Példa 4.3

4.3. Példa. Határozzuk meg az alábbi feszültségi állapot esetén a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat kijelölő egységvektorokat!

Megoldás: $\sigma_1 = 52,43$ MPa, $\sigma_2 = 15$ MPa, $\sigma_3 = -32.43$ MPa, $\boldsymbol{e}_1 = 0,383\boldsymbol{i} + 0,924\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = -0,924\boldsymbol{i} + 0,383\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 30 \\ 0 & 15 & 0 \\ 30 & 0 & 40 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

σ_y biztos főfesz., hiszen csak a τ_{xz} nem zérus a csúsztató fesz.-ek közül!

$$|\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = \begin{vmatrix} -20-\lambda & 0 & 30 \\ 0 & 15-\lambda & 0 \\ 30 & 0 & 40-\lambda \end{vmatrix} = (-20-\lambda)(15-\lambda)(40-\lambda) + 0\cdot 0\cdot 30 + 30\cdot 0\cdot 0 -$$

$$- 30\cdot(15-\lambda)\cdot 30 - 0\cdot 0(-20-\lambda) - 0\cdot 0(40-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 35\lambda^2 + 1400\lambda - 25500$$

lásd Sarrus szabály

$\lambda_1 = 15$ MPa $\Rightarrow$ polinom osztás: $(-\lambda^3 + 35\lambda^2 + 1400\lambda - 25500) : (\lambda - 15) = -\lambda^2 + 20\lambda + 1700$

$$-(-\lambda^3 + 15\lambda^2)$$
$$0 + 20\lambda^2 + 1400\lambda - 25500$$
$$-(20\lambda^2 - 1100\lambda)$$
$$0 + 1700\lambda - 25500$$
$$-(1700\lambda - 25500)$$
$$0 \ \checkmark$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 + 4\cdot 1700}}{-2} = \begin{cases} 52,4264 \text{ MPa} \\ -32,4264 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= 52,43 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 15 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= -32,43 \text{ MPa} \end{aligned}\right\} \text{főfeszültségek}$$

$$\underline{e}_1 : \quad (\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}})\cdot \underline{e}_1 = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -72,43 & 0 & 30 \\ 0 & -37,43 & 0 \\ 30 & 0 & -12,43 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_{1x} \\ e_{1y} \\ e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -72,43 e_{1x} + 30 e_{1z} \\ -37,43 e_{1y} \\ 30 e_{1x} - 12,43 e_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow e_{1z} = \frac{72,43}{30} e_{1x}$

$\rightarrow e_{1y} = 0$

$\leftarrow$ ellenőrzésre jó

$\underline{e}_1$ egységvektor kell legyen

$$\tilde{\underline{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2,4142 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{e}_1 = \frac{\tilde{\underline{e}}_1}{|\tilde{\underline{e}}_1|} = \begin{bmatrix} 0,3827 \\ 0 \\ 0,9239 \end{bmatrix};$$

j a 2-es főfesz.-hez tartozó fesz.-i főirány: $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$[\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3]$ ortonormált jobbsodrású bázis: $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -0,9239 \\ 0 \\ 0,3827 \end{bmatrix}$

Példa 4.5

4.5. Példa. Határozzuk meg az alábbi feszültségi állapot esetén a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat kijelölő egységvektorokat!

Megoldás: $\sigma_1 = 10$ MPa, $\sigma_2 = 10$ MPa, $\sigma_3 = -10$ MPa, $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_2 = 0,707\boldsymbol{i} + 0,707\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = -0,707\boldsymbol{i} + 0,707\boldsymbol{j}$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

csak $\tau_{xy} \neq 0 \Rightarrow z$ főirány

$$\left| \underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{E}} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -10 & 0 \\ -10 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(10-\lambda) - 100(10-\lambda) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 + 100\lambda - 1000$$

$$\lambda_1 = 10\,\text{MPa} \Rightarrow (-\lambda^3 + 10\lambda^2 + 100\lambda - 1000) : (\lambda - 10) = -\lambda^2 + 100 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \pm 10\,\text{MPa}$$

$$\begin{aligned} &-(-\lambda^3 + 10\lambda^2) \\ &\qquad 100\lambda - 1000 \\ &\quad -(100\lambda - 1000) \\ &\qquad\quad 0 \checkmark \end{aligned}$$

van multiplicitás!

