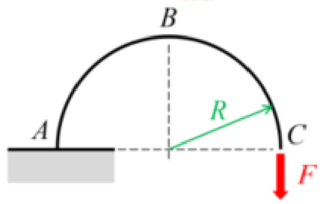
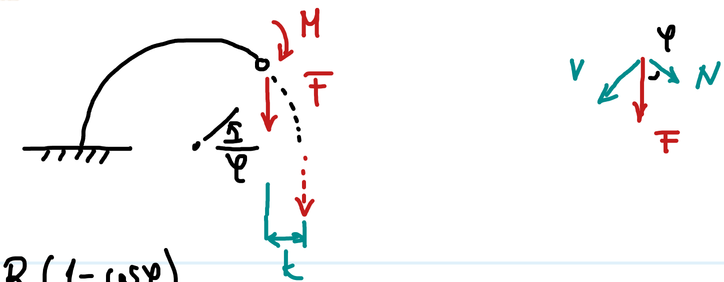
Példa 7.1 (Deformációk számítása)

7.1. Példa. Határozzuk meg a végkeresztmetszet függőleges elmozdulását! a) Az alakváltozási energia számításakor hanyagoljuk el a normál igénybevétel hatását; b) Vegyük figyelembe a normál igénybevétel hatását is!

Megoldás: $f_a = \frac{3\pi F R^3}{2IE}$, $f_b = \frac{3\pi F R^3}{2IE} + \frac{\pi F R}{2AE}$.





$$N = F\cos\varphi \quad ; \quad M_h = FR(1-\cos\varphi)$$

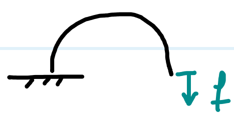
a) $U_N \approx 0 \quad ; \quad U = U_{Mh}$ $\qquad f \to F$ kell

$$\frac{\partial M_h}{\partial F} = \frac{\partial FR(1-\cos\varphi)}{\partial F} = R(1-\cos\varphi)$$

$$f_{M_h} = \frac{1}{IE}\int_{(s)} M_h \frac{\partial M_h}{\partial F}\, ds = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} M_h \frac{\partial M_h}{\partial F} R\, d\varphi = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} FR^3(1-\cos\varphi)^2\, d\varphi$$

$$f_{M_h} = \frac{FR^3}{IE}\int_0^{\pi}\left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi = \frac{FR^3}{IE}\left([\varphi]_0^{\pi} + [-2\sin\varphi]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{2}\right)d\varphi\right)$$

$$f_{M_h} = \frac{FR^3\pi}{IE} + \frac{FR^3}{IE}\left(\left[\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{FR^3 3\pi}{2IE}$$



b) $$\frac{\partial N}{\partial F} = \frac{\partial F\cos\varphi}{\partial F} = \cos\varphi$$

$$f_N = \frac{1}{AE}\int_{(s)} N \frac{\partial N}{\partial F}\, ds = \frac{1}{AE}\int_0^{\pi} N \frac{\partial N}{\partial F} R\, d\varphi = \frac{1}{AE}\int_0^{\pi} FR\cos^2\varphi\, d\varphi$$

$$f_N = \frac{FR}{AE}\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{2}\right)d\varphi = \frac{FR}{AE}\left(\left[\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\varphi}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{FR\pi}{2AE}$$

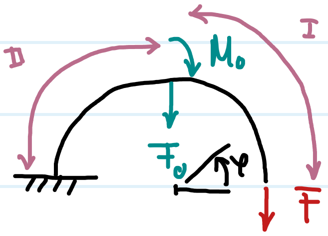
$$f = f_N + f_{Mh} = \frac{3\pi R^3 F}{2IE} + \frac{FR\pi}{2AE} = \frac{96FR^3}{d^4E} + \frac{2FR}{d^2E} = \frac{2FR}{d^2E}\left[\frac{48R^2}{d^2} + 1\right]$$

$f_{Mh} \gg f_N$

Példa 7.2

7.2. Példa. Számítsuk ki az előző feladatnál a B keresztmetszet függőleges elmozdulását és a keresztmetszet szögelfordulását! Az alakváltozási energia számításakor a normál igénybevétel hatását elhanyagolhatjuk.

Megoldás: $f = \frac{(4+\pi)FR^3}{4IE}$, $\varphi = \frac{(2+\pi)FR^2}{2IE}$.

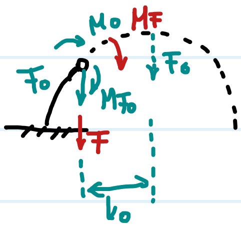


$f_B \to F_0$ $\qquad \varphi_B \to M_0$

$U \cong U_{Mh}$

I: $0 < \varphi < \pi/2$ $\qquad M_{h1} = FR(1-\cos\varphi)$

II: $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $\qquad M_{h2} = FR(1-\cos\varphi) + M_0 + F_0 R(-\cos\varphi)$



elmozdulás $(M_0 = 0\,Nm)$

$$f_B = \frac{1}{IE}\left(\int_0^{\pi/2} M_{h1}\frac{\partial M_{h1}}{\partial F_0} R\,d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} M_{h2}\frac{\partial M_{h2}}{\partial F_0} R\,d\varphi\right)$$

$$\frac{\partial M_{h1}}{\partial F_0} = 0\,; \qquad \frac{\partial M_{h2}}{\partial F_0} = -R\cos\varphi$$

