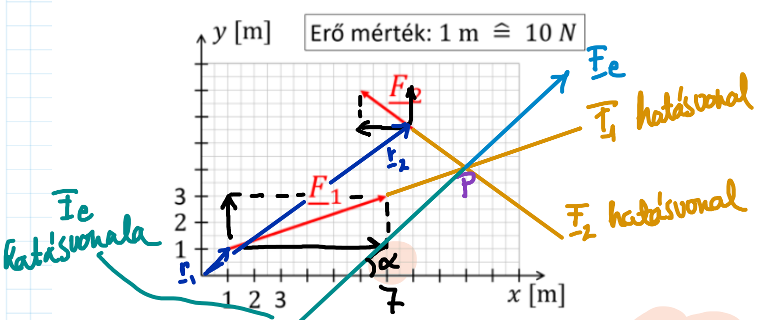
1. Gyak

Példa 1.1

1.1. Példa. Egy merev testet az ábrán megadott $\boldsymbol{F}_1$ és $\boldsymbol{F}_2$ erők terhelik. Helyettesítsük a két erőt az eredőjével, és adjuk meg az eredő erő hatásvonalának egy pontját! Milyen szöget zár be az eredő hatásvonala az x-tengellyel? A megoldást állítsuk elő szerkesztéssel és számítással is!

Megoldás: $\boldsymbol{F}_e = 40\boldsymbol{i} + 35\boldsymbol{j}$ N; $P\,(10, 4)$; $\alpha = 41,19°$.



skalár: $F_{1x} = 6 \cdot 10 = 60\,N$

$F_{1y} = 2 \cdot 10 = 20\,N$

$F_{2x} = 2 \cdot 10 = 20\,N$

$F_{2y} = 1{,}5 \cdot 10 = 15\,N$

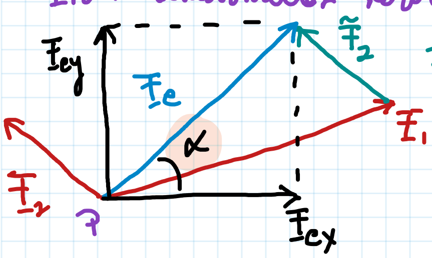
vektor.

$$\underline{F}_1 = F_{1x}\,\underline{i} + F_{1y}\,\underline{j} = F_{1x}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + F_{1y}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}60\\20\end{bmatrix} N$$

$$\underline{F}_2 = -F_{2x}\,\underline{i} + F_{2y}\,\underline{j} = \begin{bmatrix}-20\\15\end{bmatrix} N$$

$$\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = \begin{bmatrix}60\\20\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-20\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40\\35\end{bmatrix} N$$

Erő: hatásvonalhoz kötött vektor ⟹ hatásvonaluk mentén eltoljuk őket P pontba



Paralelogramma szabály szerint összegezzük

$$\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{\tilde{F}}_2$$

leolvasva: $F_{ex} = 4 \cdot 10 = 40\,N$

$F_{ey} = 3{,}5 \cdot 10 = 35\,N$

$$\underline{F}_e = F_{ex}\,\underline{i} + F_{ey}\,\underline{j} = F_{ex}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + F_{ey}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_e = \begin{bmatrix}40\\35\end{bmatrix} N$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(35/40) = 41{,}19°$$

Hatásvonal pontja számítással: $\underline{r}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} m$ $\quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix}8\\5{,}5\end{bmatrix} m$

hatásvonalak egyeneseinek egyenlete 1 pontban metszi egymást!

$$\underline{r}_1 + \lambda_1 \underline{F}_1 = \underline{r}_2 + \lambda_2 \underline{F}_2 \quad \leftarrow \text{2 egyenlet, 2 ismeretlen}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\lambda_1 60\\\lambda_1 20\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\5{,}5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\lambda_2 20\\\lambda_2 15\end{bmatrix}$$

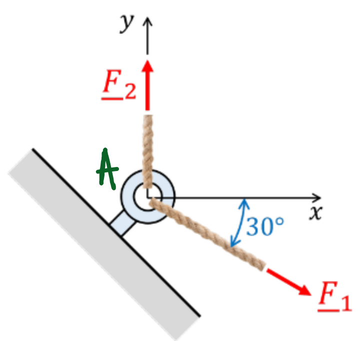
$\lambda_1 = 0{,}15$

$\lambda_2 = -0{,}1$

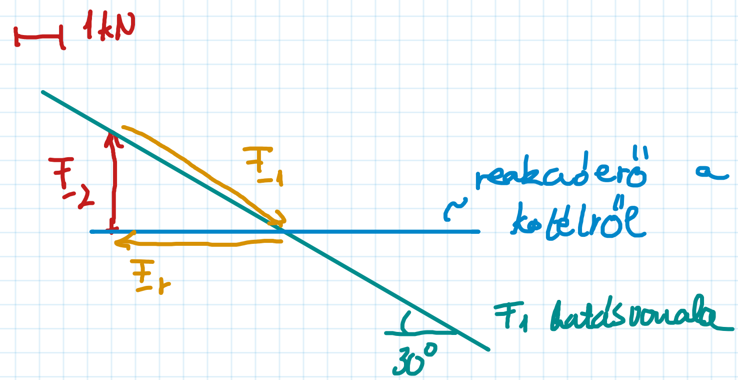
visszahelyettesítve az egyik egyenes egyenletébe: $\underline{r}_P = \underline{r}_1 + \lambda_1 \underline{F}_1 = \begin{bmatrix}10\\4\end{bmatrix} m$

Példa 1.3

1.3. Példa. Mekkora legyen az $\boldsymbol{F}_1$ erő nagysága ha azt szeretnénk, hogy a kötelekről átadódó erők eredőjének ne legyen függőleges komponense? Mekkora ekkor a kötelekről átadódó eredő erő x-irányú összetevője? Az $\boldsymbol{F}_2$ erő nagysága 2 kN.
Megoldás: $F_1 = 4$ kN; $F_{ex} = 3,464$ kN.



3 erő egyensúlya
- hatásvonalaik 1 pontban metszik egymást ✓ A pont
- záródó vektorháromszöget alkotnak



azaz $F_1 \sin\alpha = F_2 \Rightarrow F_1 = 4\,kN$

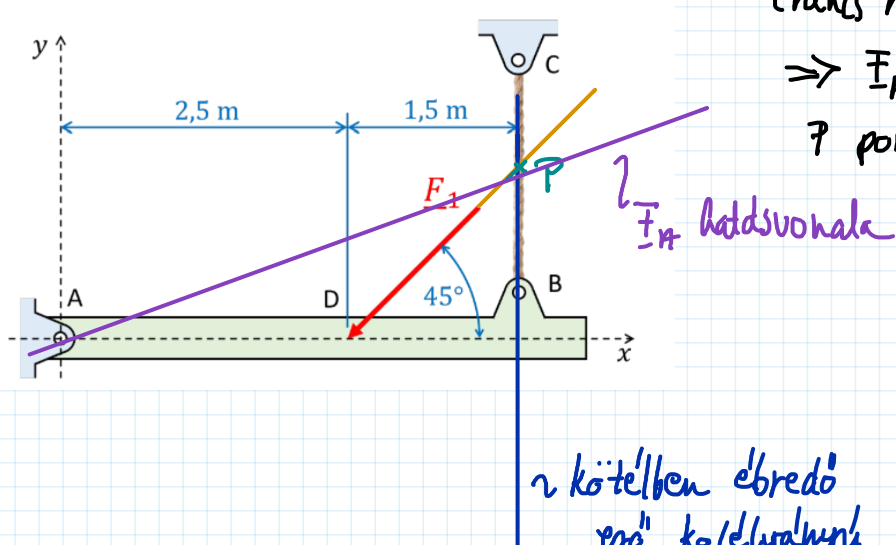
$F_{ex} = F_{1x} = F_1 \cos\alpha = 3,464\,kN$