$\sigma_1 = 10$ MPa

$\sigma_2 = 10$ MPa

$\sigma_3 = -10$ MPa

$\underline{k}$ főirány $\Rightarrow \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ell.: $\begin{bmatrix} -10 & -10 & 0 \\ -10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$

$$\underline{e}_2 : \begin{bmatrix} -10 & -10 & 0 \\ -10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{2x} \\ e_{2y} \\ e_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10e_{2x} - 10e_{2y} \\ -10e_{2x} - 10e_{2y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

van 2 fgtlen sajátvektor!

↳ $e_{2z} = 1$ és $e_{2x} = e_{2y} = 0$ — megegyezik

↳ $e_{2z} = 0$ és $e_{2x} = -e_{2y}$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Lényegében 45°-kal való elforgatása az x-y tengelyeknek z körül

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos 45° \\ -\sin 45° \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 45° \\ \cos 45° \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,707 \\ 0,707 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ bázisban

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

valamint

$\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ bázisban

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Példa 4.6

4.6. Példa. Írjuk fel az alábbi feszültségi állapotnál a maximális csúsztatófeszültség nagyságát!
Megoldás: $\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

főfeszültség ⇒ $\underline{k}$ főirány

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mennyi a maximuma?

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{T}}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha(\sigma\cos\alpha - 2\tau\sin\alpha) & \tau\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha & 0 \\ \tau\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha & \sin\alpha(2\tau\cos\alpha + \sigma\sin\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ortonormált

$\underline{\underline{T}}^{-1} = T^T$

megj.: $A\sin\alpha + B\cos\alpha = D\left(\frac{A}{D}\sin\alpha + \frac{B}{D}\cos\alpha\right)$, ahol $D = \sqrt{A^2+B^2}$ ekkor $\frac{A}{D} = \sin\beta$

$\frac{B}{D} = \cos\beta$ mivel $\sqrt{(\sin^2\beta + \cos\beta^2)} = 1 = \sqrt{\frac{A^2}{D^2} + \frac{B^2}{D^2}} = \frac{1}{D}\sqrt{A^2+B^2} = D/D = 1$ ✓

Tehát $A\sin\alpha + B\cos\alpha = D(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta) = D\cos(\alpha-\beta)$

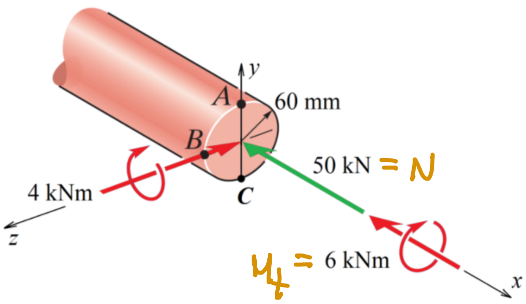
$$\sqrt{\tau^2 + \tfrac{1}{4}\sigma^2}\,\cos(2\alpha-\beta) \le \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2} = \tau_{max}$$

$1 \le \cos\gamma \le 1$

Példa 4.7

4.7. Példa. Egy kör keresztmetszetű tartó keresztmetszetének terheléseit (normál, hajlító és csavaró) mutatja az ábra. Határozzuk meg az **A**, **B** és **C** pontokban a főfeszültségeket és a hozzájuk tartozó főirányokat! Ábrázoljuk a főirányokat kiskockán!
Megoldás: $\sigma_{1A} = 29,69$ MPa, $\sigma_{2A} = 0$ MPa, $\sigma_{3A} = -10,53$ MPa, $\boldsymbol{e}_{1A} = 0,859\boldsymbol{i} - 0,512\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_{2A} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_{3A} = 0,512\boldsymbol{i} + 0,859\boldsymbol{k}$, $\sigma_{1B} = 15,61$ MPa, $\sigma_{2B} = 0$ MPa, $\sigma_{3B} = -20,03$ MPa, $\boldsymbol{e}_{1B} = 0,662\boldsymbol{i} + 0,75\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_{2B} = -0,75\boldsymbol{i} + 0,662\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_{3B} = \boldsymbol{k}$, $\sigma_{1C} = 8,55$ MPa, $\sigma_{2C} = 0$ MPa, $\sigma_{3C} = -36,55$ MPa, $\boldsymbol{e}_{1C} = 0,435\boldsymbol{i} + 0,9\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_{2C} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_{3C} = -0,9\boldsymbol{i} + 0,435\boldsymbol{k}$.