$F_0 = 0N$

$$f_B = \frac{R^3}{IE}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(F_0\cos^2\varphi - F\cos\varphi(1-\cos\varphi)\right)d\varphi = \frac{R^3 F}{IE}\int_{\pi/2}^{\pi}(\cos^2\varphi - \cos\varphi)\,d\varphi$$

$$f_B = \frac{R^3 F}{IE}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{\cos 2\varphi + 1}{2} - \cos\varphi\right)d\varphi = \frac{R^3 F}{IE}\left(\left[\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_{\pi/2}^{\pi} + \left[\frac{\varphi}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \left[\sin\varphi\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$f_B = \frac{R^3 F}{IE}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 1\right) = \frac{R^3 F}{IE}\,\frac{\pi + 4}{4}$$

lefele, mert F_0 is lefele mutatott

elfordulás $(F_0 = 0N)$ $\qquad \frac{\partial M_{h1}}{\partial M_0} = 0\,; \quad \frac{\partial M_{h2}}{\partial M_0} = 1$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\left(\int_0^{\pi/2} M_{h1}\frac{\partial M_{h1}}{\partial M_0}R\,d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} M_{h2}\frac{\partial M_{h2}}{\partial M_0}R\,d\varphi\right)$$

$$\varphi_B = \frac{R}{IE}\int_{\pi/2}^{\pi}\left(FR(1-\cos\varphi)+M_0\right)d\varphi \overset{M_0=0\,Nm}{=} \frac{FR^2}{IE}\int_{\pi/2}^{\pi}(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$

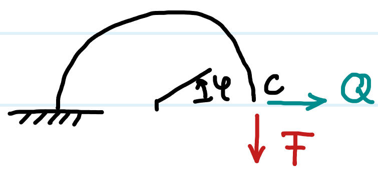
$$\varphi_B = \frac{FR^2}{IE}\left(\left[\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi} - \left[\sin\varphi\right]_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{FR^2}{IE}\left(\pi - \frac{\pi}{2} + 1\right) = \frac{FR^2}{IE}\,\frac{\pi+2}{2}$$

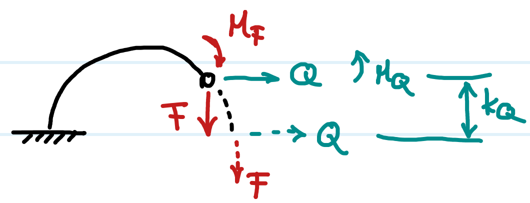
M_0 irányú a szögelfordulás

Példa 7.3

7.3. Példa. Számítsuk ki az előző feladatnál a C keresztmetszet vízszintes elmozdulását! Az alakváltozási energia számításakor a normál igénybevétel hatását elhanyagolhatjuk.
Megoldás: $f = \frac{2FR^3}{IE}$.

$U \cong U_{Mh}$





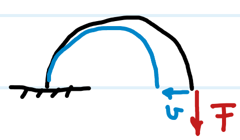
$$M_h = FR(1-\cos\varphi) - QR\sin\varphi \qquad \frac{\partial M_h}{\partial Q} = -R\sin\varphi$$

$$v_C = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi} M_h\frac{\partial M_h}{\partial Q}R\,d\varphi = \frac{R}{IE}\int_0^{\pi} FR^2\sin\varphi(\cos\varphi-1)\,d\varphi = \frac{FR^3}{IE}\int_0^{\pi}(\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)\,d\varphi$$

$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$

$$v_C = \frac{FR^3}{IE}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi - \sin\varphi\right)d\varphi = \frac{FR^3}{IE}\left(\left[-\frac{1}{4}\cos(2\varphi)\right]_0^{\pi} + \left[\cos\varphi\right]_0^{\pi}\right)$$

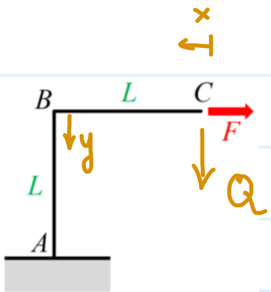
$$v_C = \frac{FR^3}{IE}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-1-1\right) = -\frac{FR^3\cdot 2}{IE}$$



mert a Q-val ellentétes irányba mozdul

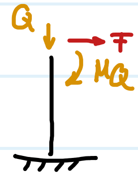
Példa 7.4

7.4. Példa. Az alábbi kör keresztmetszetű törtvonalú tartó anyaga és keresztmetszete állandó a tartó hossza mentén. Határozzuk meg a végkeresztmetszet q függőleges lehajlását. Adatok: $F = 100$ N, $d = 30$ mm, $E = 200$ GPa, $L = 1$ m.
Megoldás: $f = \frac{FL^3}{2IE} = 6,29$ mm.