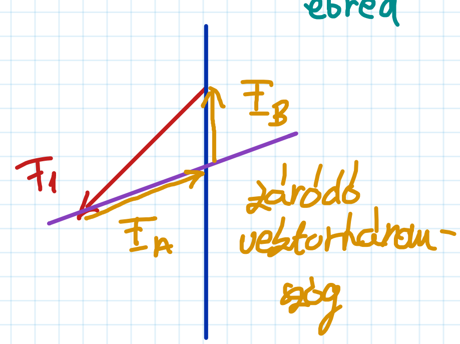
megjegyzés szerkesztésről leolvasva 3,5 kN-t kapunk, mivel 7 egység hossza F_r

Példa 1.4

1.4. Példa. A vízszintes rúd az A helyen csuklósan van megfogva, B helyen pedig kötéllel van felfüggesztve. A rudat a D pontjában a berajzolt $F_1 = 3$ kN nagyságú erő terheli úgy, hogy a rúd, a fonál és az erő közös síkban fekszik. A rúd és fonál súlyától eltekinthetünk. Mekkora erő adódik át a rúdra az A csuklónál egyensúly esetén? Mekkora a kötélben ébredő erő?
Megoldás: $\boldsymbol{F}_A = 2121,32\boldsymbol{i} + 795,495\boldsymbol{j}$ N; $F_B = 1325,83$ N.

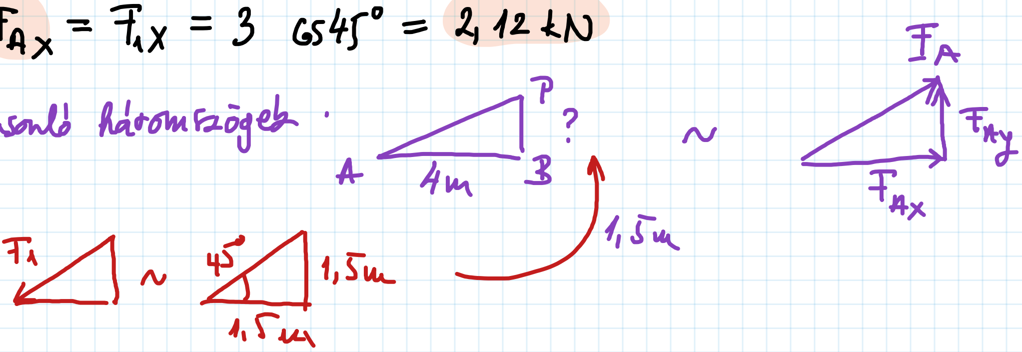
A pontban ébredő erőnek egyensúly esetén nem lehet nyomatéka P pontra, hisz a 3 erő közül 2-nek átmegy rajta a hatásvonala (nincs rá nyomatékuk)
$\Rightarrow$ F_A hatásvonala átmegy P ponton, és A ponton
ebben a pontban ébred





$F_{Ax} = F_{1x} = 3 \cos 45° = 2{,}12\ kN$

hasonló háromszögek:



$$\frac{F_{Ax}}{F_{Ay}} = \frac{4}{1{,}5}$$

$\Downarrow$

$F_{Ay} = 0{,}795\ kN$

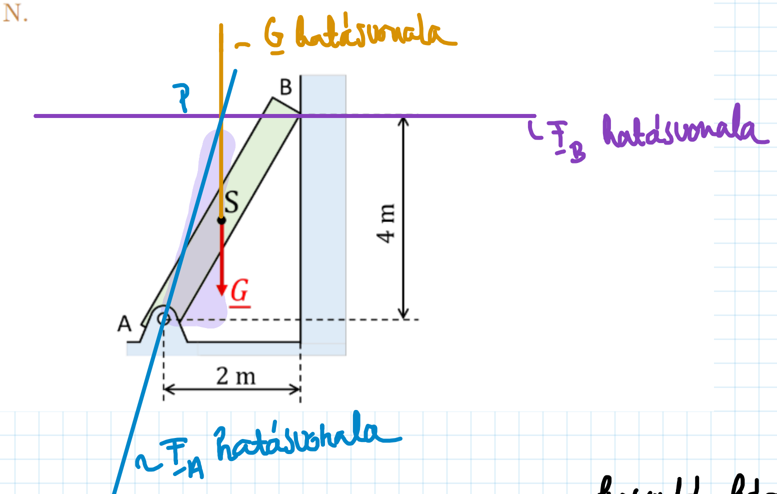
$$F_A = F_{Ax}\, \underline{i} + F_{Ay}\, \underline{j} = \begin{bmatrix} 2{,}12 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} kN$$

$$\underline{F}_A + \underline{F}_B + \underline{F}_1 = \underline{0} \implies \underline{F}_B = -\begin{bmatrix} 2{,}12 \\ 0{,}8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2{,}12 \\ -2{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1{,}33 \end{bmatrix} kN$$

Példa 1.6

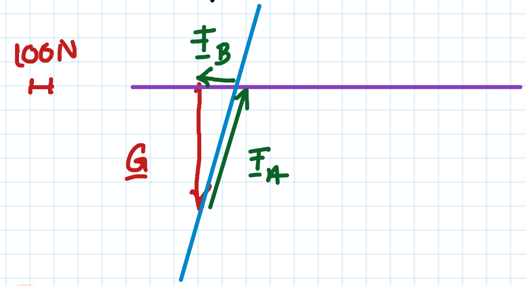
1.6. Példa. A $G = 500$ N súlyú rúd A vége csuklósan rögzített, B vége a teljesen sima falnak támaszkodik. Határozzuk meg a reakcióerőket szerkesztéssel és számítással!

Megoldás: $\boldsymbol{F}_A = 125\boldsymbol{i} + 500\boldsymbol{j}$ N; $F_A = 515{,}388$ N, $F_B = 125$ N.



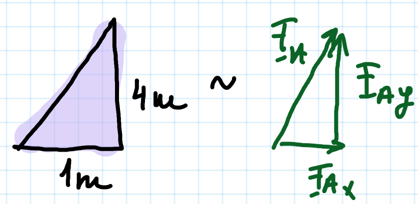
Teljesen sima ⇒ nincs súrlódás

⇒ reakcióerő iránya a felületre normális komponenssel rendelkezik csak!