$I_z = \frac{d^4\pi}{64}$ $\quad I_p = \frac{d^4\pi}{32}$ $\quad A = \frac{d^2\pi}{4}$



$$\tau_{xt}(\rho) = \frac{M_t}{I_p}\rho$$

$$\sigma_x^N = \frac{-N}{A} \qquad \sigma_x^{M_h}(y) = \frac{M_{h_z}}{I_z}y \Rightarrow \sigma_x(y) = \sigma_x^N + \sigma_x^{M_h}(y)$$

A

$\tau_{xz} = -\frac{M_t}{I_p} r = -17,68\,MPa$ $\qquad \sigma_x(r) = 19,16\ MPa$

$$\underline{\underline{\sigma}}_A = \begin{bmatrix} 19,16 & 0 & -17,68 \\ 0 & 0 & 0 \\ -17,68 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

y főirány! → $\sigma_y = 0\,MPa$ főfesz.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 29,69\,MPa \\ -10,53\,MPa \end{cases}$$

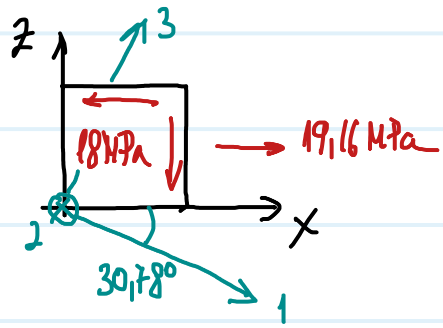
csak akkor alkalmazható, ha egyik irány főirány!

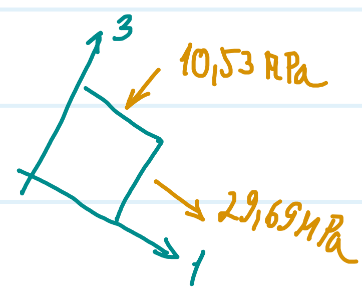
$\sigma_1 = 29,69\,MPa$; $\sigma_2 = 0\,MPa$; $\sigma_3 = -10,53\,MPa$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

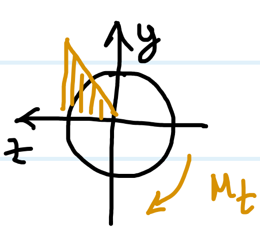
$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = -30,78^\circ \qquad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,859 \\ 0 \\ -0,512 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0,512 \\ 0 \\ 0,859 \end{bmatrix}$$





B



$\tau_{xy} = 17,68\,MPa$ $\qquad \sigma_x(0) = -4,42\,MPa$

$$\underline{\underline{\sigma}}_B = \begin{bmatrix} -4,42 & 17,68 & 0 \\ 17,68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z főirány, σ_z főfesz!

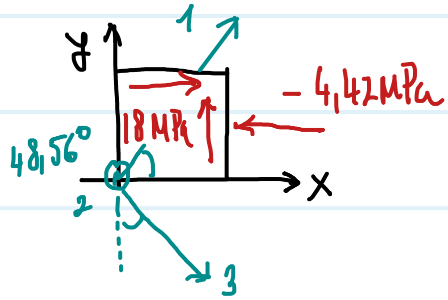
$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases}15,61\ \text{MPa}\\ -20,03\ \text{MPa}\end{cases}$$

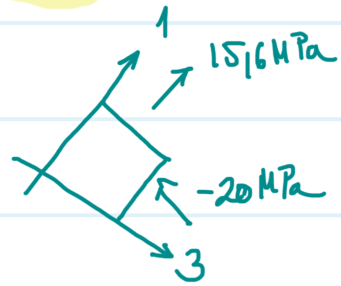
$\sigma_1 = 15,61\ \text{MPa}$ $\quad$ $\sigma_2 = 0\ \text{MPa}$ $\quad$ $\sigma_3 = -20,03\ \text{MPa}$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

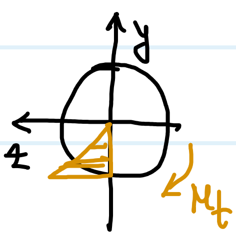
$$\varphi_1 = \text{arctg}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = 48,56^\circ \qquad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix}\cos\varphi_1\\ \sin\varphi_1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,662\\ 0,75\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix}0,75\\ -0,662\\ 0\end{bmatrix}$$





C



$\tau_{xz} = 17,68\ \text{MPa}$ $\qquad$ $\sigma_x(-r) = -28\ \text{MPa}$

$$\underline{\underline{\sigma}}_C = \begin{bmatrix}-28 & 0 & 17,68\\ 0 & 0 & 0\\ 17,68 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{MPa}$$

y főirány → σ_y főfesz.