$N_1(x) = F$

$M_{h1}(x) = Qx$



$N_2(y) = -Q$

$M_{h2}(y) = Fy + QL$

$$\frac{\partial N_1}{\partial Q} = 0; \quad \frac{\partial N_2}{\partial Q} = -1; \quad \frac{\partial M_{h1}}{\partial Q} = x; \quad \frac{\partial M_{h2}}{\partial Q} = L \qquad U = U_{Mh} + U_N$$

$$q = \frac{1}{IE}\left(\int_0^L M_{h1}\frac{\partial M_{h1}}{\partial Q}dx + \int_0^L M_{h2}\frac{\partial M_{h2}}{\partial Q}dy\right) + \frac{1}{AE}\left(\int_0^L N_1\frac{\partial N_1}{\partial Q}dx + \int_0^L N_2\frac{\partial N_2}{\partial Q}dy\right)$$

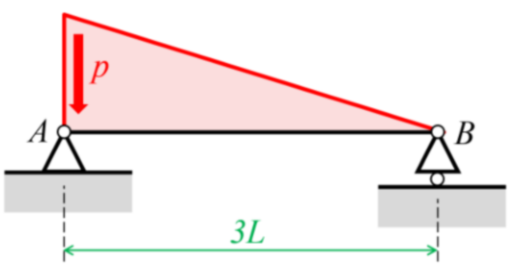
$Q = 0N$

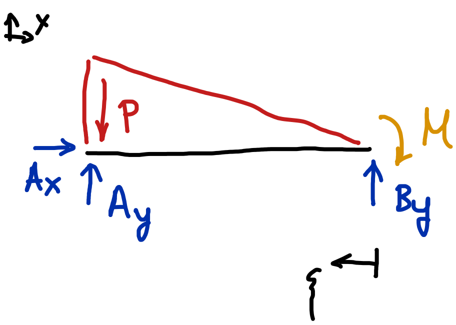
$$q = \frac{1}{IE}\left(\int_0^L F y L\, dy\right) = \frac{FL}{IE}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^L = \frac{FL^3}{2IE} = 6{,}29\ \text{mm}$$

Példa 7.5

7.5. Példa. Határozzuk meg az alábbi kéttámaszú tartónál a keresztmetszet szögelfordulsását a B helyen! A tartó keresztmetszete a élhosszúságú négyzet. Adatok: $p = 2$ kN/m, $a = 20$ mm, $E = 200$ GPa, $L = 0,5$ m.

Megoldás: $\varphi = \frac{21pL^3}{40IE}$=2,82°.





M, mert szögelfordulást keresünk

$p(\xi) = \frac{p}{3L}\xi$

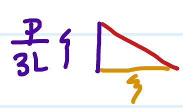
EE

$x: A_x = 0$

$y: A_y + B_y - \frac{1}{2}p\,3L = 0$

$z: -\frac{3}{2}pL^2 + B_y 3L - M = 0 \longrightarrow B_y = \frac{M}{3L} + \frac{pL}{2}$

$A_y = \frac{1}{2}p\,3L - B_y = pL - M/3L$



$U = U_{Mh}$

$$M_h(\xi) = -B_y\xi + M + \underbrace{\frac{p}{6L}\xi\cdot\xi}_{T_\Delta}\cdot\underbrace{\frac{\xi}{3}}_{\text{erőkar}}$$

$$M_h(\xi) = M - \frac{M}{3L}\xi - \frac{pL}{2}\xi + \frac{p}{18L}\xi^3 = M\left(1 - \frac{\xi}{3L}\right) + \frac{p\xi}{2}\left(\frac{\xi^2}{9L} - L\right)$$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\int_0^{3L} M_h \frac{\partial M_h}{\partial M}\, d\xi \qquad\qquad \frac{\partial M_h}{\partial M} = 1-\frac{\xi}{3L}$$

M=0Nm

$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\int_0^{3L}\frac{p\xi}{2}\left(\frac{\xi^2}{9L}-L\right)\left(1-\frac{\xi}{3L}\right)d\xi = \frac{p}{2IE}\int_0^{3L}\left(-\frac{\xi^4}{27L^2}+\frac{\xi^3}{9L}+\frac{\xi^2}{3}-L\xi\right)d\xi$$

$$\varphi_B = \frac{p}{2IE}\left[-\frac{\xi^5}{135L^2}+\frac{\xi^4}{36L}+\frac{\xi^3}{9}-\frac{1}{2}L\xi^2\right]_0^{3L} = \frac{p9L^2}{2IE}\left[-\frac{1}{2}L+\frac{L}{3}+\frac{L}{4}-\frac{L}{5}\right]$$

$$\varphi_B = \frac{-pL^3\,21}{40IE} = -0{,}0492\,\mathrm{rad} = -2{,}82^\circ$$

↺ irányba 2,82° (ellentétesen, mint M)

Példa 7.6

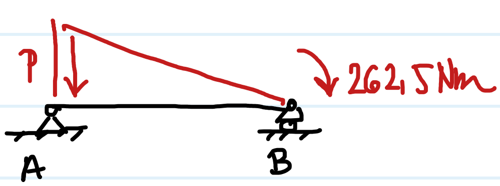
7.6. Példa. Mekkora és milyen értelmű M_B nyomatékot kell alkalmazni az előző példánál a B helyen ha azt szeretnénk, hogy itt a szögelfordulás zérus legyen?
Megoldás: $M_B = \frac{21pL^2}{40} = 262,5$ Nm óramutató járásával megegyezően.

$$0 = \frac{1}{IE}\int_0^{3L} M_h \frac{\partial M_h}{\partial M}\, d\xi = \frac{1}{IE}\int_0^{3L}\left(M\left(1-\frac{\xi}{3L}\right)+\frac{p\xi}{2}\left(\frac{\xi^2}{9L}-L\right)\right)\left(1-\frac{\xi}{3L}\right)d\xi =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{IE}\int_0^{3L}\frac{p\xi}{2}\left(\frac{\xi^2}{9L}-L\right)\left(1-\frac{\xi}{3L}\right)d\xi}_{=\varphi_B = -0{,}0492\,\mathrm{rad}} + \frac{M}{IE}\int_0^{3L}\left(1-\frac{\xi}{3L}\right)^2 d\xi = 0$$

$$\frac{M}{IE}\int_0^{3L}\left(1-\frac{2\xi}{3L}+\frac{\xi^2}{9L^2}\right)d\xi = \frac{M}{IE}\left[\xi-\frac{\xi^2}{3L}+\frac{\xi^3}{27L^2}\right]_0^{3L} = \frac{M3L}{IE}\left[1-1+\frac{1}{3}\right]$$