$F_{Ay} = G = 500\ N$

hasonló háromszögek:



$$\frac{F_{Ay}}{F_{Ax}} = \frac{4m}{1m} \implies F_{Ax} = 125\ N$$

szerkesztésből leolvasva: F_{Ax} : 1,5 egység, F_{Ay} : 5 egység $\Big\}$ $\tilde{F}_A = \begin{bmatrix} 150 \\ 500 \end{bmatrix} N$

számítás: $F_A = \begin{bmatrix} 125 \\ 500 \end{bmatrix} N$

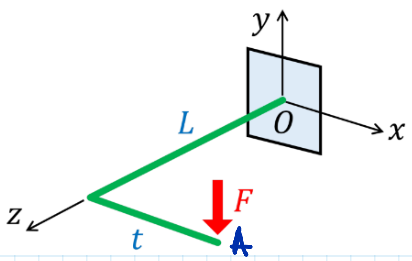
$$\underline{F}_A + \underline{G} + \underline{F}_B = \underline{0} \implies \underline{F}_B = -\begin{bmatrix} 0 \\ -500 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 125 \\ 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -125 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

szerkesztés szerint $\tilde{F}_B = \begin{bmatrix} -150 \\ 0 \end{bmatrix} N$

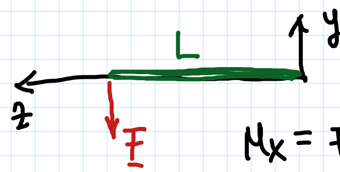
Példa 2.3

2.3. Példa. Az $L = 2$ m és $t = 30$ cm-es egyenes szakaszokból álló merev törtvonalú tartó az O pontban mereven rögzített a környező falhoz. A tartó terhelése a végén működő y-tengellyel párhuzamos $F = 20$ N nagyságú koncentrált erő. Határozzuk meg ezen erő forgató hatását a bejelölt koordinátatengelyek körül!

Megoldás: $M_x = 40$ Nm, $M_y = 0$, $M_z = -6$ Nm.

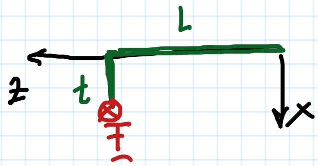


x tengely körül forgatás



$M_x = F \cdot L = 40\,\mathrm{Nm}$

y tengely körül forgatás

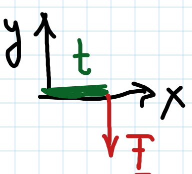


$F \parallel y$

$\Downarrow$

nem forgat y körül!

z tengely körül forgatás



$M_z = -F \cdot t = -6\,\mathrm{Nm}$

JOBB KÉZ SZABÁLY!

redukciós képlettel:

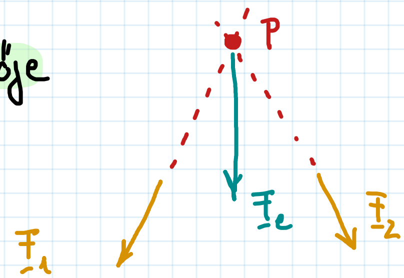
$$M_O = r_{OA} \times F = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 - (L\,(-F)) \\ -[t \cdot 0 - L \cdot 0) \\ t \cdot (-F) - 0 \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$M_O = \begin{bmatrix} L \cdot F \\ 0 \\ -F\,t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \mathrm{Nm}$$

2. Gyak

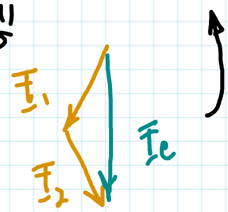
Elméleti összefoglaló

2 nem párhuzamos erő eredője



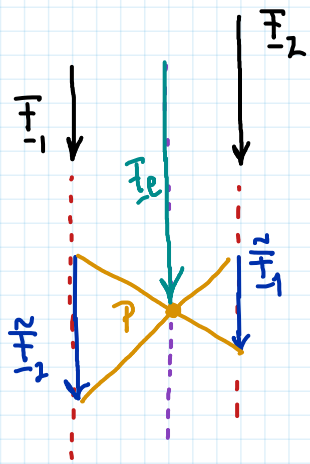
F_e hatásvonala átmegy a 2 erő közös hatásvonala által meghatározott ponton (P)

nagysága nyílfolyammal szerkeszthető



berajzolva F_e-t megkaptuk

2 párhuzamos erő eredője



1 erők áthelyezése a másik erő hatásvonalára

2 kezdő és végpontok összekötése

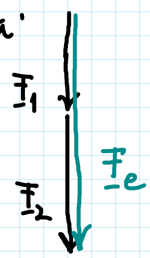
↳ P pont

↓

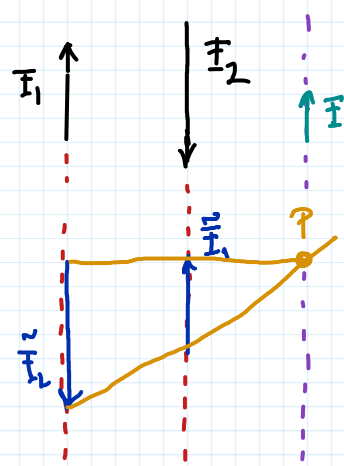
eredő erő hatásvonalának pontja

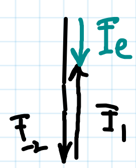
3. eredő erő berajzolása eredő erő nagyságának megszerkesztése után

nagysága:

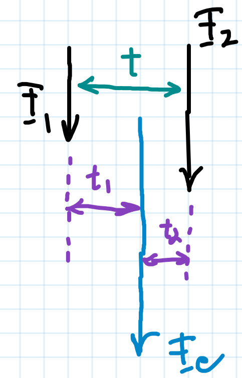


ellentétes értelmű párhuzamos erőknél a szerkesztés analóg módon történik





Számítással azonos értelem esetén

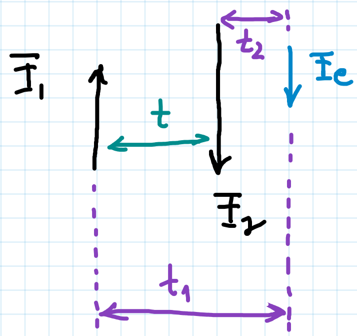


$$t_1 + t_2 = t$$

$$F_1 \cdot t_1 = F_2 \, t_2$$

$$F_1 \, t_1 = F_2 \, (t - t_1)$$

ellentétes értelem esetén



$$t_1 = t + t_2$$

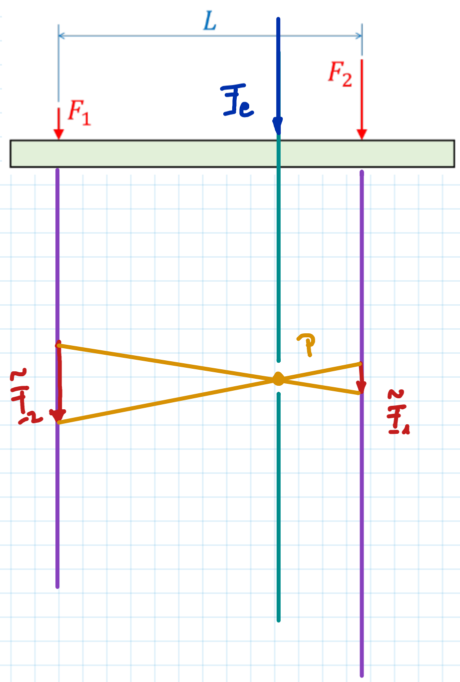
$$F_1 \, t_1 = F_2 \cdot t_2$$

$$F_1 \, t_1 = F_2 \, (t_1 - t)$$

Példa 2.4

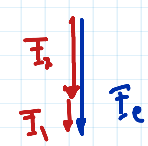
2.4. Példa. Egy merev test terhelése az egymással párhuzamos $F_1 = 4$ kN és $F_2 = 10$ kN nagyságú erők, melyek távolsága $L = 7$ m. Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással is a két erőt helyettesítő eredő F_e erő nagyságát és helyét! Mekkora nagyságú, milyen irányú és értelmű erőt kell működtetnünk, hogy a vizsgált merev test egyensúlyban legyen?

