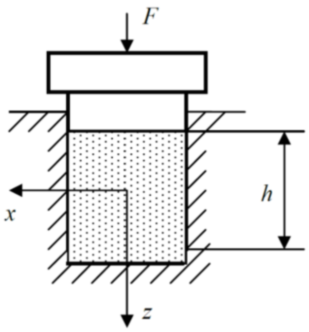
Példa 5.1

5.1. Példa. Egy $a \times a$ állandó négyzet keresztmetszetű, rugalmas betonhasábot merev fal vesz körül. A hasábot egy merev fedélen keresztül az F nyomóerővel megterheljük. Mekkora feszültségek ébrednek a hasáb belső pontjaiban és mekkora lesz a h magasságú hasáb zsugorodása? Adatok: $a = 200$ mm, $F = 160$ kN, $E = 50$ GPa, $\nu = 0,35$, $h = 1$ m.
Megoldás: $\varepsilon_z = -4,985 \times 10^{-5}$, $\sigma_x = \sigma_y = -2,154$ MPa, $\sigma_z = -4$ MPa, $\Delta h = -0,04985$ mm.



csak z irányba tud alakváltozni

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_z = \Delta h / h$$

$$\varepsilon_I = \varepsilon_z$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right] = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z\left(\frac{\nu}{1-2\nu}+1\right) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Külső terhelésből: $\sigma_z = -\frac{F}{a^2} = -4$ MPa

$$\sigma_z = \varepsilon_z \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \longrightarrow \varepsilon_z = -4,985 \cdot 10^{-5}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,985 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta h = \varepsilon_z \cdot h = -0,04985 \text{ mm}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_z = -2,154 \text{ MPa}$$

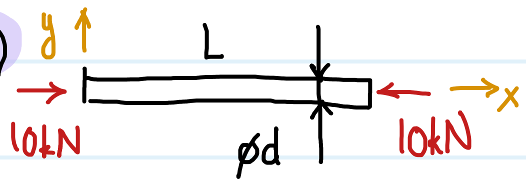
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -2,154 & 0 & 0 \\ 0 & -2,154 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Példa 5.2

5.2. Példa. Egy L hosszúságú egyenes, d átmérőjű kör keresztmetszetű, rugalmas rudat a végein ható 10 kN nagyságú nyomóerők terhelik. a) Mekkora rúd fajlagos térfogatváltozása? b) Hogyan változik ez, ha megakadályozzuk a rúd keresztirányú alakváltozását? Adatok: $L = 160$ mm, $d = 79,8$ mm, $E = 200$ GPa, $\nu = 0,3$.

Megoldás: $\varepsilon_V = -4 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_V = -7,43 \times 10^{-6}$.

a)



$$\Delta V = \varepsilon_I \quad ; \quad \sigma_x = \frac{-F \cdot 4}{d^2 \pi} = -2\,\mathrm{MPa}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{E}}\right) \rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -10^{-5}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -\nu\varepsilon_x = 3 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -4 \cdot 10^{-6}$$

b)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{gátolva van az alakvált.}$$

$$\frac{1+\nu}{E}\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu}\begin{bmatrix} \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\varepsilon}}$$

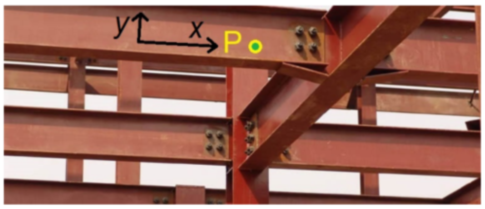
3 egyenlet, 3 ismeretlen (σ_x ugyanúgy számítható a külső terhelésből)

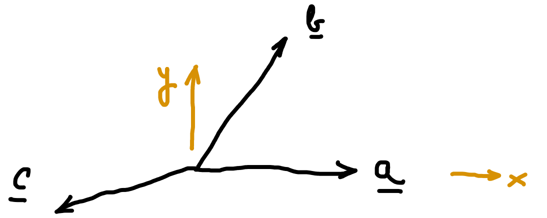
$$\varepsilon_x = \frac{-2\nu^2 - \nu + 1}{E(1-\nu)}\sigma_x = -7,43 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_I = \varepsilon_x = -7,43 \cdot 10^{-6}$$