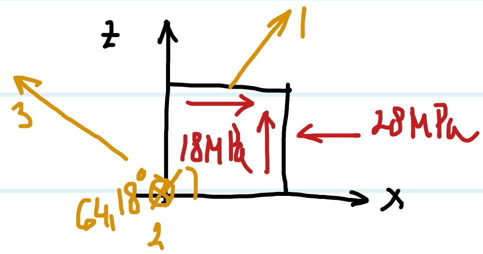
$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases}8,55\ \text{MPa}\\ -36,55\ \text{MPa}\end{cases}$$

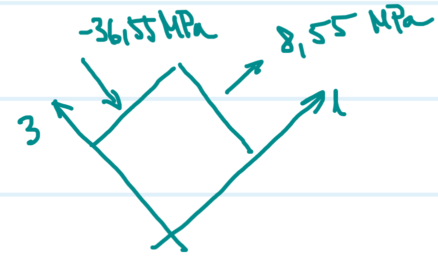
$\sigma_1 = 8,55\ \text{MPa}$ $\quad$ $\sigma_2 = 0\ \text{MPa}$ $\quad$ $\sigma_3 = -36,55\ \text{MPa}$

$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \varphi_1 = \text{arctg}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = 64,18^\circ$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix}\cos\varphi_1\\ 0\\ \sin\varphi_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0,435\\ 0\\ 0,9\end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix}-0,9\\ 0\\ 0,435\end{bmatrix}$$

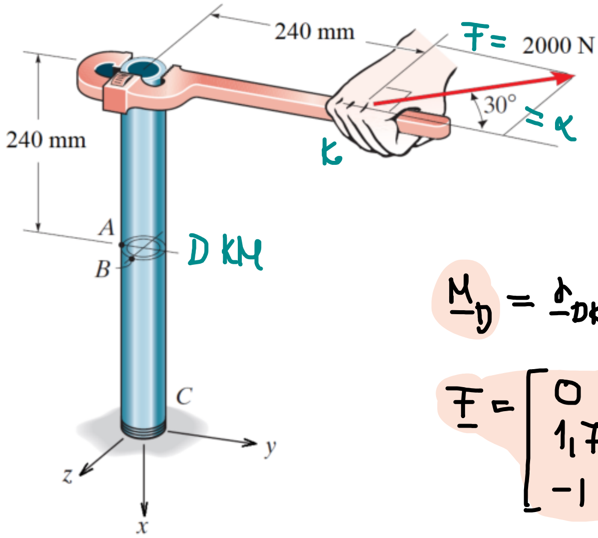




Példa 4.8

4.8. Példa. Egy acélcső külső és belső átmérői 60, illetve 55 mm. A cső **C** vége befogott, míg a felső végét az ábrán látható módon egy csőkulccsal próbálunk elfordítani. Határozzuk meg az **A** és **B** pontokban a főfeszültségeket és a hozzájuk tartozó főirányokat!

Megoldás: $\sigma_{1A} = 69,84$ MPa, $\sigma_{2A} = 0$ MPa, $\sigma_{3A} = -3,15$ MPa, $\boldsymbol{e}_{1A} = 0,978\boldsymbol{i} + 0,207\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_{2A} = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_{3A} = -0,207\boldsymbol{i} + 0,978\boldsymbol{k}$, $\sigma_{1B} = 52,34$ MPa, $\sigma_{2B} = 0$ MPa, $\sigma_{3B} = -13,84$ MPa, $\boldsymbol{e}_{1B} = 0,889\boldsymbol{i} + 0,457\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_{2B} = -0,457\boldsymbol{i} + 0,889\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_{3B} = \boldsymbol{k}$.



$$[\underline{F}, \underline{M}_D]_D = ?$$

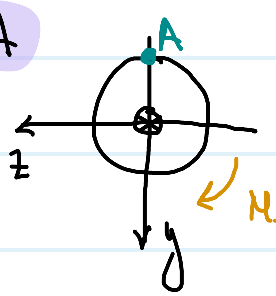
$$\underline{F} = F \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix} \qquad \underline{r}_{DK} = \begin{bmatrix} -240 \\ 240 \\ 0 \end{bmatrix} \text{mm}$$

$$\underline{M}_D = \underline{r}_{DK} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} -240 \\ -240 \\ -416 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,7 \\ -1 \end{bmatrix} \text{kN}$$

$$N = 0 \; ; \; V_y = 1,7 \text{ kN} \; ; \; V_z = -1 \text{ kN} \; ; \; M_t = -240 \text{ Nm} \; ; \; M_{hy} = -240 \text{ Nm} \; ; \; M_{hz} = -416 \text{ Nm}$$