Megoldás: $F_e = 14$ kN lefele, 5 m-re F_1-től F_2 irányában.



erőmérték:
4 kN

hosszmérték:
1 m



$$F_1 \, t_1 = F_2 \, t_2$$

$$t_1 + t_2 = t$$

$$F_1 \, t_1 = F_2 \, (t - t_1)$$

$$t_1 \, (F_1 + F_2) = F_2 \, t$$

$$t_1 = \frac{F_2 \, t}{F_1 + F_2} = \frac{10 \cdot 7}{4 + 10} = \frac{70}{14} = 5 \, m$$

$$F_e = F_1 + F_2 = 14 \, kN$$

Egyensúlyhoz F_e nagyságú, de azzal ellentétes értelmű erőt kell működtetnünk

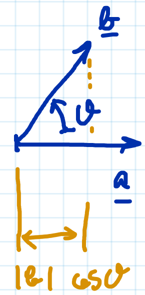
Vektoralgebra

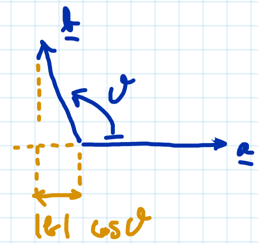
skaláris szorzás

- projekció
- egyik vektor előjelhelyes vetületének szorzata a másik vektor hosszával

$\underline{a}\ \underline{b} = |\underline{a}|\ |\underline{b}| \cdot \cos\vartheta$

ϑ lehet tompaszög





Megjegyz. • bázisvektorok önmagukkal vett skalár-szorzata 1

→ egymástól lineárisan független egységvektorok

pl $\underline{i} \cdot \underline{i} = 1 \qquad \underline{j}\ \underline{j} = 1 \qquad \underline{k}\ \underline{k} = 1$

• merőleges vektorok skalárszorzata 0

azaz $\underline{i}\ \underline{j} = \underline{j} \cdot \underline{k} = \underline{i}\ \underline{k} = 0$

• tetszőleges $\underline{a}$ vektor skalárkomponensei megkaphatók

$\underline{a}\ \underline{i} = a_x \qquad \underline{a}\ \underline{j} = a_y \qquad \underline{a} \cdot \underline{k} = a_z$

• szorzás sorrendje felcserélhető

$\underline{a}\ \underline{b} = \underline{b}\ \underline{a}$

$$\boxed{\underline{a}\ \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

számítás módja

Vektor hossza számítható

$\underline{a}\ \underline{a} = |\underline{a}|\ |\underline{a}|\ \cos 0° = |\underline{a}|^2$

$\underline{a}\ \underline{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \qquad |\underline{a}| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$

Példa

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 7\,(-2) + (-9)\,8 + 3 \cdot 5 = -71$

$\underline{a}$ hossza: $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}\ \underline{a}} = \sqrt{7^2 + (-9)^2 + 3^2} \cong 11{,}79$

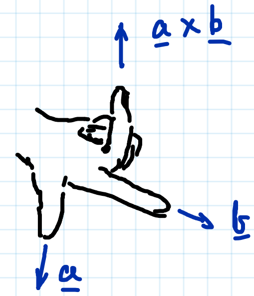
$\underline{b}$ hossza: $|\underline{b}| = \sqrt{\underline{b}\ \underline{b}} = \sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 5^2} \cong 9{,}64$

https://www.youtube.com/watch?v=LyGKycYT2v0&ab_channel=3Blue1Brown

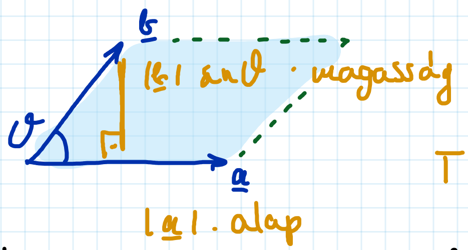
Vektoriális szorzat

irányított terület $\qquad \underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$

- $\underline{c}$ nagysága $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített paralelogramma területe
- $\underline{c}$ hatásvonala $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített síkra merőleges
- $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ jobbsodrású rendszert alkotnak



$$|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}|\,|\underline{b}| \sin\vartheta$$



T = alap · magasság

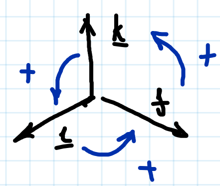
Megjegyz.: • $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ jobbsodrású rendszere miatt: $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

sorrend NEM cserélhető fel!

- párhuzamos $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok esetén $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$

bázisvektoroknál: $\underline{i} \times \underline{i} = \underline{0} \qquad \underline{j} \times \underline{j} = \underline{0} \qquad \underline{k} \times \underline{k} = \underline{0}$

- bázisvektorok vektoriális szorzata

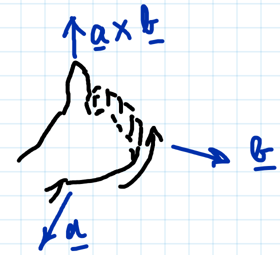


$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$

$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$

$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$

stb



SZÁMÍTÁS

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \underline{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \underline{j}(a_z b_x - b_z a_x) + \underline{k}(a_x b_y - b_x a_y) \qquad (2)$$

Sarrus szabály

determináns számítás

https://www.youtube.com/watch?v=VJ6xHoB8-WU&ab_channel=D%C3%A1nielHorv%C3%A1th

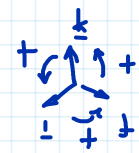
illetve aldeterminánsok segítségével is számítható

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i}^{+} & \underline{j}^{-} & \underline{k}^{+} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \underline{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \underline{j}(a_x b_z - b_x a_z) + \underline{k}(a_x b_y - b_x a_y) \qquad (3)$$

Példa

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-9)\cdot 5 - 3\,8 \\ -(7\cdot 5 - 3\cdot(-2)) \\ 7\,8 - (-2)\cdot(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -45 - 24 \\ -(35+6) \\ 56 - 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -69 \\ -41 \\ 38 \end{bmatrix}$$



negyedik módszerrel (komponensekkel)

$$\underline{a} \times \underline{b} = (7\underline{i} - 9\underline{j} + 3\underline{k}) \times (-2\underline{i} + 8\underline{j} + 5\underline{k}) =$$

$$= 7\cdot(-2)\underbrace{\underline{i}\times\underline{i}}_{=\underline{0}} + 7\cdot 8\underbrace{\underline{i}\times\underline{j}}_{=\underline{k}} + 7\,5\underbrace{\underline{i}\times\underline{k}}_{=-\underline{j}} + (-9)(-2)\underbrace{\underline{j}\times\underline{i}}_{=-\underline{k}} + (-9)\,8\underbrace{\underline{j}\times\underline{j}}_{=\underline{0}} + (-9)\cdot 5\underbrace{\underline{j}\times\underline{k}}_{=\underline{i}} + 3\cdot(-2)\underbrace{\underline{k}\times\underline{i}}_{=\underline{j}} + 3\,8\underbrace{\underline{k}\times\underline{j}}_{=-\underline{i}} + 3\,5\underbrace{\underline{k}\times\underline{k}}_{=\underline{0}} =$$