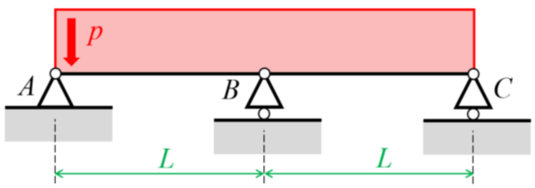
$$\frac{ML}{IE} = \frac{21pL^3}{40IE} \longrightarrow M = \frac{21pL^2}{40} = 262{,}5\,\mathrm{Nm}$$



Példa 7.8 (Statikailag határozatlan szerkezetek)

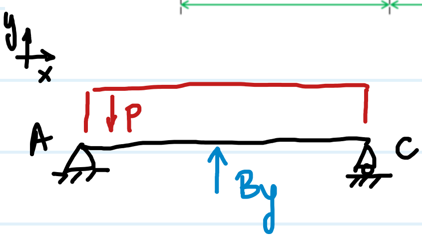
7.8. Példa. Hányszor nagyobb erő ébred az alábbi tartó B alátámasztásánál, mint az A vagy C helyen? Rajzoljuk fel a tartó igénybevételi függvényeit paraméteresen! A tartó anyaga és keresztmetszete végig állandó.

Megoldás: $F_B/F_A = 10/3$.



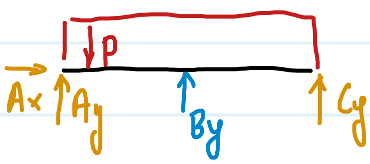
3 egyenlet, 4 ismeretlen

A_x, A_y, B_y, C_y



és $f_B = 0$ lényegében + 1 egyenlet

SZTÁ



$f_B = 0$

EE

$x: \; A_x = 0$

$y: \; A_y + B_y + C_y - 2Lp = 0$

$z: \; B_y L + C_y 2L - p2L^2 = 0$

$$U = U_{M_h} \; ; \quad f_B = \frac{1}{IE} \int_{(2L)} M_h \frac{\partial M_h}{\partial B_y} dx = 0$$

ismeretleneket B_y függvényében kell kifejezni

$$C_y = pL - \frac{1}{2} B_y \; ; \quad A_y = 2Lp - \frac{1}{2} B_y - pL = pL - \frac{1}{2} B_y = C_y$$

$$M_{h_1}(x) = -A_y x + \frac{1}{2} p x^2 \qquad 0 < x < L$$

$$M_{h_2}(x) = -A_y x + \frac{1}{2} p x^2 - B_y (x - L) \qquad L < x < 2L$$

$$M_{h_1}(x) = \frac{1}{2} B_y x - pLx + \frac{1}{2} p x^2 \; ; \quad M_{h_2}(x) = \frac{1}{2} p x^2 - pLx + B_y \left(L - \frac{1}{2} x\right)$$

$$\frac{\partial M_{h_1}}{\partial B_y} = \frac{1}{2} x \; ; \qquad \frac{\partial M_{h_2}}{\partial B_y} = L - \frac{1}{2} x$$

$$f_B = \frac{1}{IE} \left[\int_0^L M_{h_1} \frac{\partial M_{h_1}}{\partial B_y} dx + \int_L^{2L} M_{h_2} \frac{\partial M_{h_2}}{\partial B_y} dx \right] = 0$$

$$f_B = \frac{1}{IE}\left(\int_0^L \left(\frac14 B_y x^2 + \frac14 p x^3 - \frac12 pLx^2\right)dx + \int_L^{2L}\left(B_y\left(L-\frac12 x\right)^2 - px\left(L-\frac12 x\right)^2\right)dx\right) = 0$$

$$f_B = \frac{1}{IE}\left(\left[\frac{B_y x^3}{12} + \frac{px^4}{16} - \frac{pLx^3}{6}\right]_0^L + \left[B_y\left(L^2x + \frac{x^3}{12} - \frac{Lx^2}{2}\right) - p\left(\frac{L^2x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{16}\right)\right]_L^{2L}\right) = 0$$

$$\left[\frac{pL^4}{8} - \frac{pL^4}{6} + B_y\left(2L^3 - L^3 + \frac{8L^3}{12} - \frac{L^3 4}{2} + \frac{L^3}{2}\right) - p\left(\frac{L^4 4}{2} - \frac{L^4}{2} - \frac{L^4 8}{3} + \frac{L^4}{3} + \frac{L^4 16}{16}\right)\right]\frac{1}{IE} = 0$$