A

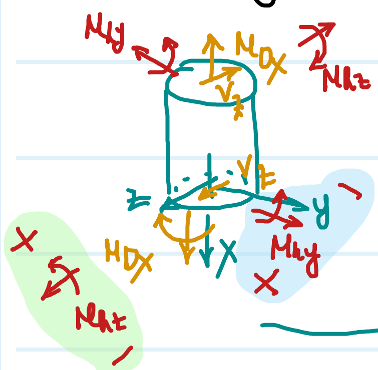


$$\tau_{xy}^{V} = 0 \text{ MPa} \qquad \tau_{xz}^{M_t} = -\frac{M_t}{I_p} \cdot \frac{d_k}{2} = -19,25 \text{ MPa}$$

$$I_p = \frac{d_k^4 \pi}{32} - \frac{d_b^4 \pi}{32} \qquad I_y = I_z = \frac{d_k^4 \pi}{64} - \frac{d_b^4 \pi}{64}$$

$$S_{fél} = \frac{1}{2} \frac{d_k^2 \pi}{4} \cdot \frac{4 d_k}{6\pi} - \frac{1}{2} \frac{d_b^2 \pi}{4} \frac{4 d_b}{6\pi} \; ; \; a = d_k - d_b$$

$$\tau_{xz}^{V} = -\frac{V_z}{I_y} \cdot \frac{S_{fél}}{a} = 4,42 \text{ MPa}$$



⊖ x oldalról redukáltuk az erőrendszert!

$$\sigma_x^A = \frac{M_{hz}}{I_z}\left(-\frac{d_k}{2}\right) = 66{,}69\ MPa$$ (M_{hy}-ból adódó feszültség 0)

$$\underline{\underline{\sigma}}^A = \begin{bmatrix} 66{,}69 & 0 & -14{,}83 \\ 0 & 0 & 0 \\ -14{,}83 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

y főirány → σ_y főfesz.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 69{,}8\ MPa \\ -3{,}15\ MPa \end{cases}$$

$\sigma_1 = 69{,}84\ MPa$, $\sigma_2 = 0\ MPa$; $\sigma_3 = -3{,}15\ MPa$; $\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = -11{,}99^\circ \qquad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}978 \\ 0 \\ -0{,}208 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}208 \\ 0 \\ 0{,}978 \end{bmatrix}$$

B

$\tau_{xy}^{Mt} = -19{,}25\ MPa$ $\quad \tau_{xz}^{Vz} = 0\ MPa$ $\quad \sigma_x^{Mhz} = 0\ MPa$

$$\tau_{xy}^{Vy} = -\frac{V_y}{I_z}\frac{S_{fél}}{a} = -7{,}66\ MPa \qquad \sigma_x^{Mhy} = -\frac{M_{hy}}{I_y}\frac{d_k}{2} = 38{,}5\ MPa$$

$S_{fél}$ is a ugyanaz, mert geometriailag 

$$\underline{\underline{\sigma}}^B = \begin{bmatrix} 38{,}5 & -26{,}9 & 0 \\ -26{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} MPa$$

z főirány → σ_z főfesz.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 52{,}34\ MPa \\ -13{,}84\ MPa \end{cases}$$

$\sigma_1 = 52{,}34\ MPa$; $\sigma_2 = 0\ MPa$; $\sigma_3 = -13{,}84\ MPa$;

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = -27{,}21^\circ \qquad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}889 \\ -0{,}457 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}457 \\ -0{,}889 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Példa 4.9

4.9. Példa. A feszültségi tenzor mátrixa egy anyagi pontban az xyz koordinátarendszerben ismert. Határozzuk meg a főfeszültségeket és főirányokat sajátérték és sajátvektor számítással. Ábrázoljuk a feszültségi állapotot Mohr-körök segítségével!

Megoldás: $\sigma_1 = 110$ MPa, $\sigma_2 = 10$ MPa, $\sigma_3 = -50$ MPa, $\boldsymbol{e}_1 = 0,894\boldsymbol{i} + 0,447\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_2 = -0,447\boldsymbol{i} + 0,894\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 90 & 40 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\begin{vmatrix} 90-\lambda & 40 & 0 \\ 40 & 30-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -50-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 70\lambda^2 + 4900\lambda - 5500 = 0$$

$\lambda_1 = -50$ (mert főfesz.)