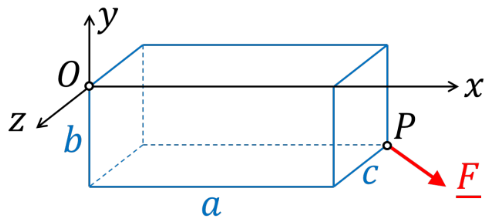
$$= \underline{i}((-9)\cdot 5 - 3\cdot 8) + \underline{j}(3\cdot(-2) - 7\,5) + \underline{k}(7\,8 - (-9)\cdot(-2)) = -69\underline{i} - 41\underline{j} + 38\underline{k} = \begin{bmatrix} -69 \\ -41 \\ 38 \end{bmatrix}$$

https://www.youtube.com/watch?v=eu6i7WJeinw&ab_channel=3Blue1Brown

3. gyak

Példa 2.7

2.7. Példa. Az $a = 5$ m, $b = 3$ m, $c = 4$ m élhosszúságú merev téglatestet a P pontban az $\underline{F} = 6\underline{i} - 2\underline{j} + 8\underline{k}$ kN koncentrált erő terheli. Számítsuk ki az erő nyomatékát az O pontra!
Megoldás: $\underline{M}_O = -32\underline{i} - 64\underline{j} + 8\underline{k}$.



$$\underline{M}_o = \underline{r}_{op} \times \underline{F}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} \text{kN} \qquad \underline{r}_{op} = \begin{bmatrix} a \\ -b \\ -c \end{bmatrix} \text{m}$$

$$\underline{M}_o = \begin{bmatrix} a \\ -b \\ -c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8b - 2c \\ -8a - 6c \\ -2a + 6b \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_o = \begin{bmatrix} -24-8 \\ -40-24 \\ -10+18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 \\ -64 \\ 8 \end{bmatrix} \text{kNm}$$

Példa 2.8

2.8. Példa. Egy merev testre ható külső erőhatások nyomatéka az O pontra $\boldsymbol{M}_O = 21\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}$ Nm. Jelöljön ki az $\boldsymbol{t} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ vektor egy irányított tengelyt az O ponton keresztül. Mekkora az erre a tengelyre vonatkozó nyomaték?
Megoldás: $M_t = 15$ Nm.

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} [-]$$

$$|\underline{t}| = \sqrt{\underline{t} \cdot \underline{t}} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36}$$

$$|\underline{t}| = \sqrt{49} = 7 \, [-]$$

$$\underline{e}_t = \frac{1}{|\underline{t}|} \cdot \underline{t} = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix} [-]$$

$\underline{t}$ irányú egységvektor

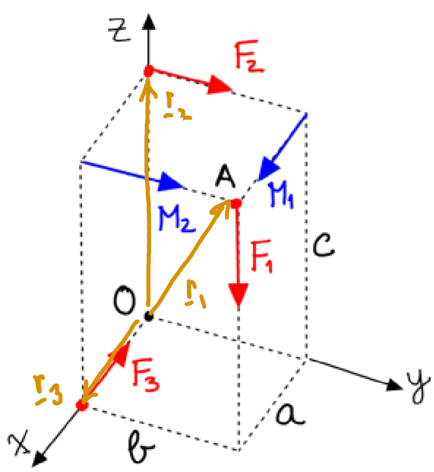
$\underline{M}_o$ $\underline{t}$ irányú vetülete:

$$M_t = \underline{M}_o \cdot \underline{e}_t = \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{bmatrix} = 6 - 3 + 12 = 15 \text{ Nm}$$

előző hf 3 pontja

Példa 3 2

3.2. Példa. Egy merev testre az $\underline{F}_1$, $\underline{F}_2$ és $\underline{F}_3$ koncentrált erők és az $\underline{M}_1$ és $\underline{M}_2$ koncentrált erőpárok hatnak az ábrán feltüntetett módon. Az erők és nyomatékok nagyságai ismertek: $F_1 = 25$ N, $F_2 = 70$ N, $F_3 = 60$ N, $M_1 = 90$ Nm, $M_2 = 110$ Nm. Geometria adatok: $a = 2$ m, $b = 3$ m, $c = 4$ m.
Feladatok:
a) Számítsuk ki az erőrendszer redukáltját az O pontra!
b) Számítsuk ki az erőrendszer redukáltját az A pontra!
c) Igazoljuk, hogy $\underline{F} \cdot \underline{M}_A = \underline{F} \cdot \underline{M}_O$!
d) Írjuk fel a centrális egyenes egyenletét és redukáljuk az erőrendszert a centrális egyenes egy tetszőleges pontjára!
e) Milyen O pontban működő erővel és erőpárral kell kiegészíteni az erőrendszert, hogy az egyensúlyi legyen?
Megoldás:
a) $\underline{F} = -60\underline{i} + 70\underline{j} - 25\underline{k}$ N, $\underline{M}_O = -265\underline{i} + 160\underline{j}$ Nm;
b) $\underline{M}_A = 90\underline{i} + 350\underline{j} - 320\underline{k}$ Nm;
c) $\underline{F} \cdot \underline{M}_A = \underline{F} \cdot \underline{M}_O = 27100$ Nm^2;
d) $\underline{r}(\lambda) = 0,4384\underline{i} + 0,7260\underline{j} + 0,9808\underline{k} + \lambda \cdot (-0,6281\underline{i} + 0,7328\underline{j} - 0,2617\underline{k})$;
e) $\underline{F}^* = 60\underline{i} - 70\underline{j} + 25\underline{k}$ N, $\underline{M}_O^* = 265\underline{i} - 160\underline{j}$ Nm.



$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} \text{N} \qquad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} \text{N}$$

$$\underline{F}_3 = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{N} \qquad \underline{M}_1 = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

$$\underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm} \qquad \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \qquad \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) $\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \text{N}$$

$$\underline{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i + \sum_{j=1}^{m} \underline{r}_j \times \underline{F}$$

$$\underline{M}_0 = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \times \underline{F}_3$$

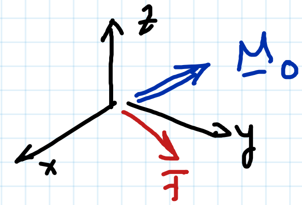
$$\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} 90 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -75 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -280 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

lásd hf 2 pontja

$$[\underline{F}, \underline{M}_0]_0 = \left[\begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \text{N}, \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm} \right]_0$$

b) 1. : eredeti erőrendszert redukáljuk
2 : $[\underline{F}, \underline{M}_0]_0$ erőrendszert redukáljuk



2. $\underline{F}$ ugyanaz

$$\underline{M}_A = \underline{M}_0 + \underline{r}_{A0} \times \underline{F} = \underline{M}_0 - \underline{r}_1 \times \underline{F} = \begin{bmatrix} -265 \\ 160 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 350 \\ -320 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

$\underline{r}_{A0} = -\underline{r}_1$

$$[\underline{F}, \underline{M}_A]_A = \left[\begin{bmatrix}-60\\70\\-25\end{bmatrix} N;\ \begin{bmatrix}90\\350\\-320\end{bmatrix} Nm \right]$$

c) $$\underline{F}\cdot\underline{M}_A = \underline{F}\cdot(\underline{M}_0 + \underline{r}_{A0}\times\underline{F}) = \underline{F}\ \underline{M}_0 + \underline{F}\cdot(\underbrace{\underline{r}_{A0}\times\underline{F}})$$

$$\underline{F}_A\ \underline{M}_A = \underline{F}\cdot\underline{M}_0$$

olyan vektor, ami $\perp \underline{r}_{A0}$ és $\perp \underline{F}$

$\Rightarrow \underline{F}\,(\underline{r}_{A0}\times\underline{F}) = 0$, mivel $\underline{F} \perp (\underline{r}_{A0}\times\underline{F})$

d) legyen G a centrális egyenes egy pontja

centrális egyenesen a redukált vektorkettős tagjai párhuzamosak ($\underline{F} \parallel \underline{M}_G$)

$$\underline{M}_G = \underline{M}_0 + \underline{r}_{G0}\times\underline{F} = \underline{M}_0 - \underline{r}_G\times\underline{F} \qquad |\ \underline{F}\times$$

$$\underbrace{\underline{F}\times\underline{M}_G}_{=\underline{0},\ \text{mert}\ \underline{F}\parallel\underline{M}_G} = \underline{F}\times\underline{M}_0 - \underline{F}\times(\underline{r}_G\times\underline{F})$$

$$\underline{F}\times\underline{M}_0 = \underline{F}\times(\underline{r}_G\times\underline{F})$$

legyen G a centrális egyenes origóhoz legközelebbi pontja

mivel a centrális egyenes $\underline{F}$ irányú $\underline{r}_G \perp \underline{F}$

