l^{B} + \Delta l^{BC} = 0,1591 \text{ mm}$$

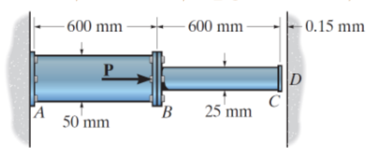
c)

$$\sigma^1 = \frac{-10\,000}{\frac{0{,}02^2\,\pi}{4}}\ \text{Pa} = -31{,}83\ \text{MPa}$$

$$\sigma^2 = \frac{40000}{\frac{0{,}02^2\,\pi}{4}}\ \text{Pa} = 127{,}32\ \text{MPa}$$

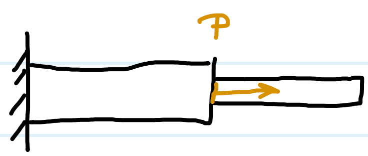
Példa 1.3

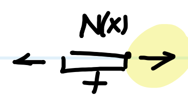
1.3. Példa. A C végkeresztmetszet és a fal közötti hézag 0,15 mm az alábbi feladatnál látható hengeres tömör rudakból álló szerkezetnél a terheletlen állapotban. A terhelés nagysága $P = 300$ kN. Határozzuk meg a falakban ébredő reakcióerőket a terhelés alkalmazásakor. Mekkora az egyes részek hosszváltozása és bennük ébredő feszültség? Az anyag rugalmassági modulusza 70 GPa.
Megoldás: $F_A = -246,872$ kN, $F_D = -53,128$ kN; $\Delta L_{AB} = 1,078$ mm, $\Delta L_{BC} = -0,928$ mm; $\sigma_{AB} = 125,73$ MPa, $\sigma_{BC} = -108,23$ MPa.



Hozzáér a falhoz?

Tfh nem:





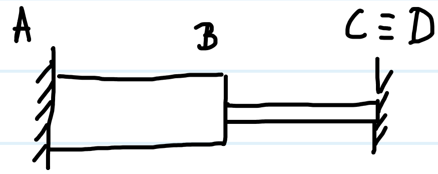
$$\Delta \ell = \frac{300\,000 \quad 0{,}6}{\frac{0{,}05^2\,\pi}{4} \quad 70\cdot 10^9} \left(= \frac{NL}{AE}\right)$$

$$\Delta \ell = 1{,}3\ \text{mm} > \delta = 0{,}15\ \text{mm}$$

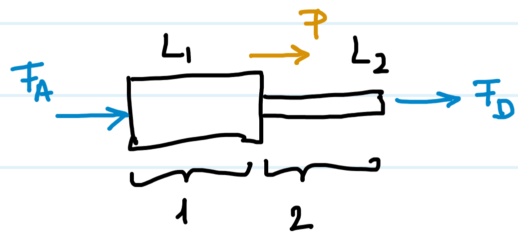
$\Rightarrow$ hozzáér a falhoz!

Túlhatározott, DE rugalmas testként kezelve megoldható!

$\Delta \ell^{C} = \delta$



SZTA'



$N^{1} = -F_A \qquad N^{2} = -F_A - P \left(= F_D\right)$

$$\Delta \ell^{B} = \frac{N^{1} \cdot L_1}{A_1 E}$$

$$\Delta \ell^{BC} = \frac{N^{2} L_2}{A_2 E}$$

$$\Delta \ell^{C} = \delta = \Delta \ell^{B} + \Delta \ell^{BC} = \frac{-F_A L_1}{A_1 E} - \frac{(F_A + P) L_2}{A_2 E}$$

$$\delta A_1 A_2 E = -F_A \left(L_1 A_2 + L_2 A_1\right) - P L_2 A_1$$

$$F_A = -\frac{\delta A_1 A_2 E + P L_2 A_1}{L_1 A_2 + L_2 A_1} = -246{,}87 \text{ kN}$$

$$F_D = -F_A - P = -53{,}13 \text{ kN}$$

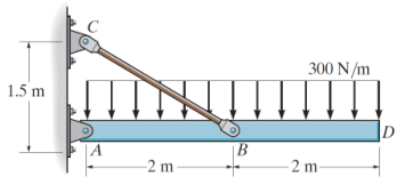
b) $\Delta \ell^{B} = \dfrac{-F_A L_1}{A_1 E} = 1{,}078 \text{ mm} \qquad \Delta \ell^{BC} = \delta - \Delta \ell^{B} = -0{,}928 \text{ mm}$

$$\sigma^{1} = \frac{N_1}{A_1} = 125{,}73 \text{ MPa} \qquad \sigma^{2} = \frac{N_2}{A_2} = -108{,}231 \text{ MPa}$$

Példa 1.4

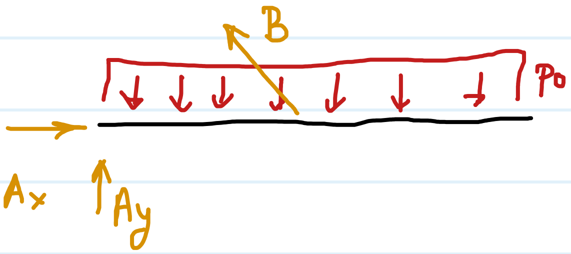
1.4. Példa. A merev ABD egyenes merev rúd megtámasztása az ábra szerinti. A rugalmas CB rúd keresztmetszetének területe 150 mm^2, anyagának rugalmassági modulusza 100 GPa. A merev rúd terhelése az egyenletesen megoszló erőrendszer. Határozzuk meg a D keresztmetszet függőleges elmozdulását!

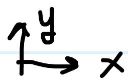
Megoldás: $f_D = 1,1$ mm.



statika

SZTA'





L = 2m

B = N

CB statikai rúd
↳ rúdirányú erő!

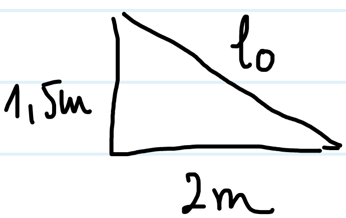
EE

$$x: \; A_x - B_x = 0 \qquad (1)$$

$$y: \; -p_0 2L + A_y + B_y = 0 \qquad (2)$$

G

$$z: \; B_y L - p_0 2L^2 = 0 \qquad (3)$$



$$l_0 = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ m}$$

$$\frac{B_x}{B_y} = \frac{2}{1,5} \qquad (4)$$

$$(3):\quad B_y = 2 p_0 L = 1{,}2\,kN$$

$$(4):\quad B_x = 1{,}6\,kN$$

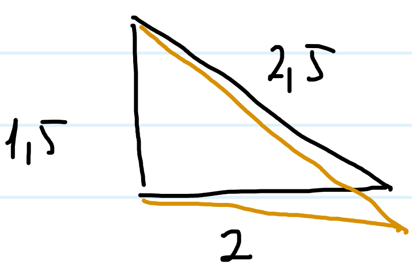
$$\left.\begin{matrix} B_y \\ B_x \end{matrix}\right\}\; B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 2\,kN$$

sziltan

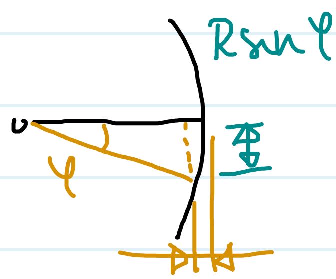
$$\sigma = \frac{B}{A} = 13{,}33\,MPa$$

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = 1{,}33\cdot 10^{-4}$$

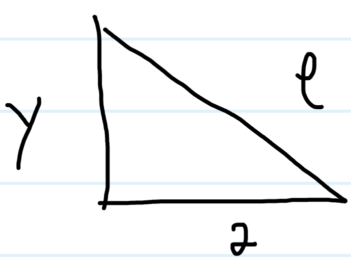
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow \Delta l = \varepsilon \cdot l_0 = 0{,}333\,mm$$



Közelítünk tisztán vertikális elmozdulással $\sim \varphi$



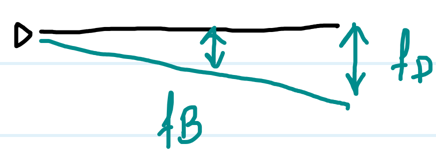
$$R - R\underbrace{\cos\varphi}_{\sim 1} = 0$$



$$Y = \sqrt{l^2 - 2^2} = 1{,}500555\,m$$

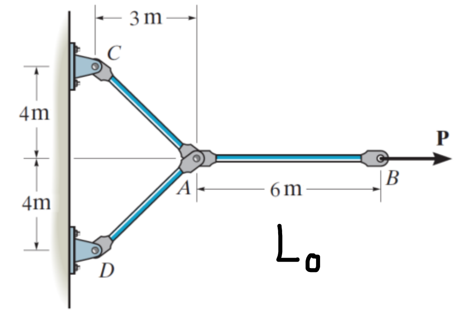
$$f_B = Y - 1{,}5 = 0{,}555\,mm$$

$$f_D = 2 f_B = 1{,}1\,mm$$

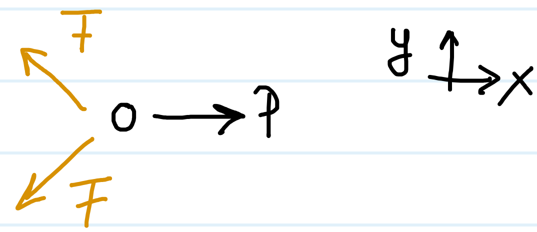


Példa 1.5

1.5. Példa. Az ábrán látható rudak átmérője 30 mm, anyaguknak rugalmassági modulusza 200 GPa. Mekkora legyen a végpont P terhelése, hogy a B pont elmozdulása 5 mm legyen?
Megoldás: $P = 54,616$ kN.



SZTA'

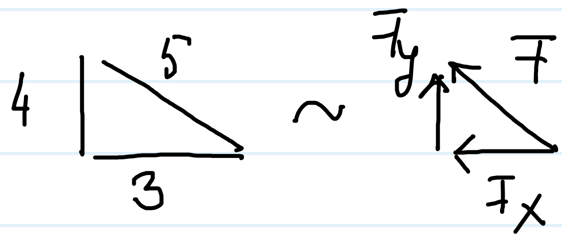


statika

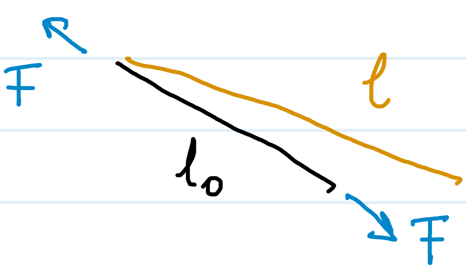
$$x:\quad P - 2F_x = 0$$

$$F_x = F\,\frac{3}{5}$$

$$P = \frac{6}{5}F$$



szltan



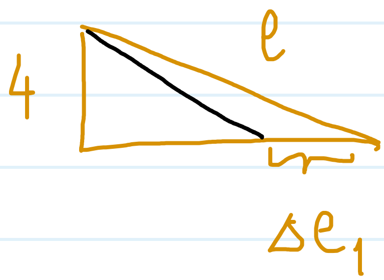
$$\ell_0 = 5\,m$$

$$\sigma_{CA} = \frac{N_{CA}}{A}$$

$$N_{CA} = F = \frac{5}{6}P$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4}$$

$$\sigma_{CA} = \frac{5P}{6A} = E\,\varepsilon_{CA} = E\,\frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$



$$\Delta \ell_1 = \sqrt{\ell^2 - 4^2} - 3$$

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A} = E\,\varepsilon_{AB} = E\,\frac{\Delta \ell_2}{L_0}$$

$$N_{AB} = P$$

$$\Delta \ell_B = \Delta \ell_2 + \Delta \ell_1$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{P L_0}{AE}$$

$$\ell = \frac{5 P \ell_0}{6AE} + \ell_0 = \ell_0\left(\frac{5P}{6AE} + 1\right)$$

$$\Delta \ell_1 = \sqrt{\ell_0^2\left(\frac{5P}{6AE} + 1\right)^2 - 4^2} - 3$$

$$\Delta \ell_B = \frac{P L_0}{AE} + \sqrt{\ell_0^2\left(\frac{5P}{6AE} + 1\right)^2 - 4^2} - 3 = 0{,}005$$