Polinomosztás: $(-\lambda^3 + 70\lambda^2 + 4900\lambda - 55000) : (\lambda + 50) = -\lambda^2 + 120\lambda - 1100$

$$\begin{array}{l} -(-\lambda^3 - 50\lambda^2) \\ \hline 120\lambda^2 + 4900\lambda - 55000 \\ -(120\lambda^2 + 6000\lambda) \\ \hline -1100\lambda - 55000 \\ -(-1100\lambda - 55000) \quad \checkmark \end{array}$$

$$-\lambda^2 + 120\lambda - 1100 \overset{?}{=} 0 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 1100}}{-2} = \begin{cases} 10\,\text{MPa} \\ 110\,\text{MPa} \end{cases}$$

$\sigma_1 = 110\,\text{MPa}$ $\qquad \sigma_2 = 10\,\text{MPa}$ $\qquad \sigma_3 = -50\,\text{MPa}$

$$\underline{e}_2: \begin{bmatrix} 90-10 & 40 & 0 \\ 40 & 30-10 & 0 \\ 0 & 0 & -50-10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ell.: } \begin{bmatrix} 140 & 40 & 0 \\ 40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 80v_1 + 40v_2 \\ 40v_1 + 20v_2 \\ -60v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow v_1 = -\frac{1}{2}v_2 \\ \rightarrow v_3 = 0 \end{array}$$

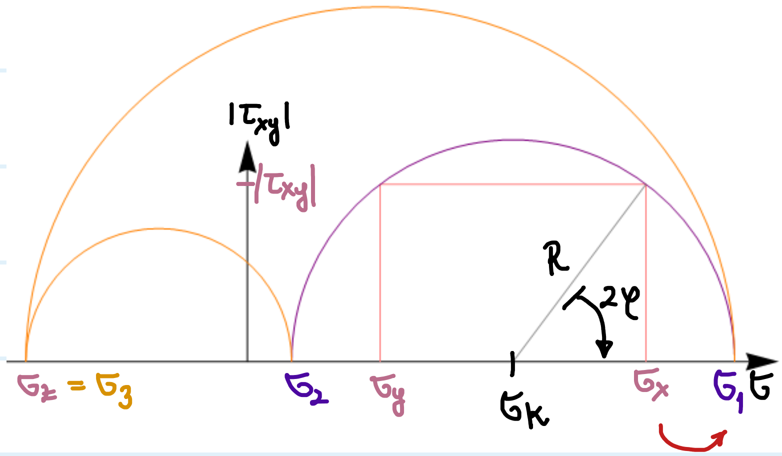
$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} : \sqrt{1^2 + 2^2} = \begin{bmatrix} 0,4472 \\ -0,8944 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_1 = \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} -0,8944 \\ -0,4472 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ell.: } \begin{bmatrix} -20 & 40 & 0 \\ 40 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & -160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8944 \\ 0,4472 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mohr körök

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 60\,MPa$$

$$R = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_k)^2 + \tau_{xy}^2} = 50\,MPa$$



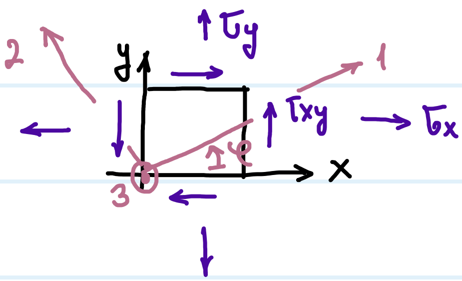
$$\sigma_1 = \sigma_k + R = 110\,MPa$$

$$\sigma_2 = \sigma_k - R = 10\,MPa$$

$$2\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_k}\right)$$

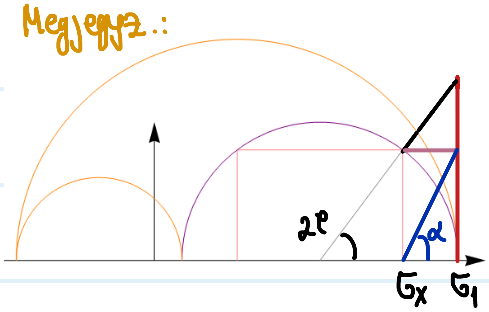
$$\varphi = 26{,}57°$$

φ-vel forgatjuk x-et 1-be

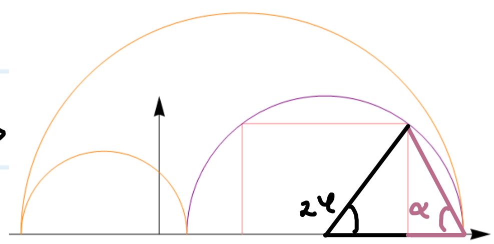


$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}8944 \\ 0{,}4472 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4472 \\ 0{,}8944 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Megjegyz.:



$\Rightarrow$



Kerületi és középponti szögek tétele a lila körre

$$\Rightarrow \alpha = \tfrac{1}{2} 2\varphi = \varphi$$

előző órán a forgatás szöge: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = \varphi$

Példa 4.10

4.10. Példa. A feszültségi tenzor mátrixa egy anyagi pontban az xyz koordinátarendszerben ismert. Határozzuk meg a főfeszültségeket és főirányokat sajátérték és sajátvektor számítással. Ábrázoljuk a feszültségi állapotot Mohr-körök segítségével!