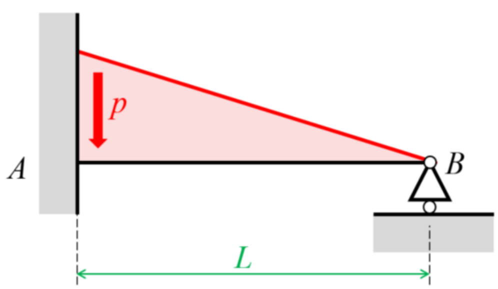
$$f_B = \frac{1}{IE}\left(-pL^4\frac{5}{24} + \frac{B_yL^3}{6}\right) = 0 \Rightarrow B_y = \frac54 pL$$

$$A_y = C_y = pL - \frac12 B_y = pL\left(1 - \frac58\right) \qquad \frac{B_y}{A_y} = \frac{5/4}{3/8} = \frac54 \cdot \frac83 = \frac{10}{3}$$

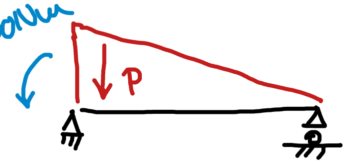
Példa 7.9

7.9. Példa. Mekkora lehet a p értéke az alábbi tartónál ha azt szeretnénk, hogy a befogásnál a hajlítónyomaték 200 Nm legyen? $L = 2$ m. A tartó keresztmetszete és anyaga állandó.

Megoldás: $p = 0,75$ N/mm=750 N/m.

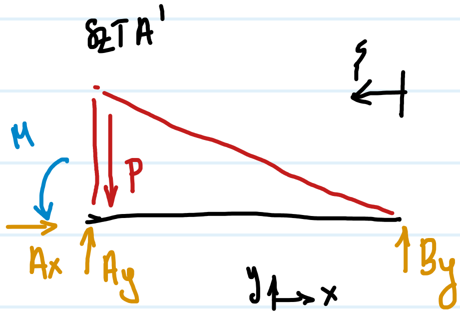


$\Rightarrow$



ÉS $\varphi_A = 0$, mert befogás

SZTA'



EE

x: $A_x = 0$

y: $A_y + B_y - \frac12 pL = 0$

z: $M - \frac16 pL^2 + B_y L = 0$

$$U = U_{Mh} \longrightarrow \varphi_A = \frac{1}{IE}\int_{(L)} M_h \frac{\partial M_h}{\partial M}dx = 0$$

$$B_y = \frac16 pL - M/L, \qquad A_y = \frac12 pL - B_y = \frac13 pL + M/L$$

$$p(\xi) = \frac{p}{L}\xi \ ; \quad M_h(\xi) = -B_y\xi + \frac{p}{L}\xi^2\cdot\frac12\cdot\frac{\xi}{3} = -B_y\xi + \frac16\frac{p}{L}\xi^3$$

$$M_h(\xi) = \frac{M}{L}\xi - \frac{1}{6}pL\xi + \frac{1}{6}\frac{p}{L}\xi^3 = \frac{M}{L}\xi + \frac{1}{6}p\left(\frac{\xi^3}{L} - L\xi\right)$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial M} = \frac{\xi}{L} \quad ; \quad \varphi_B = \frac{1}{IE}\int_0^L M_h \frac{\partial M_h}{\partial M}\, d\xi = 0$$

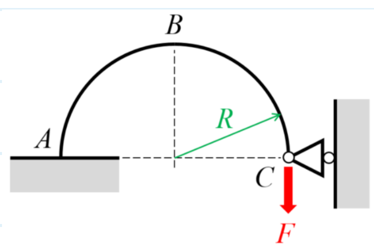
$$\varphi_A = \frac{1}{IE}\int_0^L \left(\frac{M\xi^2}{L^2} + \frac{1}{6}p\left(\frac{\xi^4}{L^2} - \xi^2\right)\right)d\xi = \frac{1}{IE}\left[\frac{M\xi^3}{3L^2} + \frac{1}{6}p\left(\frac{\xi^5}{5L^2} - \frac{\xi^3}{3}\right)\right]_0^L = 0$$

$$\varphi_A = \frac{1}{IE}\left(\frac{ML}{3} + \frac{1}{6}p\left(\frac{L^3}{5} - \frac{L^3}{3}\right)\right) = \frac{1}{IE}\cdot\frac{1}{15\cdot 3}\left(15ML - pL^3\right) = 0$$

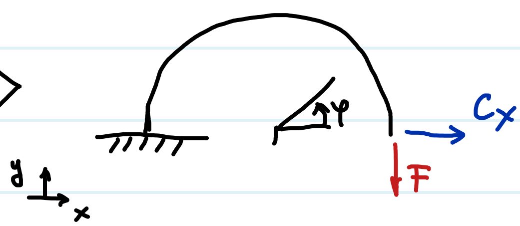
$$p = \frac{15M}{L^2} = 750\ \mathrm{N/m}$$

Példa 7.10

7.10. Példa. Számítsuk ki az alábbi tartónál a reakciók értékét! A tartó anyaga és keresztmetszete végig állandó.
Megoldás: $F_C = \frac{4FAR^2}{\pi(I+AR^2)} \rightarrow$, $F_{Ax} = \frac{4FAR^2}{\pi(I+AR^2)} \leftarrow$, $F_{Ay} = F \uparrow$, $M_A = 2FR \circlearrowleft$.