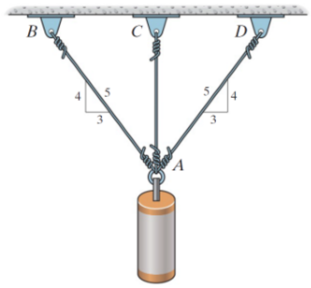
$$L_0 = 6\,m$$

$$P = 54{,}616\ kN$$

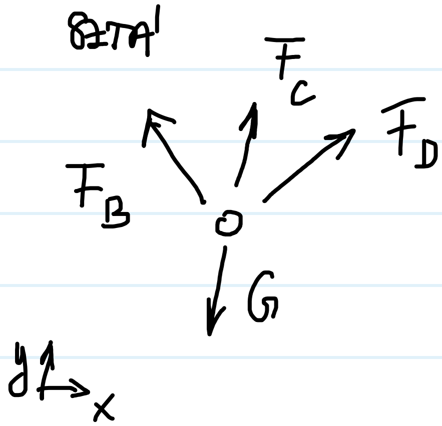
Példa 1.6

1.6. Példa. Az ábrán látható $G = 130$ N súlyú terhet 3 azonos anyagú horgászzsinórral függesztettünk fel, melyek rugalmassági modulusza 2 GPa. A zsinórhosszak ismertek: $L_{AB} = L_{AD} = 2$ m, $L_{AC} = 1,6$ m. Az AB és AD zsinórok átmérője azonos, $\emptyset d_{AB} = \emptyset d_{AD} = 2$ mm. Mekkora legyen az AC zsinór átmérője, ha azt szeretnénk, hogy mindegyik zsinórban ugyanakkora normál igénybevétel ébredjen?

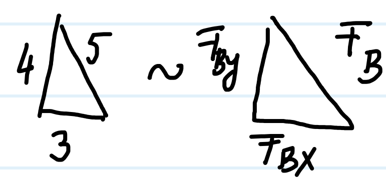
Megoldás: $\emptyset d_{AC} = 1,602$ mm.



Statika



$F_B = F_D$



EE

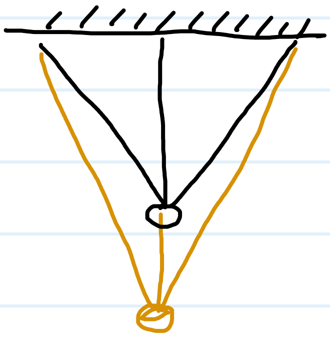
y: $F_C - G + 2F_{By} = 0$

$F_{By} = F_B \, 4/5$

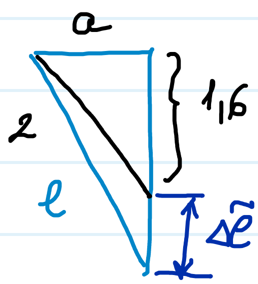
$F_c - G + \frac{8}{5} F_B = 0$

$N_B = N_D = F_B$ $\qquad N_c = F_c = F_B$

Tehát: $\frac{13}{5} F_c = G \Rightarrow F_c = \frac{5}{13} G = 50 N$



$$\sigma_c = \frac{N_c}{A_c} = \frac{\Delta \ell_c}{\ell_c} E$$



$$a = \sqrt{2^2 - 1{,}6^2} = 1{,}44\,m$$

$$\Delta\tilde{\ell} = \sqrt{\ell^2 + a^2} - 1{,}6 = \Delta \ell_c$$

$$\sigma_B = \frac{N_B}{A_B} = \frac{N_B\,4}{d_B^2\,\pi} \left(= 15{,}92\,MPa\right) \qquad \sigma_B = \frac{\Delta \ell_B}{\ell_B} E$$

$$\Delta \ell_B = \frac{N_B}{A_B}\,\frac{\ell_B}{E} = \ell - \ell_B \Rightarrow \ell = \ell_B \left[\frac{N_B}{A_B\,E} + 1 \right] \left(= 2{,}016\,m\right)$$

$$\Delta\tilde{\ell} = 0{,}01985\,m = \Delta \ell_c$$

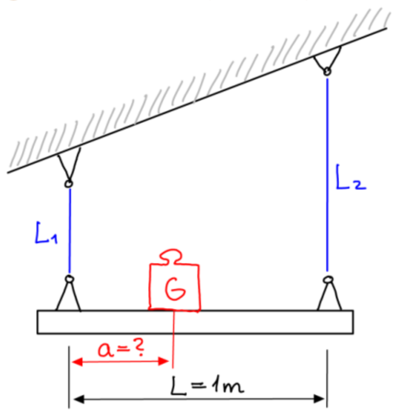
$$A_c = \frac{N_c}{E}\,\frac{\ell_c}{\Delta \ell_c} = 496\,260\,m^2 \qquad A_c = \frac{d_c^2\,\pi}{4}$$

$$d_c = 1{,}602\,mm$$

Példa 1.7

1.7. Példa. A vízszintes, merevnek tekintett rudat két huzal tartja egyensúlyban. A rúd terhelése a rajta elhelyezett $G = 5000$ N súlyú teher. A bal oldali huzal anyaga acél, rugalmassági modulusza $E_1 = 200$ GPa. A jobb oldali huzal alumíniumból készült, rugalmassági modulusza $E_2 = 70$ GPa. A huzalok keresztmetszetei és hosszaik az alábbiak: $A_1 = 120$ mm^2, $A_2 = 240$ mm^2, $L_1 = 15$ m, $L_2 = 25$ m. Hol helyezkedjen el a G teher, ha azt szeretnénk, hogy a merev rúd a terhelés hatására vízszintes maradjon? Mekkora feszültségek ébrednek ekkor a huzalokban?

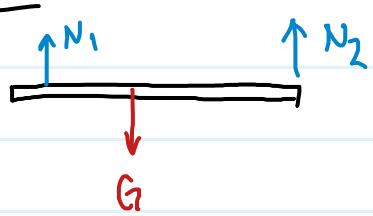
Megoldás: $a = 295,77$ mm, $\sigma_1 = 29,34$ MPa, $\sigma_2 = 6,16$ MPa.



$$\Delta L_1 = \Delta L_2$$

$$\Delta L_1 = \frac{N_1}{A_1}\frac{L_1}{E_1} = \frac{N_2}{A_2}\frac{L_2}{E_2} = \Delta L_2$$

SZTÁ



EE

$y.\quad N_1 + N_2 - G = 0$

$z.\quad N_2 L - G a = 0 \Rightarrow N_2 = G\frac{a}{L}$

$N_1 = G\left(1 - \frac{a}{L}\right)$

$$\frac{L_1\left(1-\frac{a}{L}\right)}{A_1 E_1} = \frac{a}{L}\,\frac{L_2}{A_2 E_2} \Rightarrow a = 295,78\,\text{mm}$$

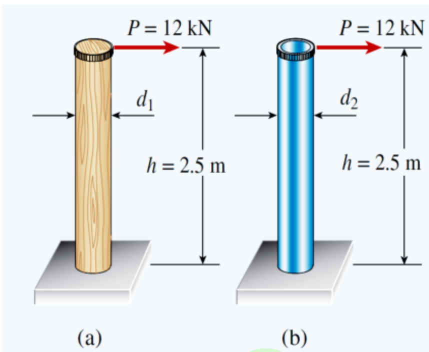
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 29,34\ \text{MPa} \qquad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 6,16\ \text{MPa}$$

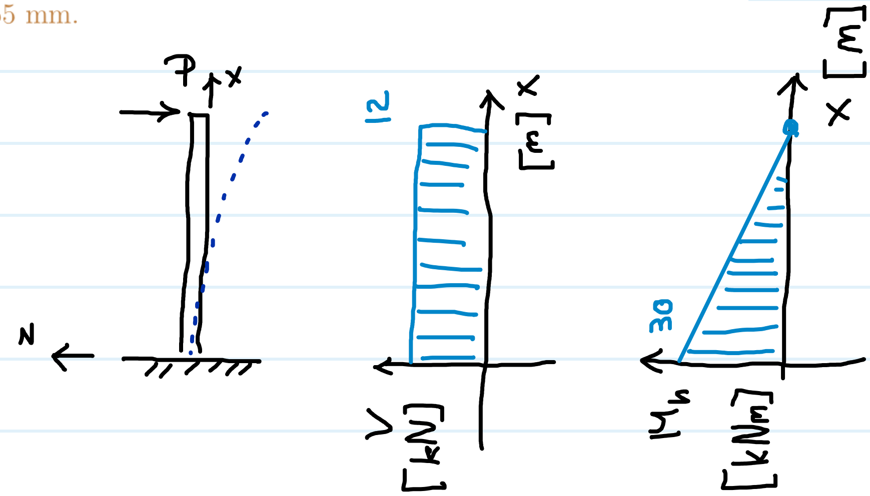
Példa 1.8 (Hajlító igénybevétel)

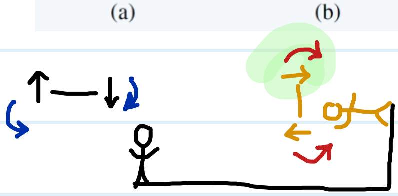
1.2. Hajlító igénybevétel

1.8. Példa. Egy függőleges oszlop terhelése a felső végén működő koncentrált erő az ábrán látható módon. Célunk meghatározni az oszlop anyagát és keresztmetszetét az alábbi módon: a) Tömör kör keresztmetszetű fából kívánjuk elkészíteni b) Alumínium csőből gyártjuk le úgy, hogy a cső falvastagsága a külső átmérő nyolcada. A fára és az alumíniumra megengedhető feszültségek: $\sigma_{\text{meg,fa}} = 15$ MPa, $\sigma_{\text{meg,alu}} = 50$ MPa. Határozzuk meg a szükséges méreteket!

Megoldás: $d_1 = 273,1$ mm, $d_2 = 207,55$ mm.