Megoldás: $\sigma_1 = 25{,}31$ MPa, $\sigma_2 = -30$ MPa, $\sigma_3 = -55{,}31$ MPa, $\boldsymbol{e}_1 = 0{,}662\boldsymbol{j} - 0{,}75\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{e}_3 = -0{,}75\boldsymbol{j} - 0{,}662\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -40 \\ 0 & -40 & -10 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\begin{array}{cccc} & + & - & + \\ \det & \begin{vmatrix} -30-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -20-\lambda & -40 \\ 0 & -40 & -10-\lambda \end{vmatrix} & & = 0 \end{array}$$

kifejtési tétellel:

$$(-30-\lambda)\left[(-20-\lambda)(-10-\lambda) - (-40)(-40)\right] +$$

$$-0\left[0(-10-\lambda) + 40\cdot 0\right] + 0\left[0\cdot(-40) - 0(-20-\lambda)\right] = 0$$

$$\Rightarrow -(\lambda+30)\left[\lambda^2+30\lambda-1400\right]=0$$

$$\lambda_1=-30$$

$$\lambda_{2,3}=\frac{-30\pm\sqrt{30^2+4\cdot 1400}}{2}= \begin{cases} 25{,}31 \\ -55{,}31 \end{cases}$$

$\sigma_1 = 25{,}31\ \mathrm{MPa}$ $\qquad$ $\sigma_2 = -30\ \mathrm{MPa}$ $\qquad$ $\sigma_3 = -55{,}31\ \mathrm{MPa}$

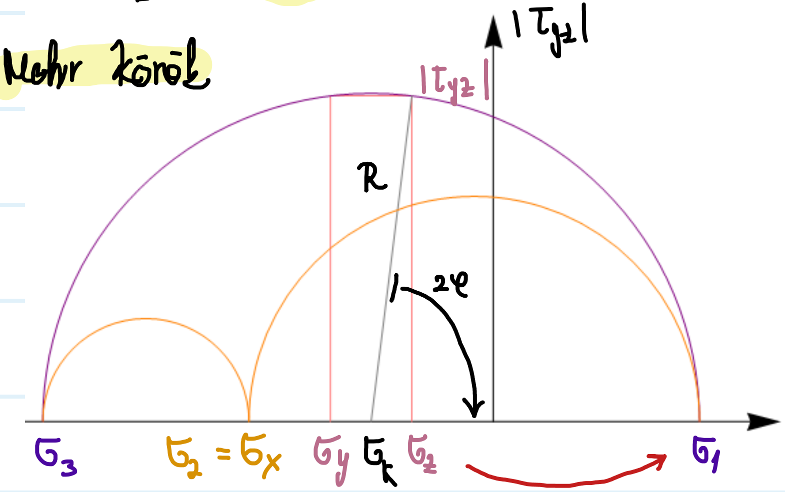
$$\underline{e}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

ell.: $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&10&-40\\0&-40&20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ✓

$$\underline{e}_1:\begin{bmatrix}-30-25{,}31&0&0\\0&-20-25{,}31&-40\\0&-40&-10-25{,}31\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\longrightarrow \begin{array}{l} v_1=0\\ -40v_2-35{,}31v_3=0\end{array}$$

$$\underline{e}_1=\begin{bmatrix}0\\0{,}6618\\-0{,}7497\end{bmatrix}\qquad \underline{e}_3=\underline{e}_1\times\underline{e}_2=\begin{bmatrix}0\\-0{,}7497\\-0{,}6618\end{bmatrix}$$