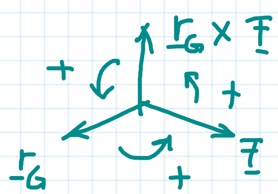
$\Rightarrow |\underline{r}_G\times\underline{F}| = |\underline{r}_G|\cdot|\underline{F}|\cdot\sin 90^\circ = |\underline{r}_G|\cdot|\underline{F}|$

és $\underline{r}_G \perp \underline{r}_G\times\underline{F}$, $\underline{F} \perp \underline{r}_G\times\underline{F}$

$\{\underline{r}_G, \underline{F}, \underline{r}_G\times\underline{F}\}$ ortogonális, minden tag merőleges a másikra

$\Downarrow$

$\underline{F}\times(\underline{r}_G\times\underline{F})$ szorzat $\underline{r}_G$ irányú, nagysága pedig $|\underline{r}_G|\ |\underline{F}|^2$



$\underline{e}_G$ az $\underline{r}_G$ irányú egységvektor

$$\underline{F}\times\underline{M}_0 = \underline{e}_G\,|\underline{r}_G|\cdot|\underline{F}|^2 = \underline{r}_G\ |\underline{F}|^2$$

$$\Rightarrow \underline{r}_G = \frac{\underline{F}\times\underline{M}_0}{|\underline{F}|^2} = \frac{\underline{F}\times\underline{M}_0}{\underline{F}\cdot\underline{F}} = \begin{bmatrix}0,438\\0,726\\0,981\end{bmatrix} m$$

centrális egyenes egyenlete : $\underline{\ell} = \underline{r}_G + \lambda \underline{F} = \begin{bmatrix} 0{,}438 - 60\lambda \\ 0{,}726 + 70\lambda \\ 0{,}981 - 25\lambda \end{bmatrix}$

vagy $\underline{\ell} = \underline{r}_G + \tilde{\lambda}\, \underline{e}_F = \underline{r}_G + \frac{\lambda}{|\underline{F}|} \underline{F}$

$$\underline{M}_G = \underline{M}_0 + \underline{r}_{G0} \times \underline{F} = \underline{M}_0 - \underline{r}_{G} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} -178{,}19 \\ 207{,}89 \\ -74{,}25 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

$$[\underline{F}, \underline{M}_G]_G = \left[\begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} \text{N}, \begin{bmatrix} -178 \\ 208 \\ -74 \end{bmatrix} \text{Nm} \right]_G$$

megjegyz.. redukált vektorkettős esetén a nyomatékvektor $\underline{F}$ irányú komponense sosem változik

Biz.: legyen D bármilyen pont, C legyen a centrális egyenes egy pontja

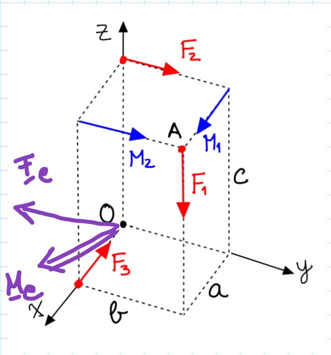
$\underline{M}_D = \underline{M}_C + \underline{r}_{DC} \times \underline{F}$ $\qquad \underline{M}_C \parallel \underline{F} \qquad \underline{r}_{DC} \times \underline{F} \perp \underline{F}$

$\Rightarrow$ azaz csak az $\underline{F}$ irányra merőleges komponens változik!

Köv.: $\underline{M}_G$ számítható $\underline{r}_G$ ismerete nélkül is, mivel $\underline{M}_G$ a redukált vektorkettős nyomatékának $\underline{F}$ irányába eső vetülete. $\underline{M}_G = \underline{e}_F (\underline{e}_F \cdot \underline{M}_0) = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|^2} (\underline{F} \cdot \underline{M}_0)$

lásd hf 4 pontja

e)



$$\underline{F}_e = -\underline{F} = \begin{bmatrix} 60 \\ -70 \\ 25 \end{bmatrix} \text{N}$$

$$\underline{M}_e = -\underline{M}_0 = \begin{bmatrix} 265 \\ -160 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Nm}$$

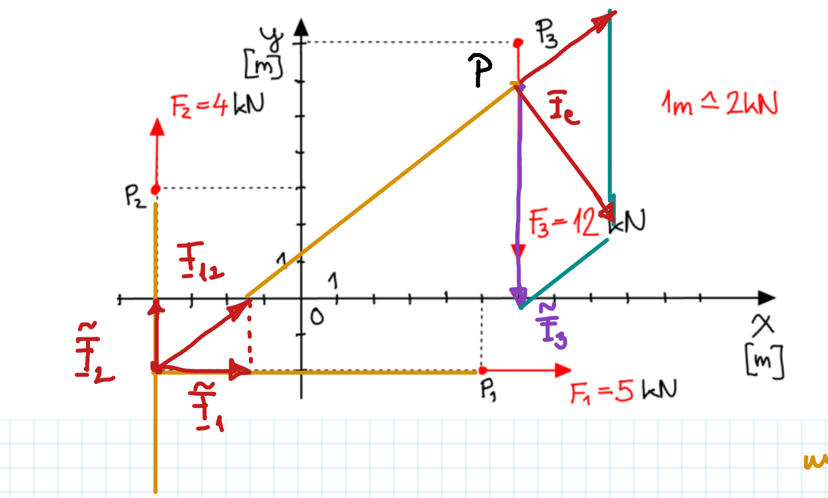
A kiegészített erőrendszert bárhova redukályuk $[\underline{0}, \underline{0}]_P$ vektorkettőst kapunk

Példa 3.3

3.3. Példa. Határozzuk meg az alábbi síkbeli erőrendszer $\underline{F}_e$ eredőjének nagyságát és helyét a) szerkesztéssel és b) számítással!

Megoldás: $\underline{F}_e = 5\underline{i} - 8\underline{j}$ kN; hatásvonalának metszéspontja az x-tengellyel: 9,75 m.

ZH-n hasonló várható



$\underline{F}_e$ leolvasva: 1 egység ~ 2 kN

x irány +2,5 egység

y irány −4 egység

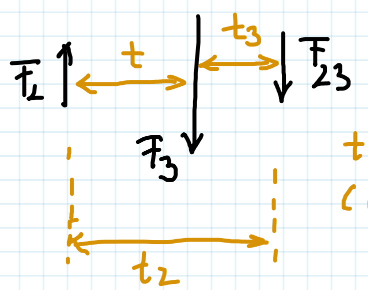
$\underline{F}_e = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$ kN $P(6\,m, 6\,m)$

párhuzamos erők eredője gyakorolható, ha először $\underline{F}_2 + \underline{F}_3$ összeget szerkesztjük meg

=> P máshova jön ki, de mindkét P rajta van $\underline{F}_e$ hatásvonalán!

számolás: $F_2 t_2 = F_3 t_3$ $t_2 = t + t_3$

$F_2 (t + t_3) = F_3 t_3 \Rightarrow t_3 (F_3 - F_2) = t F_2$



$t = 10\,m$ (leolvasva)

$$t_3 = \frac{F_2 t}{F_3 - F_2} = \frac{40\,Nm}{8\,N} = 5\,m$$

$x_e = 6m + 5m = 11m$ $\Rightarrow Q(11m, -2m)$

$y_e = -2m$

$F_{23} = -F_3 + F_2 = -8\,kN$

$\underline{F}_e = \underline{F}_1 + \underline{F}_{23} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$ kN

Jó P és Q? → $\underline{r}_{PQ} \parallel \underline{F}_e$?