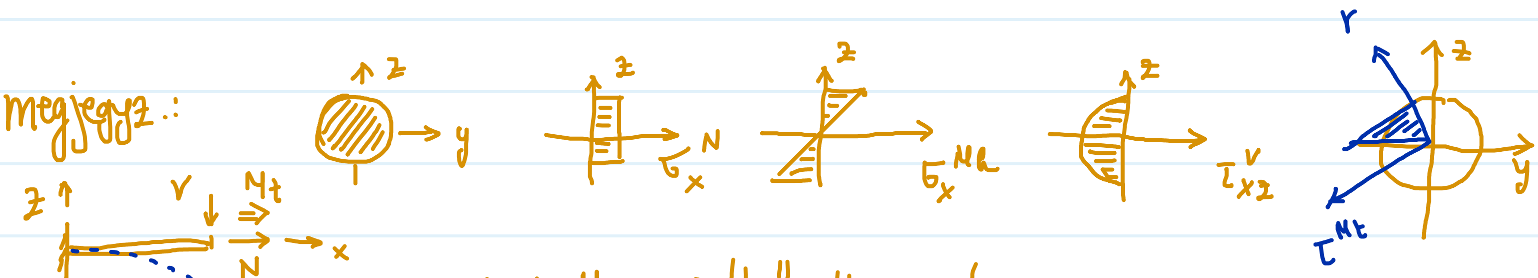
$T = 12 \cdot h = 30$ $\quad \hookrightarrow -\int V(x)dx$

Veszélyes KM: $x_{krit} = 0$ m

általában

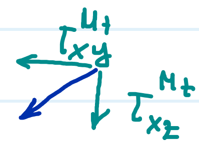
$V \rightarrow \tau_V << \sigma_{Mh} \leftarrow M_h$

megjegyz.:

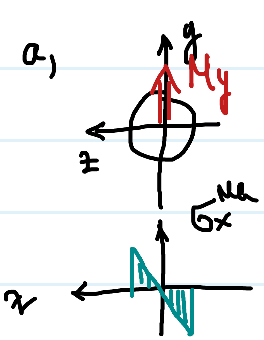


$N, M_h, M_t \rightarrow$ szélső szál veszélyes

$V \rightarrow$ súlyponti szál veszélyes



a)

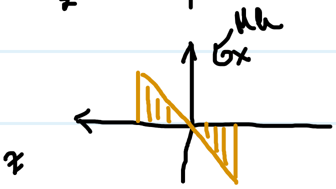


$$\sigma_{max}^{Mh} = \frac{M_{h,max}}{I_{y,fa}} \frac{d_{fa}}{2} \leq \sigma_{meg,fa}$$

$$I_{y,fa} = \frac{d_{fa}^4 \pi}{64}$$

$$\sigma_{meg,fa} = \frac{M_h(x_{knt})}{d_{fa}^3\,\pi}\cdot 32 \Rightarrow d_{fa} = \sqrt[3]{\frac{M_h(x_{knt})\cdot 32}{\sigma_{meg,fa}\,\pi}} = 273{,}11\,mm$$

b_1



$$I_{y,alu} = \frac{d_{alu}^4\,\pi}{64} - \frac{81\,d_{alu}^4\,\pi}{16384} = d_{alu}^4\,\pi\,\frac{175}{16384}$$

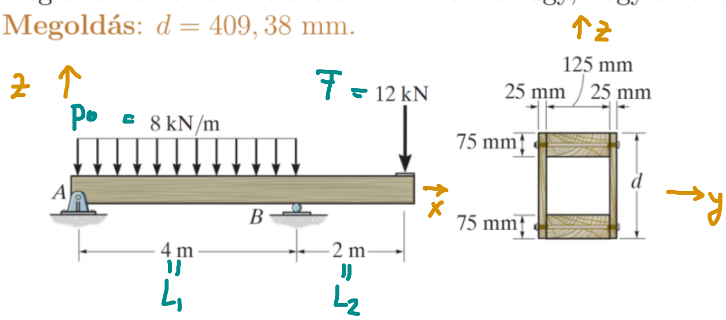
$s = \frac{d_{alu}}{8}$ ← feladat $\qquad d_{belső} = d_{alu} - \frac{d_{alu}}{4} = \frac{3d_{alu}}{4}$

$$\sigma_{meg,alu} = \frac{M_h(x_{knt})}{I_{y,alu}}\,\frac{d_{alu}}{2} = \frac{M_h(x_{knt})\cdot 8192}{d_{alu}^3\,\pi\,175}$$

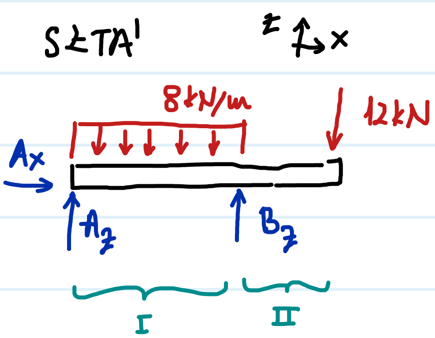
$$d_{alu} = \sqrt[3]{\frac{8192\cdot M_h(knt)}{175\,\pi\,\sigma_{meg,alu}}} = 207{,}55\,mm$$

Példa 1.9

1.9. Példa. A megengedhető legnagyobb normálfeszültség 6 MPa az alábbi tartónál. Határozzuk meg a tartó keresztmetszetének d méretét úgy, hogy a tartó hajlításra megfeleljen.
Megoldás: $d = 409,38$ mm.



SZTA



EE

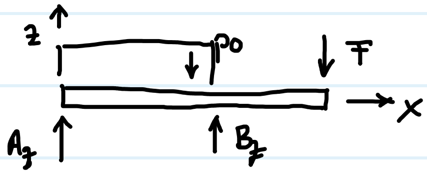
x: $A_x = 0$ (1)

z: $A_z + B_z - F - p_0\cdot L_1 = 0$ (2)

y: $B_z L_1 - F(L_1 + L_2) - p_0 L_1 \frac{L_1}{2} = 0$ (3)

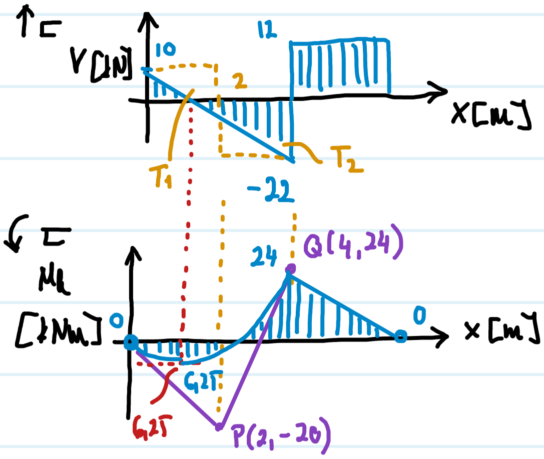
(3) $B_z = 34$ kN $\qquad$ (2) $A_z = 10$ kN

I: $0 < x < 4\,m$ II: $4\,m < x < 6\,m$



$x_{krit} = 4\,m$

$M_h(x_{krit}) = 24\,kNm$



$T_1 = 10 \cdot 2 = 20$

$T_2 = -22 \cdot 2 = 44$

$V(x_{sz}) = 0$

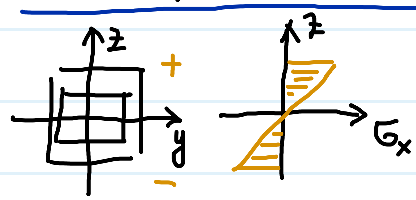
$V_I(x_{sz}) = 10 - 8x_{sz} = 0$

$x_{sz} = 1{,}25\,m$

$M_{h\,sz} = 0 - \frac{1{,}25 \cdot 10}{2} = 6{,}25\,kNm$

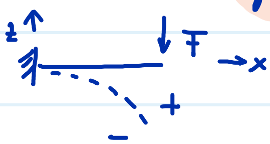
$P = 0 - T_1 = -20$

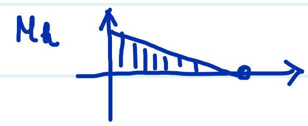
$Q = -20 - T_2 = 24$



előjel eldöntése egyszerű feladat segítségével

analógia:





ha

$\Rightarrow M_h \oplus \Rightarrow z+ \longrightarrow \sigma_x \oplus$

$z- \longrightarrow \sigma_x \ominus$

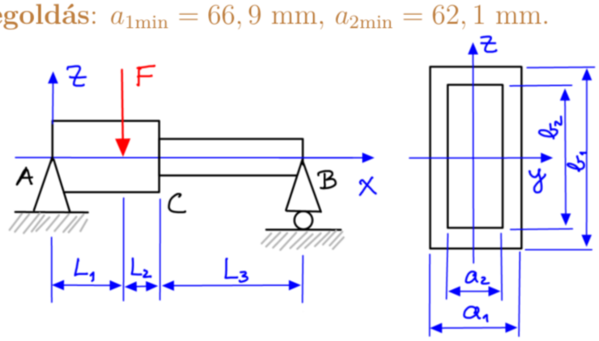
$$\sigma_{meg} = \frac{M_h(x_{krit})}{I_y}\,\frac{d}{2}$$

$$I_y = \frac{(125 + 2 \cdot 25)\,d^3}{12} - \frac{125\,(d - 2 \cdot 75)^3}{12}$$

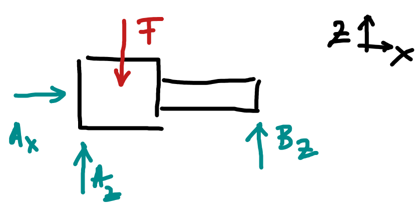
$\Rightarrow d =$
- $-1547{,}69\,mm$ ↯
- $13{,}32\,mm$ ↯ ($< 75\,mm$)
- $409{,}38\,mm$ ✓

Példa 1.10

1.10. Példa. Határozzuk meg az alábbi tartó AC és CB részein a keresztmetszet méreteit úgy, hogy a $b_2/a_2 = b_1/a_1 = 2$ feltétel mellett hajlításra megfeleljen a tartó! Adatok: $L_1 = 2$ m, $L_2 = 1$ m, $L_3 = 4$ m, $F = 14$ kN, $\sigma_{meg} = 100$ MPa.
Megoldás: $a_{1min} = 66,9$ mm, $a_{2min} = 62,1$ mm.



SZTA'



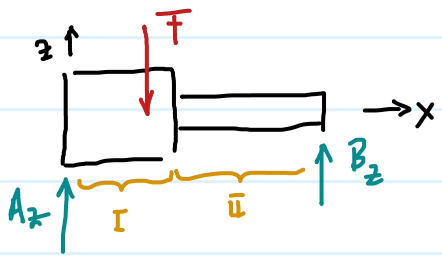
EE

x: $A_x = 0$

z: $A_z - F + B_z = 0$

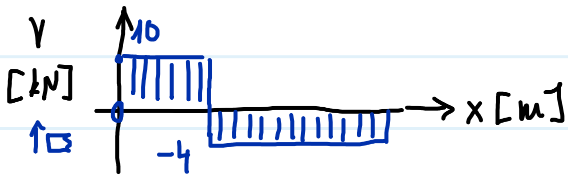
y: $B_z(L_1 + L_2 + L_3) - F L_1 = 0$

$B_z = 4\,kN \qquad A_z = F - B_z = 10\,kN$

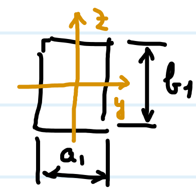


$x^{I}_{krit} = L_1$

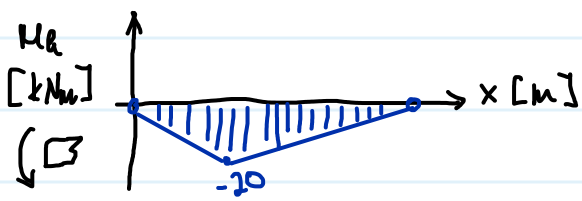
$x^{II}_{krit} = L_1 + L_2$



$$\mathrm{I}: \quad \sigma_{meg} = \frac{M_h(x^{I}_{krit})}{I^1_y} \cdot \frac{b_1}{2}$$



$$I^1_y = \frac{b_1^3 a_1}{12}$$



$$\sigma_{meg} = \frac{M_h(x^{I}_{krit})}{b_1^2\, a_1} \cdot 6$$

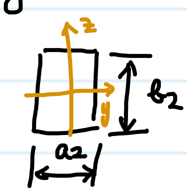
$b_1 = 2a_1$

(feladat szerint)

$$\sigma_{meg} = \frac{M_h(x^{I}_{krit})}{2\, a_1^3} \cdot 3$$

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{M_h(x^{I}_{krit}) \cdot 3}{2\,\sigma_{meg}}} = 66{,}94\,mm$$

$$\mathrm{II}: \quad \sigma_{meg} = \frac{M_h(x^{II}_{krit})}{I^2_y} \cdot \frac{b_2}{2}$$



$$I^2_y = \frac{b_2^3 a_2}{12}$$

$b_2 = a_2 \cdot 2$

(feladat szerint)

$$\sigma_{meg} = \frac{M_h(x^{II}_{krit})}{b_2^2\, a_2} \cdot 6 = \frac{M_h(x^{II}_{krit})}{2\,a_2^3} \cdot 3 \Rightarrow a_2 = \sqrt[3]{\frac{M_h(x^{II}_{krit})}{\sigma_{meg} \cdot 2} \cdot 3} = 62{,}14\,mm$$