Mohr körök



2-t forgat 1-be

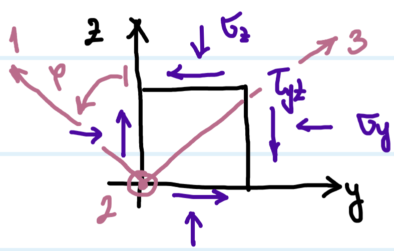
$$\sigma_k=\frac{\sigma_y+\sigma_z}{2}=-15\ \mathrm{MPa}$$

$$R=\sqrt{(\sigma_z-\sigma_k)^2+\tau_{yz}^2}=40{,}31\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_1=\sigma_k+R=25{,}31\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_3=\sigma_k-R=-55{,}31\ \mathrm{MPa}$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{|\tau_{yz}|}{\sigma_z-\sigma_k}\right)=41{,}44^\circ$$



$$\underline{e}_1=\begin{bmatrix}0\\-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-0{,}6618\\0{,}7497\end{bmatrix},\ \underline{e}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \underline{e}_3=\begin{bmatrix}0\\\cos\varphi\\\sin\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0{,}7497\\0{,}6618\end{bmatrix}$$

Példa 4.11

4.11. Példa. A feszültségi tenzor mátrixa egy anyagi pontban az xyz koordinátarendszerben ismert. Határozzuk meg a főfeszültségeket és főirányokat sajátérték és sajátvektor számítással. Ábrázoljuk a feszültségi állapotot Mohr-körök segítségével!

Megoldás: $\sigma_1 = 100$ MPa, $\sigma_2 = 100$ MPa, $\sigma_3 = -100$ MPa, $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_2 = 0,707\boldsymbol{i} + 0,707\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_3 = -0,707\boldsymbol{i} + 0,707\boldsymbol{k}$.

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}0&0&100\\0&100&0\\100&0&0\end{bmatrix}\ \mathrm{MPa}$$

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 100 \\ 0 & 100-\lambda & 0 \\ 100 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (100-\lambda)\left[\lambda^2 - 100^2\right] \longrightarrow \begin{array}{l}\lambda_1 = 100 \\ \lambda_{2,3} = \pm 100\end{array}$$

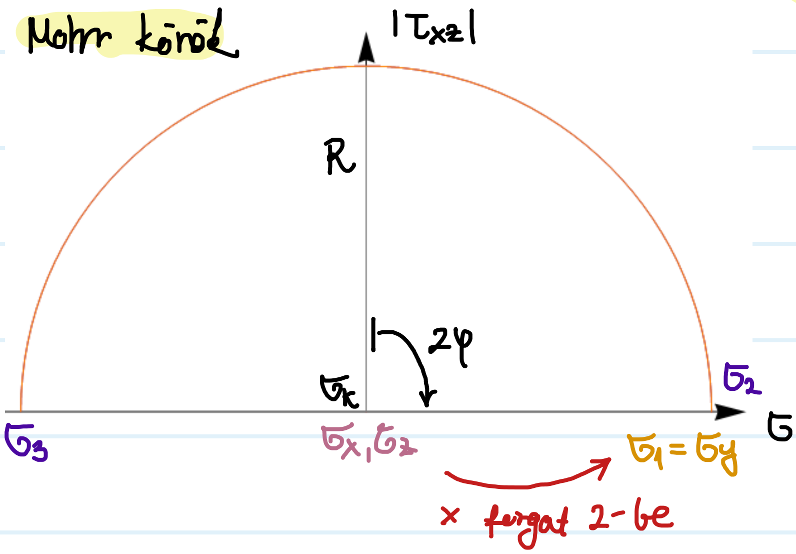
$\sigma_1 = 100\,MPa$; $\sigma_2 = 100\,MPa$, $\sigma_3 = -100\,MPa$, $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{e}_2 : \begin{bmatrix} -100 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & -100 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100v_1 + v_3 100 \\ 0 \\ 100v_1 - 100v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyik megoldás

másik megoldás: $v_2 = 0$; $v_1 = v_3 \longrightarrow \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}707 \\ 0 \\ 0{,}707 \end{bmatrix}$; $\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}707 \\ 0 \\ -0{,}707 \end{bmatrix}$

Mohr kör:

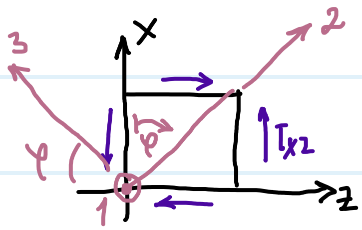


$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = 0\,MPa$$

$$R = \sqrt{\tau_{xz}^2} = 100\,MPa$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\Big(\underbrace{\frac{|\tau_{xz}|}{\sigma_x - \sigma_k}}_{\infty}\Big) = 45^\circ$$

$\infty \to 90^\circ$



$$\underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ 0 \\ \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}707 \\ 0 \\ 0{,}707 \end{bmatrix},\ \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ 0 \\ -\cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}707 \\ 0 \\ -0{,}707 \end{bmatrix}$$