$\underline{r}_{PQ} \times \underline{F}_e \overset{?}{=} \underline{0}$

$\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Nm

$\underline{r}_{PQ} = \underline{r}_{PO} + \underline{r}_{OQ} = -\underline{r}_P + \underline{r}_Q$

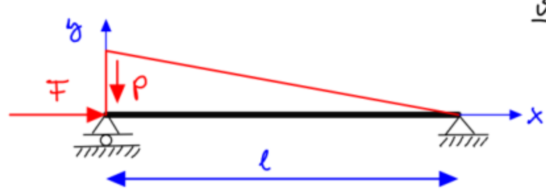
$\underline{r}_{PQ} = \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$ m

megjegyz.: szerkesztéssel kevésbé pontos eredmények várhatóak

Hol van a centrális egyenes?

4. gyak

Példa 1



Adatok: $l = 2\,m$, $p = 1{,}2\ kN/m$, $F = 600N$

Szerkesszük meg a reakcióerőket!

Helyettesítsük a megoszló erőrendszert

F_p ~ háromszög területe

x_p ~ háromszög súlypontja

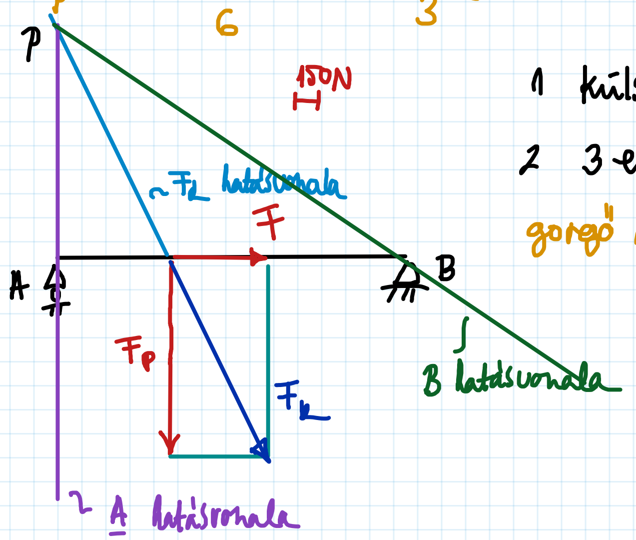
$F_p = \frac{pl}{2}$ $\qquad$ $x_p = \frac{l}{3}$

VAGY definíció szerint $\quad F_p = \int_0^l p(x)dx = \left[px - \frac{px^2}{2l}\right]_0^l = pl - \frac{pl}{2} = \frac{pl}{2}$ ✓

$p(x) = p - \frac{p}{l}x$

$$x_p = \frac{\int_0^l x\,p(x)dx}{F_p} = \frac{\int_0^l \left(px - \frac{px^2}{l}\right)dx}{F_p} = \frac{\left[\frac{px^2}{2} - \frac{px^3}{3l}\right]_0^l}{pl/2} = \frac{\frac{pl^2}{2} - \frac{pl^2}{3}}{pl/2}$$

$$x_p = \frac{2(3l - 2l)}{6} = \frac{1}{3}l \ ✓$$



1 külső terhelés eredőjének meghatározása

2 3 erő egyensúlya → $\underline{F}_k + \underline{A} + \underline{B} = 0$

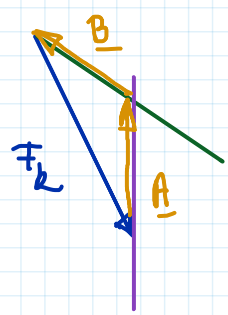
görgő csak 1 szabadságfokot köt meg

↳ 1 reakcióerő, iránya ismert

=> P ponton át kell mennie a B csuklóban ható reakcióerőnek

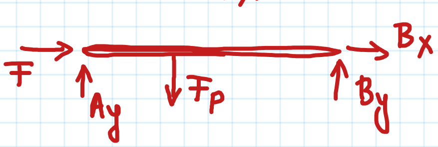
megszerkesztve:

mivel csak a rácsokat használtam szerkesztésnél, a leolvasott erők: $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 750 \end{bmatrix} N$ $\quad \underline{B} = \begin{bmatrix} -600 \\ 450 \end{bmatrix} N$



számítással

SZTA



EE

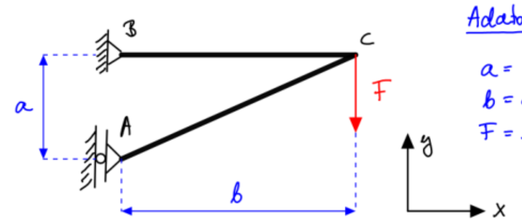
$\sum F_x = 0: \quad F + B_x = 0 \longrightarrow B_x = -F = -600N$

$\sum F_y = 0 \quad A_y - F_p + B_y = 0 \rightarrow A_y = \frac{pl}{2} - \frac{pl}{6} = \frac{pl}{3} = 800N$

$\sum M_a = 0: \quad B_y l - F_p \frac{l}{3} = 0 \longrightarrow B_y = \frac{pl}{6} = 400N$

Példa 2

1. feladat Határozzuk meg a reakcióerőket számítással és szerkesztéssel!

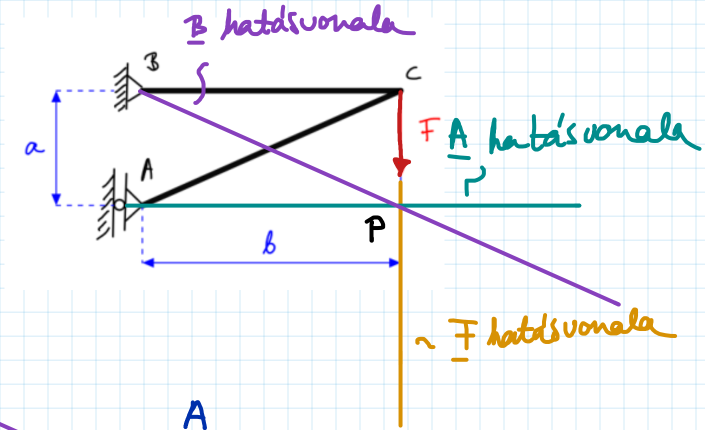


Adatok:

$a = 1{,}25\,m$

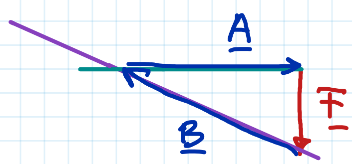
$b = 2{,}75\,m$

$F = 350\,N$



350 N

1. $\underline{F}$ és $\underline{A}$ hatásvonalainak metszéspontja szerkeszt (P)
2. adódó vektorháromszög szerkeszt
3. eredmény leolvas