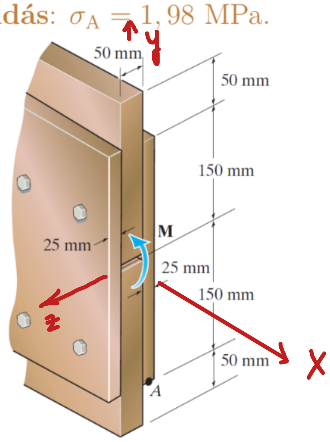
$L_1 < x < L_1 + L_2 + L_3 \; : \; M_h(x) = -A_z \cdot x + F(x - L_1)$

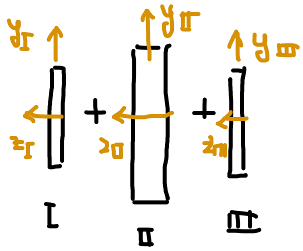
$$M_h(x^{II}_{krit}) = -A_z(L_1 + L_2) + F L_2 = -16\,kNm$$

Példa 1.11

1.11. Példa. Az alábbi keresztmetszet terhelése az $M = 5$ kNm hajlítónyomatéki igénybevétel az ábrán látható módon. Határozzuk meg az A pontban ébredő normálfeszültség nagyságát!

Megoldás: $\sigma_A = 1,98$ MPa.



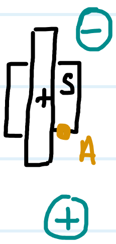


$$I_{z_I} = I_{z_{III}} = \frac{25 \cdot 300^3}{12}$$

$$I_{z_{II}} = \frac{50 \cdot 400^3}{12}$$

$$I_z = 2 I_{z_I} + I_{z_{II}} = 37\,916,67 \text{ cm}^4$$

(z tengelyek fedik egymást ⇒ nincs Steiner tag)

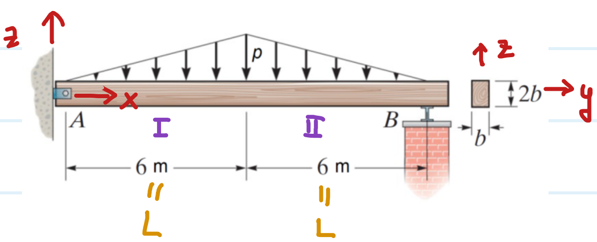


$$\sigma_A = \frac{M}{I_z} \cdot 15 = 1,98 \text{ MPa}$$

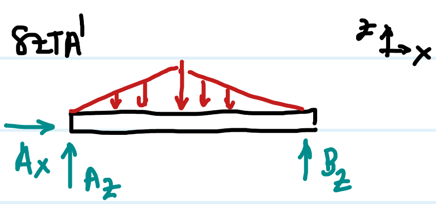
Példa 1.12

1.12. Példa. Mekkora lehet a megoszló terhelés p intenzitása (a tartó közepén), ha az anyagra megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 50$ MPa? A tartó mérete ismert: $b = 10$ cm.

Megoldás: $p = 2,778$ kN/m.



SZTA



EE

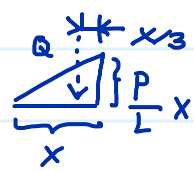
$x: \; A_x = 0 \quad (1)$

$z: \; A_z + B_z - pL = 0 \quad (2)$

$y: \; B_z 2L - pL^2 = 0 \quad (3)$

(3) $B_z = p\frac{L}{2}$ (2) $A_z = p\frac{L}{2}$ ✓ (szimmetrikus)

I: $0 < x < L$



$$M_{h_I}(x) = -A_z x + \frac{px}{L} \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} =$$

$$= -p\frac{L}{2}x + \frac{p}{L}\frac{x^3}{6} = \frac{px}{2}\left[\frac{x^2}{3L} - L\right]$$

elég az I. szakaszt vizsgálni szimmetria miatt!

szélsőérték: $V_I(x_{sz})=0$

$$V_I(x) = A_z - \frac{px}{L}\frac{x}{2} = p\frac{L}{2} - \frac{p}{L}\frac{x^2}{2} \quad \left(= -M_h'(x)\right)$$

$$\underbrace{V_I(x_{sz}) = \frac{p}{2}}_{\neq 0}\underbrace{\left[L - \frac{x^2}{L}\right]}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = L^2 \quad \Rightarrow \quad x = L = 6m$$

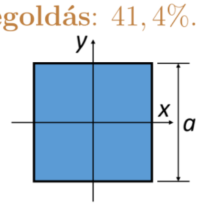
$$M_{h\,max} = M_{h_I}(L) = \frac{pL}{2}\left[\frac{L}{3} - L\right] = -\frac{pL}{2}\cdot\frac{2L}{3} = -\frac{pL^2}{3}$$

$$\sigma_{meg} = \frac{M_{h\,max}}{I_y}\cdot b = \frac{pL^2}{2b^3} \Rightarrow p = \frac{2b^3\sigma_{meg}}{L^2} = 2{,}778\ kN/m$$

$$I_y = \frac{b\cdot(2b)^3}{12} = \frac{2b^4}{3}$$

Példa 1.13

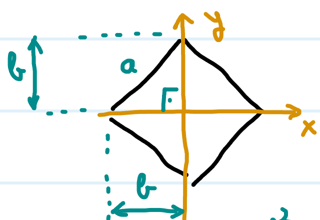
1.13. Példa. Tiszta hajlítással terhelt tartó keresztmetszete a oldalhosszúságú négyzet, a hajlítás tengelye az x-tengely. Hány százalékkal nő a maximális feszültség a keresztmetszetben, ha 45°-kal elforgatjuk a keresztmetszetet?
Megoldás: 41, 4%.



négyzet KM esetén minden irány főirány

$$I_x = \frac{a^4}{12} = I_{\tilde{x}}$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x}\frac{a}{2}$$



$$\tilde{\sigma} = \frac{M_{\tilde{x}}}{I_{\tilde{x}}}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{M_x}{I_x}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

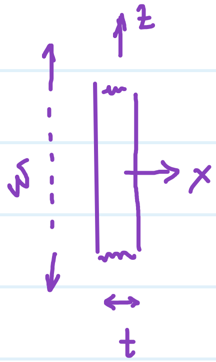
$$2b^2 = a^2 \Rightarrow b = a/\sqrt{2}$$

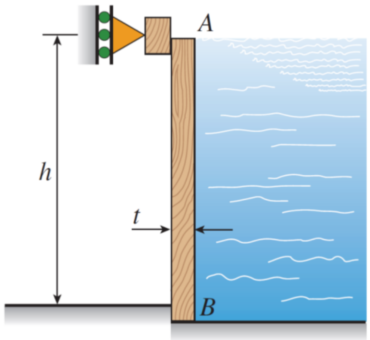
$$\Rightarrow \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} = \frac{M_x a}{I_x\sqrt{2}}\cdot\frac{I_x 2}{M_x a} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1{,}4142 \Rightarrow 41{,}42\%\text{-kal nő!}$$

Példa 1.14

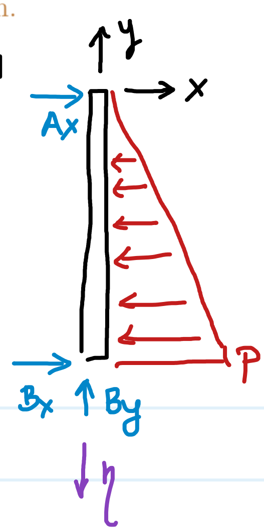
1.14. Példa. Egy fából készült vízzáró gát egyszerű modelljét szemlélteti az alábbi ábra. A gát falvastagsága $t = 12$ cm, magassága $h = 2$ m. Határozzuk meg, hogy mekkora a hajlításból adódó maximális normálfeszültség a gátban és adjuk meg a helyét! A gát B megtámasztását csuklós támasszal modelezzük!

Megoldás: $\sigma_{max} = 2,1$ MPa $1,1547$ m mélységben.





SZTA'



EE

x: $A_x + B_x - p\frac{h}{2} = 0$ (1)

y: $B_y = 0$ (2)

z: $p\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{3} - A_x h = 0$ (3)

(3) $A_x = p\frac{h}{6}$

$$V(\eta) = A_x - \frac{p\eta}{h}\frac{\eta}{2} = p\frac{h}{6} - \frac{p\eta^2}{2h} = \frac{p}{2}\left[\frac{h}{3} - \frac{\eta^2}{h}\right]$$

szélsőérték: $\eta_{Sz}^2 = \frac{h^2}{3} \Rightarrow \eta_{Sz} = h/\sqrt{3} = 1,1547\,m$

$$M_h(\eta) = A_x\cdot\eta - \frac{p\eta}{h}\frac{\eta}{2}\frac{\eta}{3} = p\frac{h}{6}\eta - \frac{p\eta^3}{6h} = \frac{p\eta}{6}\left[-\frac{\eta^2}{h} + h\right] \quad \left(= \int V(\eta)\,d\eta\right)$$

$$M_{h\,max} = \frac{p h}{6\sqrt{3}}\left[h - \frac{h}{3}\right] = \frac{p h^2}{6\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3} = \frac{p h^2}{9\sqrt{3}}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{h\,max}}{I_z}\frac{t}{2} = \frac{\rho_{víz}\cdot h\cdot w\cdot g\cdot h^2}{9\sqrt{3}\,t^3 w}\,6t = \frac{\rho_{víz}\,g\,h^3\cdot 2}{3\sqrt{3}\,t^2} = 2{,}098\,MPa$$

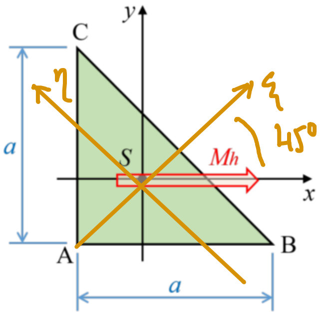
$I_z = \frac{t^3 w}{12}$; $p = \rho_{víz}\cdot h\cdot w\cdot g$

$[kg/m^3]\cdot[m]\cdot[m]\,[N/kg] \rightarrow [N/m]$

$(\rho_{víz} = 1000\,kg/m^3)$

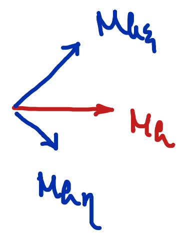
Példa 1.15.