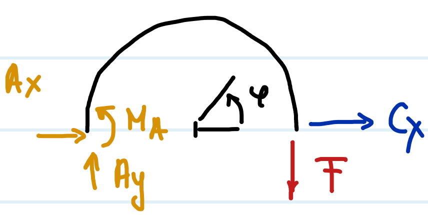


$\Rightarrow$

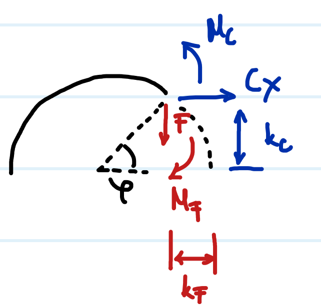


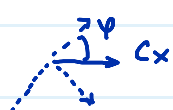
és $\quad u_c = 0$

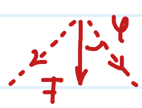
SZTÁ



EE-k nem kellenek most meg, mert a reakcióerők nélkül is felírhatók az igénybevételi fgv.-ek (elég a végén kiszámítom őket)







V(φ) most nem kell, mert

$u_V \approx 0$

$$N(\varphi) = C_x \sin\varphi + F\cos\varphi$$

$$M_h(\varphi) = FR(1-\cos\varphi) - C_x R\sin\varphi$$

$$U = U_N + U_{M_h}$$

$$u_c = \frac{1}{AE}\int_{(s)} N\frac{\partial N}{\partial C_x}\,ds + \frac{1}{IE}\int_{(s)} M_h\frac{\partial M_h}{\partial C_x}\,ds = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial C_x} = \sin\varphi \quad ; \quad \frac{\partial M_h}{\partial C_x} = -R\sin\varphi$$

$$u_C = \frac{1}{AE}\int_0^{\pi}\left(C_x\sin^2\varphi + F\sin\varphi\cos\varphi\right)R\,d\varphi + \frac{1}{IE}\int_0^{\pi}\left(C_xR^2\sin^2\varphi + FR^2\cos\varphi\sin\varphi - FR^2\sin\varphi\right)R\,d\varphi$$

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos2\varphi}{2} \; ; \quad \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$$

$$u_C = \frac{R}{AE}\left[C_x\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin2\varphi}{4}\right) - F\frac{1}{4}\cos(2\varphi)\right]_0^{\pi} + \frac{R^3}{IE}\left[C_x\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin2\varphi}{4}\right) - \frac{F}{4}\cos(2\varphi) + F\cos\varphi\right]_0^{\pi} = 0$$

$$u_C = \frac{R}{E}\left[\frac{C_x}{A}\frac{\pi}{2} + \frac{R^2}{I}\left(C_x\frac{\pi}{2} - F - F\right)\right] = 0$$

$$C_x\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{R^2}{I}\right) = 2F\frac{R^2}{I} \Rightarrow C_x = \frac{4FR^2A}{\pi(I+R^2A)}$$

EE

$x:\; A_x + C_x = 0$ $\qquad A_x = -C_x = -\dfrac{4FR^2A}{\pi(I+R^2A)}$

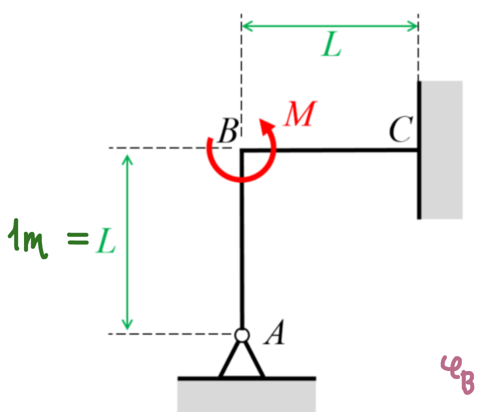
$y:\; A_y - F = 0$ $\qquad A_y = F$

$z:\; M_A - F2R = 0$ $\qquad M_A = 2RF$

Példa 7.11

7.11. Példa. Mekkora M^* nyomatékot kell alkalmaznunk, ha azt szeretnénk, hogy a B keresztmetszet elfordulása 1° legyen? Az alakváltozási energia felírásakor a normál igénybevételből adódó tagot a hajlítónyomatéki igénybevételből származó tag mellett elhanyagolhatjuk. A tartó keresztmetszete 12 mm élhosszúságú négyzet, rugalmassági modulusza 200 GPa.

Megoldás: $M^* = 42223$ Nmm.

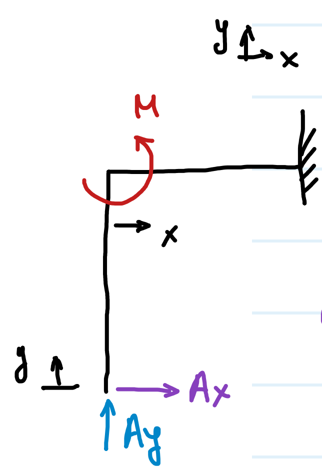


$U \cong U_{Mh}$

reakcióerők számítása

(kifejezése M függvényeként)

$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\int_{(s)} M_h\frac{\partial M_h}{\partial M}\,ds = \frac{\pi}{180}$$