Példa 5.3

5.3. Példa. Egy acélszerkezetet alkotó I-szelvény **P** pontjába nyúlásmérő bélyeget ragasztunk és mérjük az alakváltozásokat az a, b és c irányokban. Határozzuk meg a **P**-ben ébredő feszültségi állapotot. A mért alakváltozások és a bélyegek x-tengellyel bezárt szögei: $\varepsilon_a = 100 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_b = 50 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = -70 \times 10^{-6}$, $\alpha_a = 0°$, $\alpha_b = 70°$, $\alpha_c = 200°$. Anyagjellemzők: $E = 210$ GPa, $\nu = 0,3$.
Megoldás: $\varepsilon_x = 100 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_y = 256,649 \times 10^{-6}$, $\gamma_{xy} = -585,962 \times 10^{-6}$ $\sigma_x = 40,84$ MPa, $\sigma_y = 66,15$ MPa, $\tau_{xy} = -47,33$ MPa, $\varepsilon_1 = 481,594 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = -124,945 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_3 = -152,85 \times 10^{-6}$, $\sigma_1 = 102,487$ MPa, $\sigma_2 = 4,508$ MPa, $\sigma_3 = 0$ MPa.





$$\varepsilon_a = \varepsilon_x = 100 \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{n}_b = \begin{bmatrix} \cos\alpha_b \\ \sin\alpha_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,342 \\ 0,94 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{n}_c = \begin{bmatrix} \cos\alpha_c \\ \sin\alpha_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,94 \\ -0,342 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_b = (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}_b) \cdot \underline{n}_b = \begin{bmatrix} 0,342 \cdot \varepsilon_x + 0,94/2\, \gamma_{xy} \\ 0,342/2\, \gamma_{yx} + 0,94\varepsilon_y \\ 0,342/2\, \gamma_{zx} + 0,94/2\, \gamma_{zy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,342 \\ 0,94 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,117\varepsilon_x + 0,321\gamma_{xy} + 0,884\varepsilon_y = 50 \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_c = (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}_c) \cdot \underline{n}_c = \begin{bmatrix} -0,94\varepsilon_x - 0,342/2\, \gamma_{xy} \\ -0,94/2\, \gamma_{yx} - 0,342\varepsilon_y \\ -0,94/2\, \gamma_{zx} - 0,342/2\, \gamma_{zy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,94 \\ -0,342 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,884\varepsilon_x + 0,321\gamma_{xy} + 0,117\varepsilon_y = -70 \cdot 10^{-6}$$

2 egyenlet, 2 ismeretlen: $\varepsilon_y = 256,65 \cdot 10^{-6}$ $\quad \gamma_{xy} = -585,96 \cdot 10^{-6}$

Felületi pont: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$; ill. $\sigma_z = 0$, mert nincs felületi nyomás

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu} \begin{bmatrix} \sigma_x+\sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x+\sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x+\sigma_y \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x+\sigma_y)}{E}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

$\sigma_x, \sigma_y, \varepsilon_z \leftarrow$ 3 egyenlet, 3 ismeretlen

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -152{,}85 \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 40{,}84 & -47{,}33 & 0 \\ -47{,}33 & 66{,}15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$\sigma_1 = 102{,}49\ \text{MPa}$ $\quad$ $\sigma_2 = 4{,}51\ \text{MPa}$ $\quad$ $\sigma_3 = 0\ \text{MPa}$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 100 & -292{,}98 & 0 \\ -292{,}98 & 256{,}65 & 0 \\ 0 & 0 & -152{,}85 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$\varepsilon_1 = 481{,}59 \cdot 10^{-6}$ $\quad$ $\varepsilon_2 = -124{,}95 \cdot 10^{-6}$ $\quad$ $\varepsilon_3 = -152{,}85 \cdot 10^{-6}$