1.15. Példa. Egy tartó keresztmetszetének terhelése tiszta hajlítás. Az $M_h = 3$ kNm nagyságú hajlítónyomatéki igénybevétel vektorának irányát és értelmét az alábbi ábra mutatja.
A derékszögű háromszög alakú keresztmetszet mérete ismert: $a = 9$ cm. Feladatok:
a) Határozzuk meg a keresztmetszet mentén a hajlításból adódó normálfeszültség eloszlását!
b) Mekkora n biztonsági tényezővel felel meg hajlításra a tartó ha $\sigma_{\text{meg}} = 150$ MPa?
c) Határozzuk meg a zérustengely x-tengellyel bezárt β szögét!
Megoldás: $n = 1,52$, $\beta = -26,57°$.



a) (C pont : y + és x − $\Rightarrow$ $I_{\xi\eta}$ negatív)

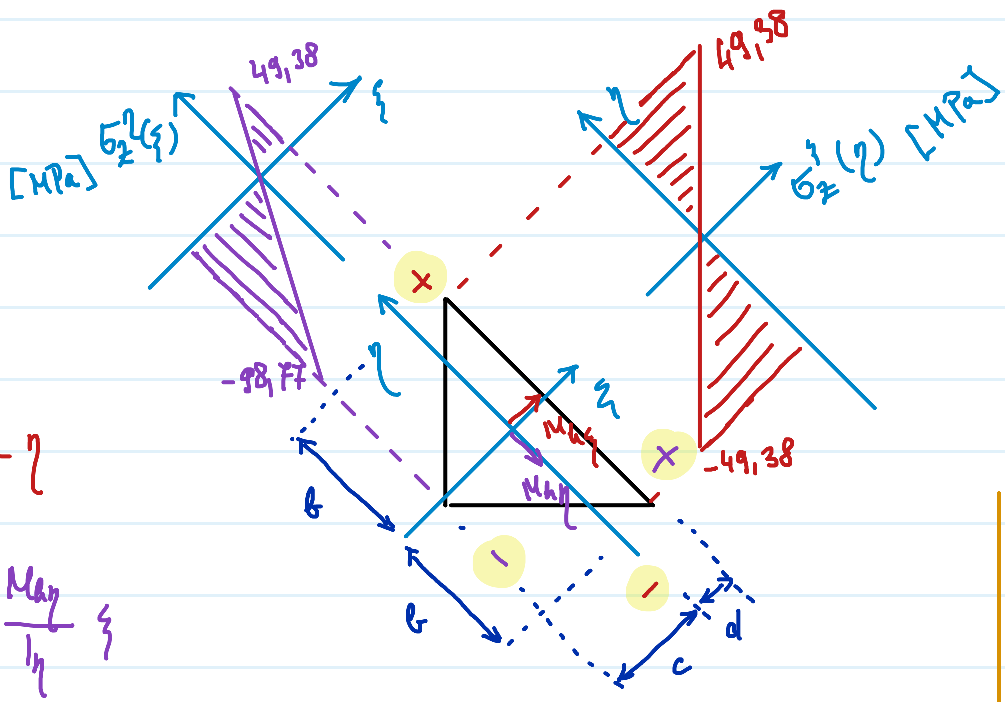
ξ : szimm tengely



$$M_{h\eta} = -M_h \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_{h\xi} = M_h \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I_\xi = \frac{a^4}{24} = 273,375 \text{ cm}^4 \qquad I_\eta = \frac{a^4}{72} = 91,125 \text{ cm}^4$$



$$\sigma_z^\xi(\eta) = \frac{M_{h\xi}}{I_\xi}\eta$$

$$\sigma_z^\eta(\xi) = -\frac{M_{h\eta}}{I_\eta}\xi$$

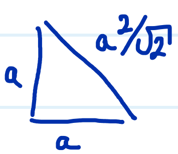
mert $M_{h\eta}$ negatív értékű → behelyettesítés után így lesz jó az előjel!

$\sigma_z^\xi(b) = 49,38$ MPa

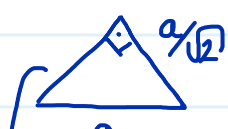
$\sigma_z^\xi(-b) = -49,38$ MPa

$\sigma_z^\eta(d) = 49,38$ MPa

$\sigma_z^\eta(-c) = -98,77$ MPa



$\Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$



$$\sqrt{a^2 - a^2/2} = a/\sqrt{2}$$

$2/3 - a : c = \frac{\sqrt{2}}{3}a$

$1/3 - a : d = \frac{1}{3\sqrt{2}}a$

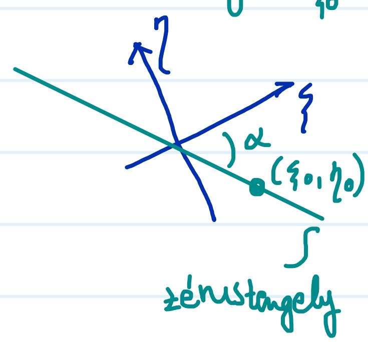
b, $\sigma_{max} = 98{,}77 \text{ MPa}$ $\qquad n = \dfrac{\sigma_{meg}}{\sigma_{max}} = 1{,}52$

c, $$\sigma_z(\xi,\eta) = \sigma_z^{\xi}(\eta) + \sigma_z^{\eta}(\xi) = \frac{M_{h\xi}}{I_\xi}\,\eta - \frac{M_{h\eta}}{I_\eta}\,\xi$$

$$\sigma_z \overset{?}{=} 0 \longrightarrow \sigma_z(\xi_0,\eta_0) = \frac{M_{h\xi}}{I_\xi}\,\eta_0 - \frac{M_{h\eta}}{I_\eta}\,\xi_0 = 0$$

$$\frac{M_{h\xi}}{I_\xi}\,\eta_0 = \frac{M_{h\eta}}{I_\eta}\,\xi_0$$

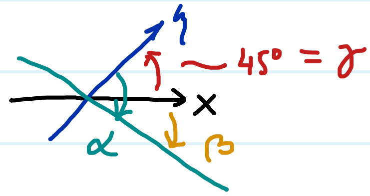
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta_0}{\xi_0}$$



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta_0}{\xi_0} = \frac{M_{h\eta}}{I_\eta}\,\frac{I_\xi}{M_{h\xi}} = -\frac{I_\xi}{I_\eta}$$

$$M_{h\eta} = -M_{h\xi}$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(-3) = -71{,}565^\circ$$

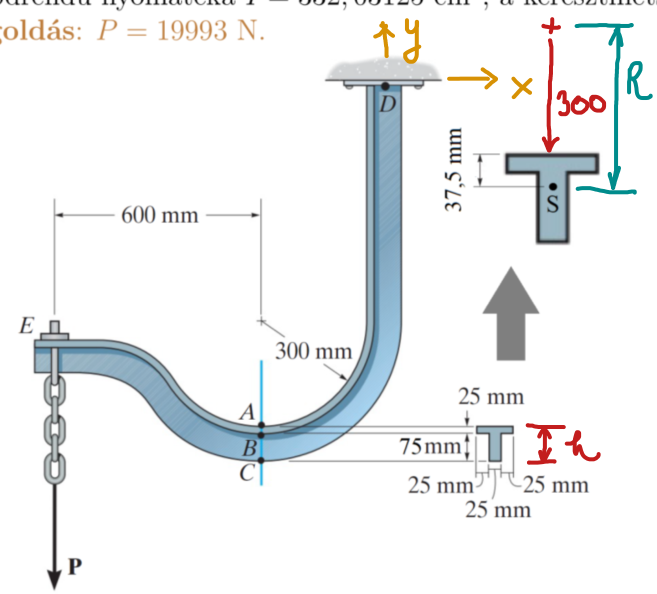


$$\alpha = \beta - \gamma \Rightarrow \beta = \alpha + \gamma = -26{,}57^\circ$$

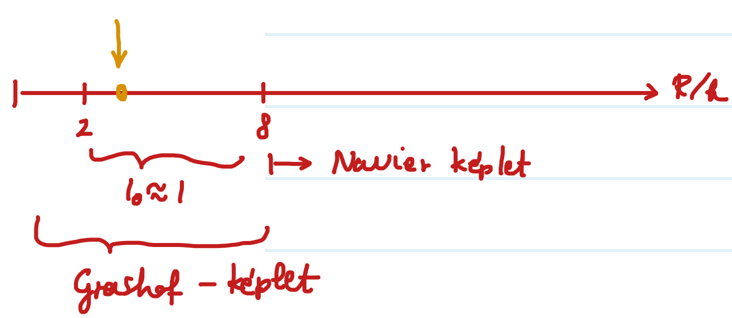
Példa 1.16

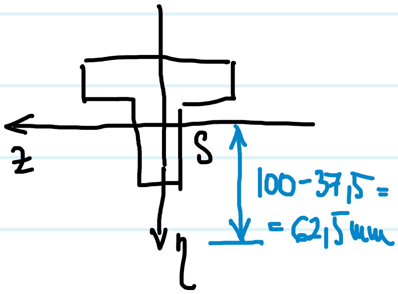
1.16. Példa. Mekkora lehet a P terhelés nagysága, ha az AC keresztmetszetben a hajlításból származó normálfeszültségre $\sigma_{meg} = 200$ MPa a megengedhető érték? A hajlítás tengelyére a keresztmetszet másodrendű nyomatéka $I = 332{,}03125$ cm^4, a keresztmetszet területe $A = 3750$ mm^2.

Megoldás: $P = 19993$ N.



$R/h = 3{,}375$





$$\sigma(\eta) = \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_z}\eta\frac{R}{R+\eta}$$

$$M_h = -P \cdot 600\,mm$$

M_h egyenesíti a rudat!

$$\sigma(-37{,}5) = 0{,}00715P_1 \qquad \sigma(62{,}5) = -0{,}01P_2$$

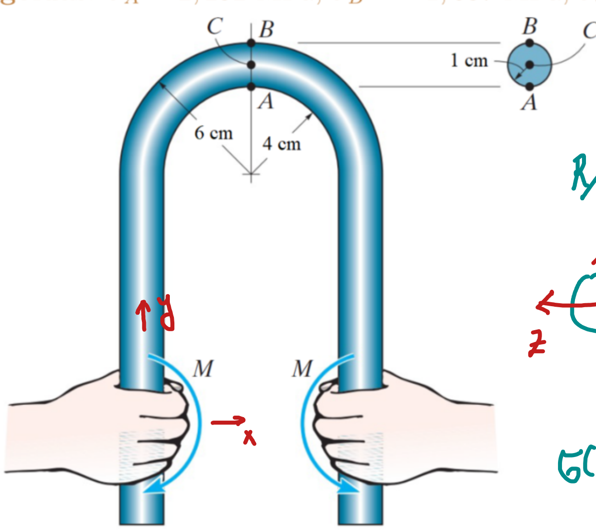
$P_1 > P_2 \Rightarrow$ max P_2 lehet!

$$P = \frac{\sigma_{meg}}{0{,}01} = 19{,}993\,kN$$

Példa 1.17

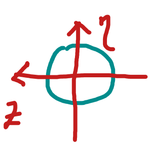
1.17. Példa. Az ábrán látható kör keresztmetszetű görbe rúd terhelése a 1, 5 Nm nyomaték mindkét megfogás helyén. Határozzuk meg a hajlításból adódó normálfeszültség eloszlását az A-C-B vonal mentén!