$u_A = 0$

$v_A = 0$

$$M_{h_1}(y) = A_x y \quad ; \quad M_{h_2}(x) = M + A_x L - A_y x$$

$$v_A = \frac{1}{IE}\left[\int_0^L M_{h_1}\frac{\partial M_{h_1}}{\partial A_y}dy + \int_0^L M_{h_2}\frac{\partial M_{h_2}}{\partial A_y}dx\right] = 0$$

$$u_A = \frac{1}{IE}\left[\int_0^L M_{h_1}\frac{\partial M_{h_1}}{\partial A_x}dy + \int_0^L M_{h_2}\frac{\partial M_{h_2}}{\partial A_x}dx\right] = 0$$

$$\frac{\partial M_{h_1}}{\partial A_y} = 0, \quad \frac{\partial M_{h_2}}{\partial A_y} = -x \qquad \frac{\partial M_{h_1}}{\partial A_x} = y, \quad \frac{\partial M_{h_2}}{\partial A_x} = L$$

$$v_A = \frac{1}{IE}\int_0^L \left(A_y x^2 - Mx - A_x L x\right)dx = \frac{1}{IE}\left[\frac{A_y x^3}{3} - \frac{Mx^2}{2} - \frac{A_x L x^2}{2}\right]_0^L = 0$$

$$v_A = \frac{L^2}{IE6}\left(2L A_y - 3M - 3L A_x\right) = 0 \quad 1$$

$$u_A = \frac{1}{IE}\left(\int_0^L A_x y^2 dy + \int_0^L \left(ML + A_x L^2 - A_y x L\right)dx\right) = \frac{1}{IE}\left(\left[\frac{A_x y^3}{3}\right]_0^L + \left[x\left(ML + A_x L^2\right) - \frac{A_y x^2 L}{2}\right]_0^L\right)$$

$$u_A = \frac{1}{IE}\left(\frac{A_x L^3}{3} + A_x L^3 + ML^2 - \frac{A_y L^3}{2}\right) = \frac{L^2}{6IE}\left(8A_x L + 6M - 3A_y L\right) = 0 \quad 2$$

1: $A_y = \frac{3}{2}A_x + \frac{3}{2}\frac{M}{L}$ 2: $8A_x L + 6M - \frac{9}{2}A_x L - \frac{9}{2}M = 0$

$$\frac{1}{2}\left[7A_x L + 3M\right] = 0 \longrightarrow A_x = -\frac{3}{7}\frac{M}{L} \qquad A_y = \frac{6}{7}\frac{M}{L}$$

Tehát $M_{h_1}(y) = -\frac{3}{7}\frac{M}{L}y$ $M_{h_2}(x) = M - \frac{3}{7}M - \frac{6}{7}\frac{M}{L}x = \frac{M}{7}\left[4 - \frac{6x}{L}\right]$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\left[\int_0^L M_{h_1}\frac{\partial M_{h_1}}{\partial M}dy + \int_0^L M_{h_2}\frac{\partial M_{h_2}}{\partial M}dx\right] = \frac{\pi}{180}$$

$$\frac{\partial M_{h_1}}{\partial M} = -\frac{3y}{7L} \qquad \frac{\partial M_{h_2}}{\partial M} = \frac{1}{7}\left[4 - \frac{6x}{L}\right]$$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\left[\int_0^L M\frac{9y^2}{49L^2}dy + \int_0^L M\frac{1}{49}\left(4 - \frac{6x}{L}\right)^2 dx\right] = \frac{\pi}{180}$$

$$\left[\frac{3x^3}{49L^2}\right]_0^L + \frac{1}{49}\left[16x + \frac{12x^3}{L^2} - 24\frac{x^2}{L}\right]_0^L = \frac{IE\pi}{180M}$$

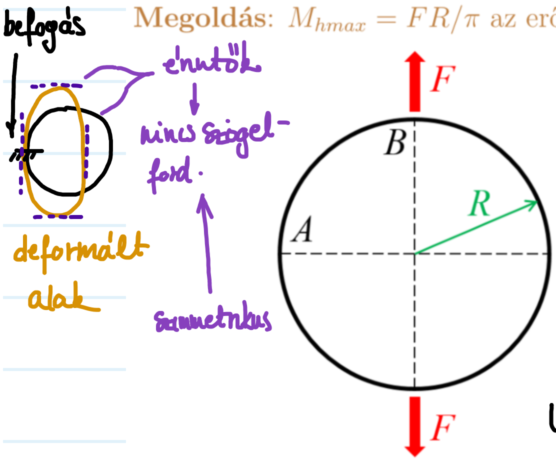
$$\frac{49IE\pi}{180M} = 3L + 16L + 12L - 24L = 7L \Rightarrow M = \frac{7IE\pi}{180L} = \frac{7a^4E\pi}{12\cdot 180L} = 42{,}223\ \mathrm{Nm}$$

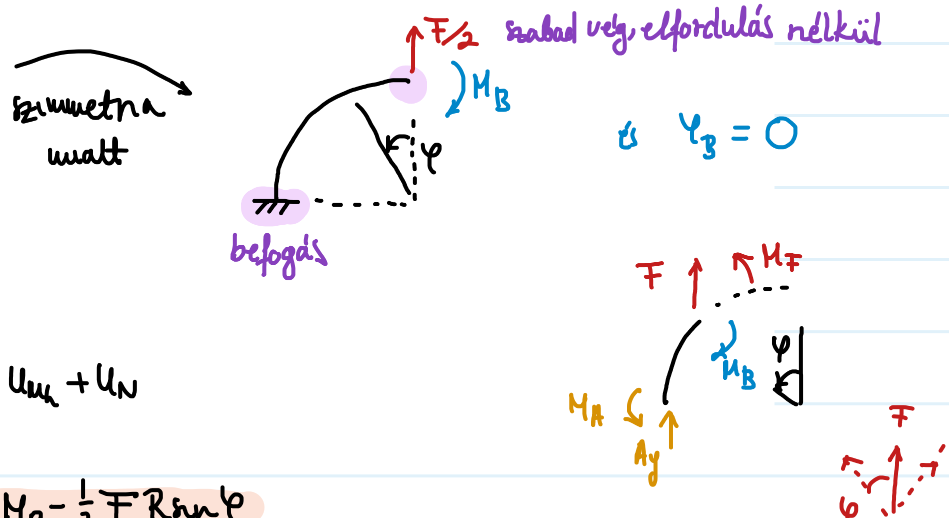
$$I = \frac{a^4}{12}$$

Példa 7.12

7.12. Példa. Határozzuk meg az alábbi keretnél a hajlítónyomatéki igénybevétel eloszlását! Mekkora a maximális (abszolút értelemben) hajlítónyomaték és hol ébred? Hol lesz a hajlítónyomaték zérus értékű? A tartó anyaga és keresztmetszete végig állandó.