Megoldás: $\sigma_A = 2,292$ MPa, $\sigma_B = -1,687$ MPa, $\sigma_C = -0,095$ MPa.



$M_h = -1{,}5\,Nm$ $\quad R = 5\,cm \quad h = 2\,cm$

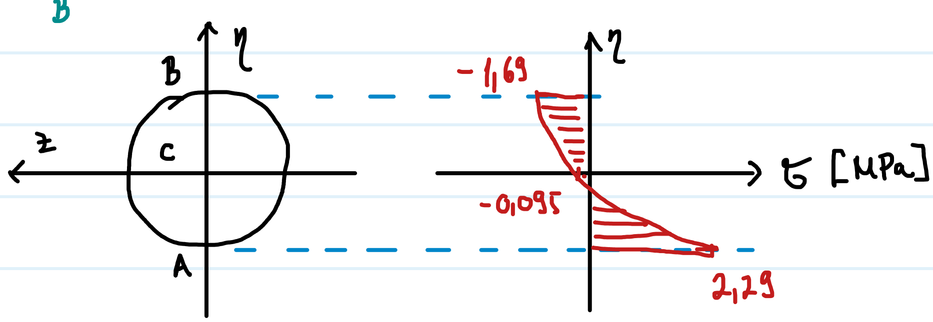
$R/h = 2{,}5 \Rightarrow$ Grashof DE! $\quad I_0 \approx I = \frac{d^4\pi}{64}$



$$A = \frac{d^2\pi}{4}$$

$$\sigma(\eta) = \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_z}\eta\frac{R}{R+\eta}$$

$\sigma_B(0{,}01) = -1{,}69$ MPa $\quad \sigma_C(0) = -0{,}095$ MPa $\quad \sigma_A(-0{,}01) = 2{,}29$ MPa

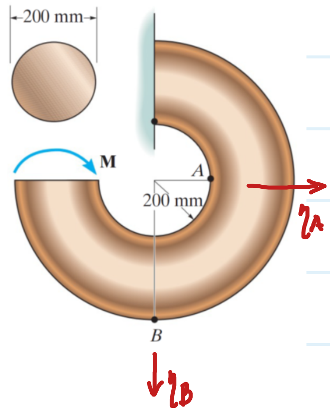


megjegyz.: $\sigma(\eta) \xrightarrow[\eta \to -R]{} \infty$

$$\sigma(\eta) \xrightarrow[\eta \to \infty]{} \frac{M_h}{RA} - \frac{M_h}{I_z}R$$

Példa 1.18

1.18. Példa. Az ábrán látható kör keresztmetszetű görbe rúd terhelése a 5 kNm nyomaték a végkeresztmetszeten. Határozza meg a normálfeszültség értékét az A és B helyeken! Milyen t távolságra helyezkedik el a B ponttól sugár irányban a semleges tengely helye?
Megoldás: $\sigma_A = -8,48$ MPa, $\sigma_B = 5,04$ MPa, $t = 108,58$ mm.



$M = 5$ kNm

$R = 300$ mm

$r = 200$ mm

$R/r = 1,5 \Rightarrow$ Grashof és I_0 ↳ táblázatból!

$I_0 = R^2 A k$; $k \cong \frac{1}{4}\left(d/2R\right)^2 + \frac{1}{8}\left(d/2R\right)^4 + \frac{5}{64}\left(d/2R\right)^6 + \frac{7}{128}\left(d/2R\right)^8$

$A = \frac{d^2\pi}{4}$ $\quad I_0 \cong 8322,9715$ cm^4

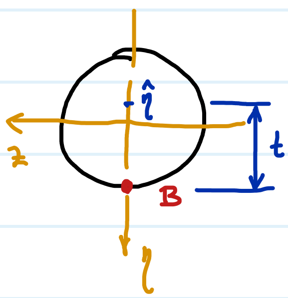
$$\sigma(\eta) = \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_0}\eta\frac{R}{R+\eta}$$

$\eta_A = -100$ mm $\quad \eta_B = 100$ mm

$\sigma_A(\eta_A) = -8,48$ MPa $\quad \sigma_B(\eta_B) = 5,04$ MPa

$\sigma(\hat{\eta}) = 0$

$$\sigma(\hat{\eta}) = \frac{M_h}{RA} + \frac{M_h}{I_0}\hat{\eta}\frac{R}{R+\hat{\eta}} = 0$$



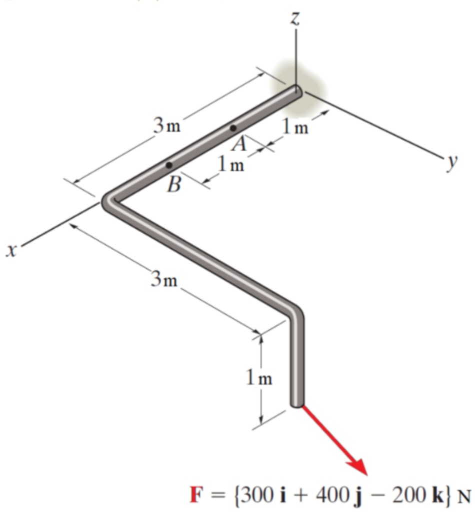
$\hat{\eta} = -8,578$ mm

$t = \frac{d}{2} - \hat{\eta} = 108,58$ mm

Példa 1.19. (Csavaró igénybevétel)

1.19. Példa. Egy 50 mm átmérőjű kör keresztmetszetű törtvonalú tartót mutat az ábra, aminek az origóba helyezett vége be van fogva. A tartó terhelése a szabad végen működő koncentrált erő. Határozzuk meg a B keresztmetszetben a csavarásból adódó csúsztatófeszültség eloszlását!

Megoldás: $\tau(r) = 0,326r$.

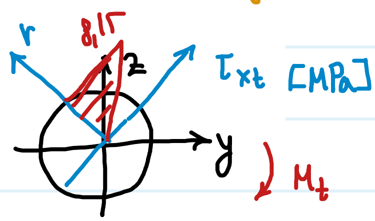


$$\underline{M}_0 = \underline{r}_{F0} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 300 \\ 400 \\ -200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ 300 \\ 300 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

$$\tau_{xt}(r) = \frac{M_{0x}}{I_p} r = 325{,}95\, r$$

← r [m]-ben helyettesít, végeredmény [MPa]

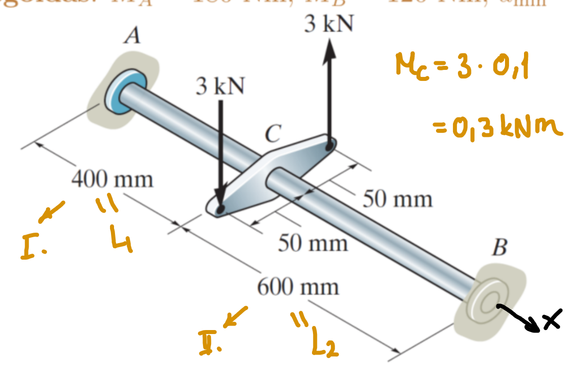
$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32}$$



Példa 1.20.

1.20. Példa. Egy kör keresztmetszetű tömör alumínium tengely két vége be van fogva, a terhelése az ábrán látható. Az anyagtulajdonságok ismertek: $E = 70$ GPa, $\nu = 0,34$. Határozzuk meg a reakciónyomatékokat! Méretezzük a tengelyt ha $\tau_{\text{meg}} = 100$ MPa! Mekkora a C keresztmetszet A-hoz képesti elcsavarodási szöge?

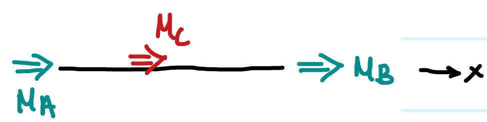
Megoldás: $M_A = 180$ Nm, $M_B = 120$ Nm, $d_{\min} = 20,93$ mm, $\varphi_{CA} = 8,38$ °.



$M_c = 3 \cdot 0,1$

$= 0,3$ kNm

SZTA



EE

$$M_c + M_A + M_B = 0$$

$\varphi_A = 0$ és $\varphi_B = 0$ ← befogás miatt

I: $0 < x < 400$ mm : $M_{tI}(x) = -M_A$

II: 400 mm $< x < 1$ m : $M_{tII}(x) = M_B = -M_A - M_c$

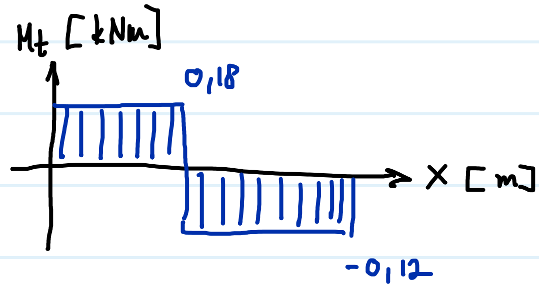
$$\varphi_B = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} \qquad \varphi_{AC} = \frac{M_{tI} \cdot L_1}{I_p G} \qquad \varphi_{CB} = \frac{M_{tII} L_2}{I_p G}$$

$$I_p = \frac{d^4 \pi}{32}$$

$$\varphi_B = \underbrace{\frac{-1}{I_p G}}_{\neq 0} \left[\underbrace{M_A L_1 + M_A L_2 + M_c L_2}_{=0} \right] = 0 \Rightarrow M_A = -0,18 \text{ kNm}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$M_B = -0{,}12\ kNm$



$M_{krit} = 0{,}18\ kNm$

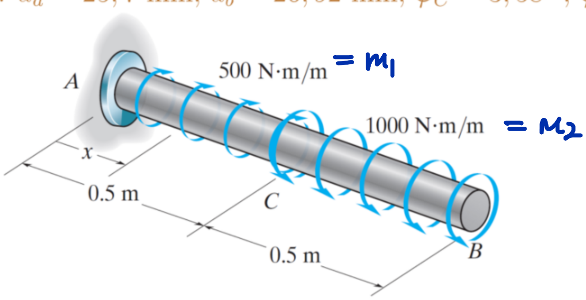
$$\tau_{max} = \frac{M_{krit}}{I_p}\frac{d}{2} = \frac{M_{krit}}{d^3\pi}\cdot 16 \leq \tau_{meg} \Rightarrow d_{min} = 20{,}93\ mm$$

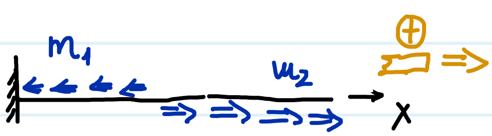
$$\varphi_{AC} = \frac{-M_A L_1}{I_p G} = 0{,}146\ rad = 8{,}38^\circ$$

Példa 1.21

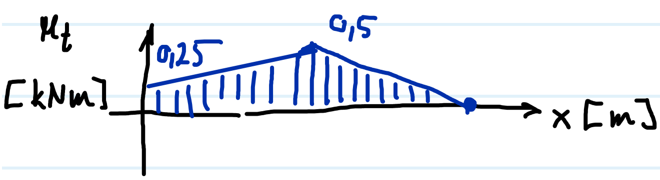
1.21. Példa. Egy befogott tartó terhelése az ábrán látható megoszló csavaró erőrendszer. A tartó anyagára megengedett csúsztatófeszültség $\tau_{meg} = 150$ MPa, a csúsztató rugalmassági modulusz értéke 70 GPa. Méretezzük a tartót: a) Tömör kör keresztmetszetből; b) Körgyűrű keresztmetszetből, ahol a belső átmérő 0,6x-osa a külső átmérőnek! Ábrázoljuk a keresztmetszetek elcsavarodási szögét a befogáshoz képest a tartó hossza mentén a tömör keresztmetszet választásakor!

Megoldás: $d_a = 25,7$ mm, $d_b = 26,92$ mm, $\varphi_C = 3,58$ °, $\varphi_B = 5.97$ °.





$M_{tkrit} = 0{,}5\ kNm$



a) $$\tau_{krit} = \frac{M_{tkrit}}{I_p}\frac{d}{2} = \frac{M_{tkrit}}{d^3\pi}\cdot 16 \leq \tau_{meg} \Rightarrow d = 25{,}701\ mm$$

b) $$I_p = \frac{d^4\pi}{32} - \frac{0{,}6^4 d^4\pi}{32} = \frac{d^4\pi}{32}\left(1-0{,}6^4\right)$$

$$\tau_{krit} = \frac{M_{tkrit}}{d^3\pi\left(1-0{,}6^4\right)}\cdot 16 \leq \tau_{meg} \Rightarrow d = 26{,}918\ mm$$

a) $\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{M_t(\xi)}{I_p\, G} d\xi$

$0 < x < 0{,}5\,m \; : \; M_{t_1} = 0{,}25 + 0{,}5x$

$0{,}5 < x < 1\,m \; : \; M_{t_2} = 0{,}5 - 1 \cdot (x - 0{,}5)$

$$\varphi_I(x) = \int_0^x \frac{M_{t_1}(\xi)}{I_p G} d\xi = \frac{1}{I_p G}\left[0{,}25\xi + 0{,}25\xi^2\right]_0^x = \frac{x}{4 I_p G}\left[1 + x\right] \cdot 1000 \quad [rad]$$

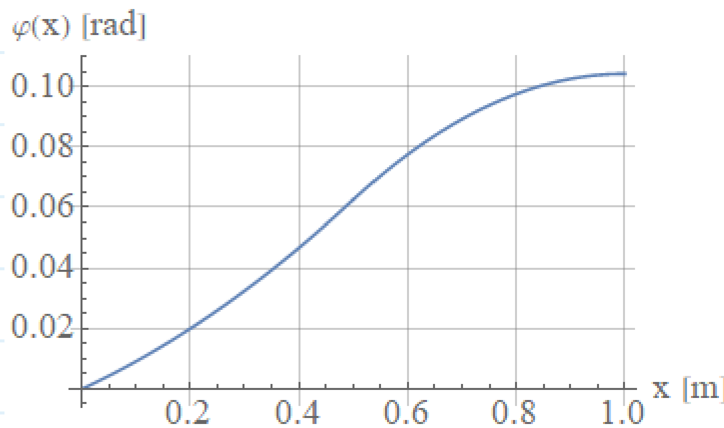
[kN] átvált [N]-ba

$\varphi_C(0{,}5) = 3{,}583°$

$$\Delta\varphi_{II}(x) = \int_{0,5}^{x} \frac{M_{t_2}(\xi)}{I_p G} d\xi = \frac{1}{I_p G}\left[\xi - 0{,}5\xi^2\right]_{0,5}^{x} = -\frac{1}{2 I_p G}\left[\frac{3}{4} - 2x + x^2\right] \cdot 1000 \quad [rad]$$

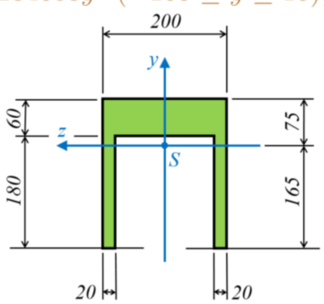
$\varphi_{II}(x) = \varphi_C(0{,}5) + \Delta\varphi_{II}(x)$

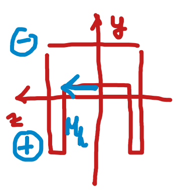
$\varphi_B(1) = 5{,}971°$



Példa 1.23 (Nyíró igénybevétel)

1.23. Példa. Az alábbi U-szelvény terhelése $\underline{M}_h = 20\underline{k}$ kNm hajlítónyomaték és $\underline{V} = 50\underline{j}$ kN nyíró igénybevétel! Írjuk fel a hajlításból adódó normálfeszültség eloszlását megadó $\sigma(y)$ függvényt, valamint a nyírásból adódó csúsztatófeszültség eloszlását megadó $\tau(y)$ függvényt. A keresztmetszet másodrendű nyomatéka ismert a z-tengelyre: $I_z = 8784$ cm^4 Számítsuk ki a maximális értékeket!
Megoldás: $\sigma(y) = -0,227687y$, $\tau_I(y) = 1,60092 - 0,000284608y^2$ $(15 \le y \le 75)$, $\tau_{II}(y) = 7,74846 - 0,000284608y^2$ $(-165 \le y \le 15)$, $\sigma_{max} = 37,57$ MPa, $\tau_{max} = 7,75$ MPa.



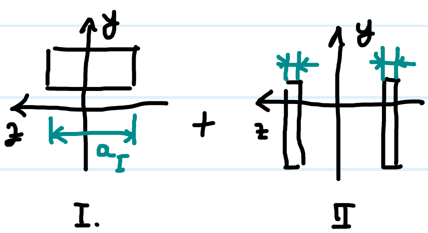


$$\sigma(y) = -\frac{M_h}{I_z} y = -0{,}2277y \quad [MPa]$$

[mm]-ben kell megadni

$\sigma_{max} = \sigma(-165) = 37{,}57\,MPa$

$$\tau_{xy} = \frac{V S}{I_z a}$$



$$\tau_{xy}^{I} = \frac{V\, S_I(y)}{I_z \cdot 0{,}2}$$

$$\tau_{xy}^{II} = \frac{V\, S_{II}(y)}{I_z \cdot 2 \cdot 0{,}02}$$

I $\quad 0{,}015\,m < y < 0{,}075\,m$

$$S_I(y) = A_I(y) \cdot k_I(y)$$

$S_{\square_I}$: súlypontja a türkiz területnek

$$k_I(y) = y + \frac{1}{2}(0{,}075 - y)$$

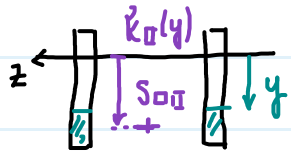
$$A_I(y) = a_I \cdot (0{,}075 - y)$$

$$S_I(y) = a_I\,(0{,}075 - y) \cdot \frac{1}{2}(0{,}075 + y) = \frac{1}{2} a_I\,(0{,}075^2 - y^2)$$

$$\tau_{xy}^{I} = \frac{V\,(0{,}075^2 - y^2)}{2\,I_z} = 1{,}6009 - 0{,}0002846\,y^2 \quad [MPa] \qquad y\,[mm]\text{-ben}$$

II $\quad -0{,}165\,m < y < 0{,}015\,m$

$$S_{II}(y) = A_{II}(y) \cdot k_{II}(y)$$



$$A_{II}(y) = a_{II}\,(-0{,}165 + y)$$

$$k_{II}(y) = y - (y - 0{,}165) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{II}(y) = a_{II}\,(y + 0{,}165) \cdot \frac{1}{2}(0{,}165 - y) = \frac{1}{2} a_{II}\,(0{,}165^2 - y^2)$$

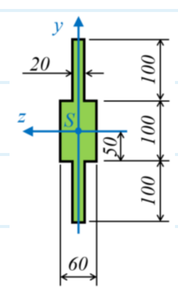
$$\tau_{xy}^{II} = \frac{V\,(0{,}165^2 - y^2)}{2\,I_z} = 7{,}7485 - 0{,}0002846\,y^2 \quad [MPa] \qquad y\,[mm]\text{-ben}$$

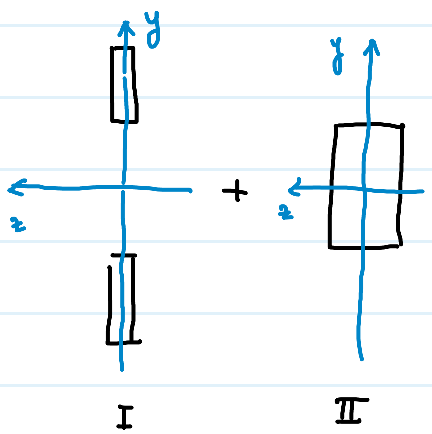
$$\tau_{max} = 7{,}75\ MPa$$

Példa 1.24

1.24. Példa. Az ábrán látható összetett keresztmetszet terhelése 20 kN nagyságú nyíró igénybevétel. Határozza meg a keresztmetszet mentén a nyírásból adódó csúsztatófeszültségek eloszlását megadó $\tau(y)$ függvényt és annak maximumát!

Megoldás: $\tau_I(y) = 4,65517 - 0,000206897y^2$ $(50 \le y \le 150$ és $-150 \le y \le -50)$, $\tau_{II}(y) = 2,58621 - 0,000206897y^2$ $(-50 \le y \le 50)$, $\tau_{max} = 4,138$ MPa.

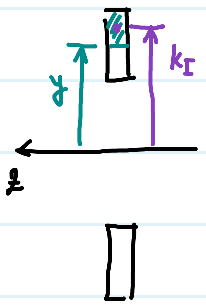




I $\quad -150\,mm < y < -50\,mm$ és $50\,mm < y < 150\,mm$

$$\tau_{xy}^{I} = \frac{V\,S_I(y)}{I_z\,a_I} \qquad a_I = 20\,mm$$

$$I_z = 2\left(\frac{100^3\,20}{12} + 100 \cdot 20 \cdot 100^2\right) + \frac{100^3 \cdot 60}{12}$$



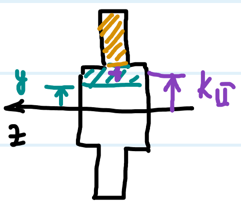
$S_I(y) = A_I \cdot k_I$ $\quad A_I = 0{,}02(0{,}15-y)$ $\quad k_I = y + \frac{1}{2}(0{,}15-y)$

$S_I(y) = a_I(0{,}15^2 - y^2)\frac{1}{2}$ $\quad \tau_{xy}^{I} = 4{,}655 - 0{,}0002069\,y^2$ [MPa]

y [mm]-ben

$\tau^{I}_{max} = 4{,}138\,MPa$

II $\quad -50\,mm < y < 50\,mm$



$\tau_{xy}^{II} = \frac{V S_{II}(y)}{I_z\, a_{II}}$ $\quad a_{II} = 60\,mm$ $\quad S_{II}(y) = A_{II} \cdot k_{II} + S_I(0{,}05)$

$\tau_{xy}^{II} =$ $\quad A_{II} = a_{II}(0{,}05-y)$ $\quad \tau_{xy}^{II} = 1{,}8966 - 0{,}0002069\,y^2$ [MPa]

$k_{II} = \frac{1}{2}(0{,}05+y)$

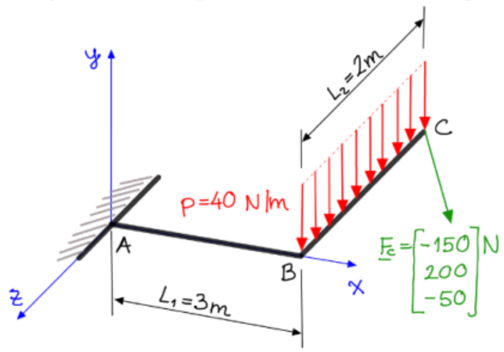
y [mm]-ben

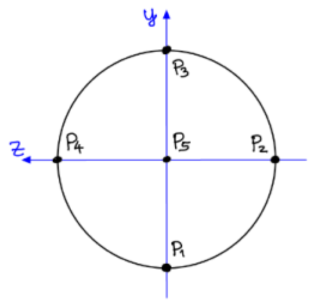
$\tau^{II}_{max} = 1{,}8966\,MPa$

$\tau_{max} = \tau^{I}_{max} = 4{,}14\,MPa$

Példa 1.25 (Összetett igénybevételek)

1.25. Példa. Egy törtvonalú tartó terheléseit és méreteit mutatja az alábbi ábra. A tartó keresztmetszete állandó, $d = 30$ mm átmérőjű kör. A C-ben az $\boldsymbol{F}_C$ koncentrált erő terheli a tartót, míg a BC szakaszon az y-irányú p nagyságú, állandó intenzitású megoszló erőrendszer. Feladatok: Határozza meg a befogás keresztmetszetében az igénybevételekből adódó feszültségeloszlásokat, valamint ábrázolja a $P_1 \dots P_5$ pontokban a feszültségeket!