Megoldás: $M_{hmax} = FR/\pi$ az erő bevezetésénél; $M_h = 0$ B-től A felé haladva 39,54°-t.





$$U = U_M + U_N$$

$$N(\varphi) = \frac{1}{2}F\sin\varphi \quad ; \quad M_h(\varphi) = M_B - \frac{1}{2}FR\sin\varphi$$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\int_0^{\pi/2} M_h \frac{\partial M_h}{\partial M_B} R\,d\varphi + \frac{1}{EA}\int_0^{\pi/2} N\frac{\partial N}{\partial M_B} R\,d\varphi = 0$$

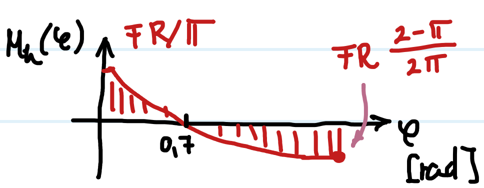
$$\frac{\partial N}{\partial M_B} = 0 \qquad \frac{\partial M_h}{\partial M_B} = 1$$

$$\varphi_B = \frac{R}{IE}\int_0^{\pi/2}\left(M_B - \frac{1}{2}FR\sin\varphi\right)d\varphi = \frac{R}{IE}\left[M_B\varphi + \frac{F}{2}R\cos\varphi\right]_0^{\pi/2} = 0$$

$$M_B\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}FR \rightarrow M_B = \frac{FR}{\pi} \longrightarrow M_h(\varphi) = FR\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\varphi\right)$$

$$M_h(\varphi^*) = 0 \longrightarrow \sin\varphi = 2/\pi \Rightarrow \varphi = 0{,}69\ \mathrm{rad}$$

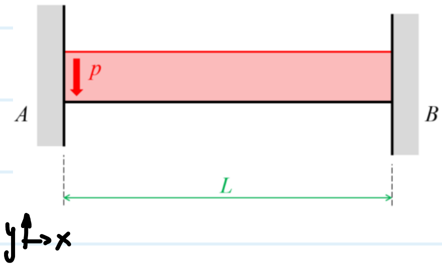
(39,54°)



Példa 7.13

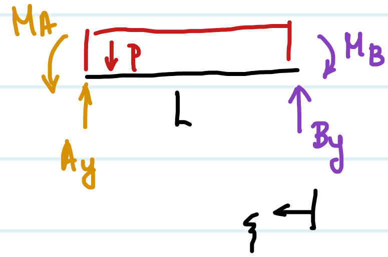
7.13. Példa. Határozzuk meg az alábbi tartónál a hajlítónyomatéki igénybevétel eloszlását! Mekkora a falakban ébredő nyomaték nagysága? Hol lesz a hajlítónyomaték zérus értékű? A tartó anyaga és keresztmetszete végig állandó.

Megoldás: $M_A = M_B = pL^2/12$; A falaktól $\frac{3-\sqrt{3}}{6}L$ helyen lesz zérus a hajlítónyomatéki igénybevétel.



nincs x irányú terhelés

$A_x = B_x = 0$ N



$\varphi_B = 0$, mert befogás

$B_y = A_y = \frac{pL}{2}$ a szimmetria miatt

$$M_h(\xi) = M_B - B_y\xi + p\frac{\xi^2}{2} = M_B - \frac{pL}{2}\xi + p\xi^2\frac{1}{2} = M_B + \frac{p\xi}{2}(\xi - L)$$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\int_0^L M_h \frac{\partial M_h}{\partial M_B}\,d\xi = 0 \qquad \frac{\partial M_h}{\partial M_B} = 1$$

$$\varphi_B = \frac{1}{IE}\int_0^L \left(M_B + \frac{p\xi^2}{2} - \frac{p\xi L}{2}\right)d\xi = \frac{1}{IE}\left[M_B\xi + \frac{p\xi^3}{6} - \frac{pL\xi^2}{4}\right]_0^L$$

$$M_B L + \frac{pL^3}{6} - \frac{pL^3}{4} = L\left(M_B - \frac{pL^2}{12}\right) = 0 \implies M_B = \frac{pL^2}{12} = M_A$$

$$M_h(\xi) = p\left(\frac{L^2}{12} + \frac{\xi}{2}(\xi - L)\right)$$

$$M_h(\xi^*) = 0$$

$$\frac{\xi^{*2}}{2} - \frac{\xi^* L}{2} + \frac{L^2}{12} = 0 \longrightarrow \xi^*_{1,2} = \frac{1}{6}\left(3L \pm \sqrt{3}L\right)$$

$\xi^*_1 = 0{,}21L$, $\xi^*_2 = 0{,}79L$

$x^*_1 = 0{,}79L$ $\qquad$ $x^*_2 = 0{,}21L$