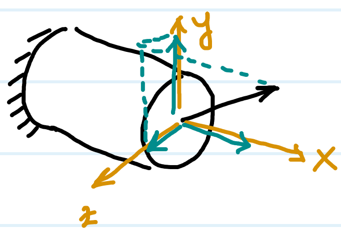
$[\underline{F}, \underline{M}_A]_A$?

$$\underline{Q} = -\underline{j}\, L_2 \cdot p = \begin{bmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{F} = \underline{Q} + \underline{F}_c = \begin{bmatrix} -150 \\ 120 \\ -50 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{M}_A = \underline{r}_{AC} \times \underline{F} + \underline{r}_{AB} \times \underline{Q} = \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ -L_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -150 \\ 200 \\ -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ -L_2/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -80 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 320 \\ 450 \\ 360 \end{bmatrix} Nm$$



erő, nyomaték felbontható 1 rúdirányú és 2 független km síkjába eső komponensre

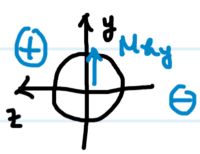
$F_x \equiv N$

$F_y \rightarrow V_y$ $\quad F_z \rightarrow V_z$ $\quad$ valamint $\quad M_x \equiv M_t$ (csavar) $\quad ; \; M_y \rightarrow M_{hy} \quad ; \; M_z \rightarrow M_{hz}$

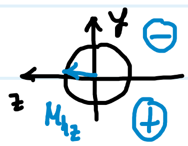
Norm. fesz.:

$$\sigma_x(y,z) = \sigma_N + \sigma_{M_{hy}}(z) + \sigma_{M_{hz}}(y)$$

$$\sigma_{M_{hy}} = \frac{M_{hy}}{I_y} z$$

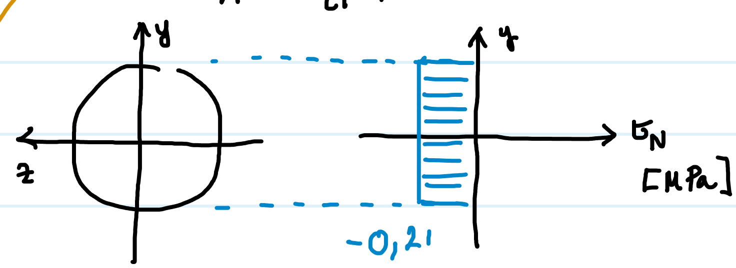


$$\sigma_{M_{hz}} = -\frac{M_{hz}}{I_z} y$$

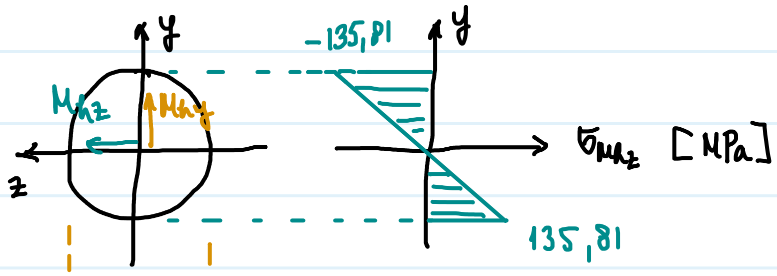


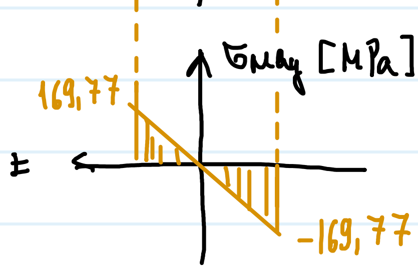
$$I_y = I_z = \frac{d^4 \pi}{64}$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{4N}{d^2 \pi} = -0{,}2122 \text{MPa}$$



Normál igbevétel

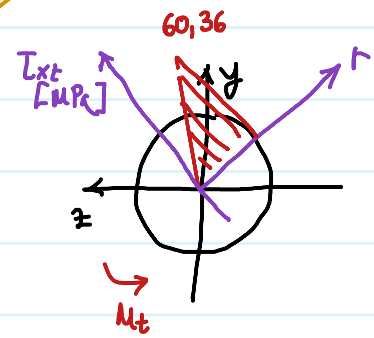




Hajlító igénybevétel

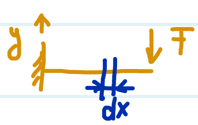
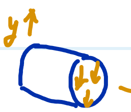
$$\tau_{xt}(r) = \frac{M_t}{I_p} r \quad , \text{ahol } I_p = \frac{d^4 \pi}{32}$$

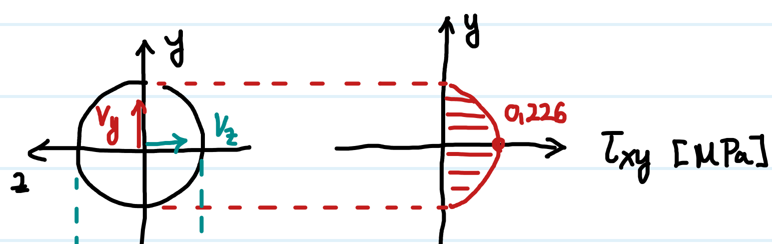
ezt adott pontban fel kell bontani τ_y és τ_z komponensekre

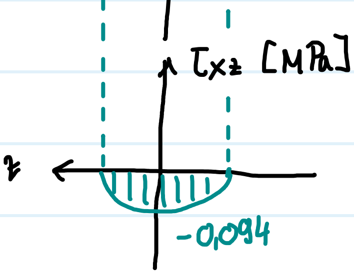


Csavaró igénybevétel

$$\tau_{xy}^{V}(y) = \frac{4}{3} \frac{V_y}{A} \left[1 - \left(\frac{y}{\rho} \right)^2 \right] \qquad \tau_{xz}^{V}(z) = \frac{4}{3} \frac{V_z}{A} \left[1 - \left(\frac{z}{\rho} \right)^2 \right] \qquad \rho = d/2$$

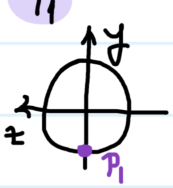
Megjegyz.:  ⇒ F↑ ▭ ↓F →x ⇒ poz. x oldalon  ⇒ τ_{xy} ⊖





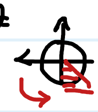
Nyíró igénybevétel

P_1

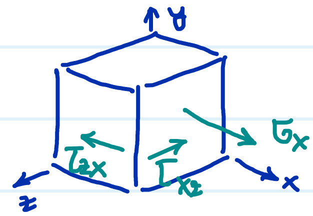


$$\sigma_x(-d/2, 0) = \sigma_N + \sigma_{M_{hz}}(-d/2) + \sigma_{M_{hy}}(0) = 135{,}6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy}^{V} = 0 \;;\; \tau_{xz}^{V} = -0{,}094 \text{ MPa} \qquad \tau_{xz}^{M_t} = -60{,}36 \text{ MPa}$$

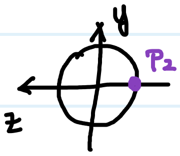


$$\underline{\underline{\sigma}}_{P_1} = \begin{bmatrix} 135{,}6 & 0 & -60{,}454 \\ 0 & 0 & 0 \\ -60{,}454 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$



P_2

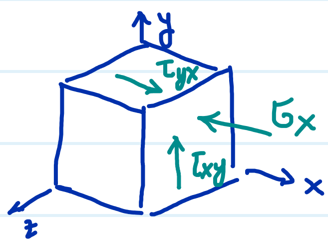
$$\sigma_x(0, -d/2) = -169{,}98\,\text{MPa} \qquad \tau^V_{xz} = 0\,\text{MPa}$$



$$\tau^V_{xy} = 0{,}226\,\text{MPa}$$

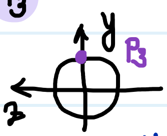
$$\tau^{Mt}_{xy} = 60{,}36\,\text{MPa}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{P_2} = \begin{bmatrix} -169{,}98 & 60{,}586 & 0 \\ 60{,}586 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$



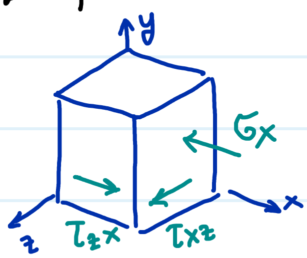
P_3

$$\sigma_x(d/2, 0) = -136{,}024\,\text{MPa} \qquad \tau^V_{xy} = 0\,\text{MPa} \qquad \tau^V_{xz} = -0{,}094\,\text{MPa}$$



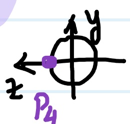
$$\tau^{Mt}_{xz} = 60{,}36\,\text{MPa}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{P_3} = \begin{bmatrix} -136{,}02 & 0 & 60{,}27 \\ 0 & 0 & 0 \\ 60{,}27 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$



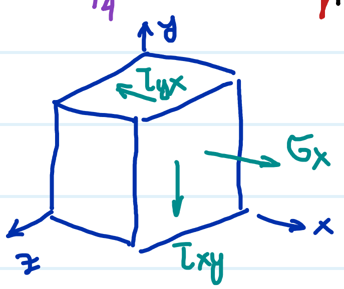
P_4

$$\sigma_x(0, d/2) = 169{,}553\,\text{MPa} \qquad \tau^V_{xz} = 0\,\text{MPa} \qquad \tau^V_{xy} = 0{,}226\,\text{MPa}$$



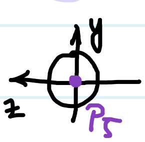
$$\tau^{Mt}_{xy} = -60{,}36\,\text{MPa}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_{P_4} = \begin{bmatrix} 169{,}55 & -60{,}13 & 0 \\ -60{,}13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$



P_5

$$\sigma_x(0,0) = -0{,}212\,\text{MPa} \qquad \tau^V_{xz} = -0{,}094\,\text{MPa} \qquad \tau^V_{xy} = 0{,}226\,\text{MPa} \qquad \tau^{Mt}_{xt} = 0\,\text{MPa}$$



$$\underline{\underline{\sigma}}_{P_5} = \begin{bmatrix} -0{,}212 & 0{,}226 & -0{,}094 \\ 0{,}226 & 0 & 0 \\ -0{,}094 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$