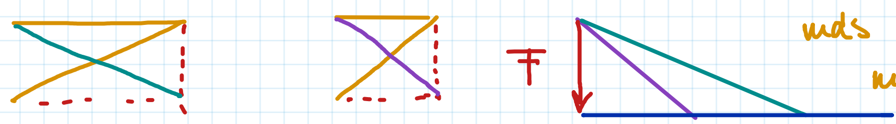


$$\underline{B} \cong \begin{bmatrix} -815 \\ 350 \end{bmatrix} N$$

$$\underline{A} \cong \begin{bmatrix} 815 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

megjegyzés: a szerkezet ábrája és méretarányos kell legyen, hogy az erők hatásvonalai helyes irányba nézzenek

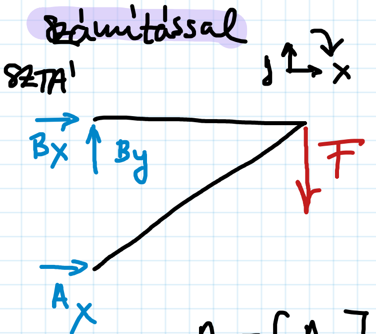
Lásd:



mint a vektor háromszög, mint a szerkesztett erő

Számítással

SZTA'



egyensúlyi egyenletek (EE)

$\Sigma F_x = 0: \quad B_x + A_x = 0 \longrightarrow B_x = -A_x = -770\,N$

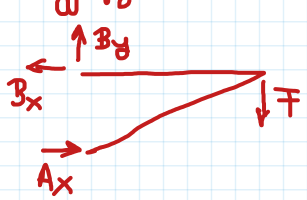
$\Sigma F_y = 0: \quad B_y - F = 0 \longrightarrow B_y = F = 350\,N$

$\Sigma M_B = 0: \quad A_x a - F b = 0 \longrightarrow A_x = \frac{b}{a} F = 770\,N$

$\underline{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$, mert a nyilak ⊕ irányba néznek

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 770 \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} -770 \\ 350 \end{bmatrix} N$$

megjegyzés: mi történik, ha Bx-et másik irányba vesszük fel?



$\Sigma F_x = 0: \quad -B_x + A_x = 0 \longrightarrow B_x = 770\,N$ változott az előjel!

$\Sigma F_y = 0: \quad B_y - F = 0 \longrightarrow B_y = 350\,N$

$\Sigma M_B = 0: \quad A_x a - F b = 0 \longrightarrow A_x = 770\,N$

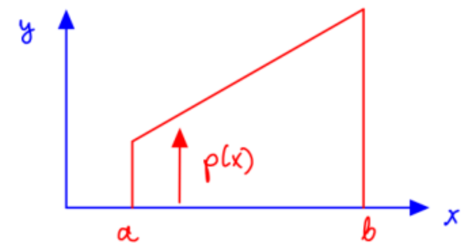
Viszont vektoros felírásnál az SZTA'-n negatív irányba mutató nyíl miatt.

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -770 \\ 350 \end{bmatrix} N$$

$\underline{B}$, mint vektor ugyanaz maradt!

Példa 3

1. feladat Számítsuk ki az alábbi megoszló erőrendszer eredőjét és hatásvonalának helyét!

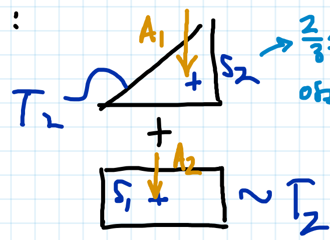


$a = 1\,m$
$b = 6\,m$
$p(a) = 2\,kN/m$
$p(b) = 8\,kN/m$

F_p nagysága ~ trapéz területe

F_p hatásvonala átmegy a trapéz súlypontján

Osszuk fel a trapézt az alábbiak szerint:



→ $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$ arányban osztja a befogókat

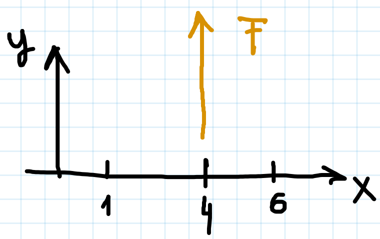
(1) $x_{S_1} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = 3{,}5\,m$

$A_1 = (b-a) \cdot p(a) = 10\,kN$

(2) $x_{S_2} = b - \frac{b-a}{3} \cong 4{,}33\,m$

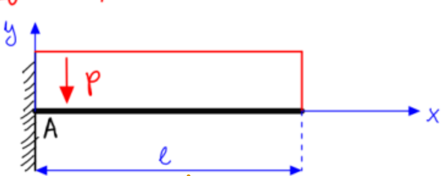
$A_2 = \frac{1}{2}(b-a)(p(b)-p(a))$

$x_S = \frac{A_1 x_{S_1} + A_2 x_{S_2}}{A_1 + A_2} = 4\,m$ $\qquad F_p = A_1 + A_2 = 25\,kN$



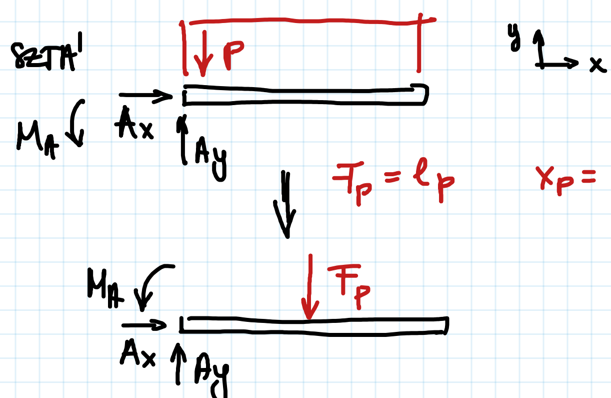
Példa 4

3. feladat Számítsuk ki a reakciókat!



Adatok:
$\ell = 2\,m$
$p = 600\,N/m$

befogás gátolja az x, y irányú elmozdulást és a z körüli elfordulást



EE

$\Sigma F_x = 0: \; A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0: \; A_y - F_p = 0 \longrightarrow A_y = p\ell = 1200\,N$

$\Sigma M_a = 0: \; M_A - F_p \frac{\ell}{2} = 0 \longrightarrow M_A = \frac{p\ell^2}{2} = 1200\,Nm$

↳ érdemes olyan pontra felírni, ahol van ismeretlen erő

$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1200 \end{bmatrix} N$

$\underline{M}_A = \begin{bmatrix} 8 \\ 1200 \end{bmatrix} Nm$

megjegyzés: bármilyen 3 lineárisan független egyenlet felírható egyensúlyi egyenletekként

pl.: 2 pontra nyomatéki egyensúly + 1 erő egyensúly

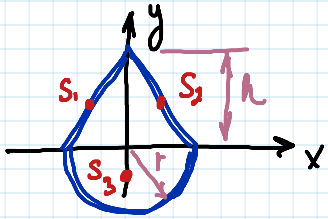
3 nyomatéki egyensúly (a 3 pont nem eshet egy egyenesre, mert nem lenne lineárisan független)

síkban maximum 3 független egyensúlyi egyenletet tudunk felírni egy testre

5. gyakorlat

Példa 1

a)



2 egyenes és egy félkör alakú rúd

$h = 1\,m$
$r = 0{,}5\,m$

$$\underline{r}_{S1} = \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r/2 \\ h/2 \end{bmatrix} \qquad l_1 = \sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\underline{r}_{S2} = \begin{bmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r/2 \\ h/2 \end{bmatrix} \qquad l_2 = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Táblázatból: $\underline{r}_{S3} = \begin{bmatrix} x_{S3} \\ y_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2r/\pi \end{bmatrix} \qquad l_3 = r\pi$

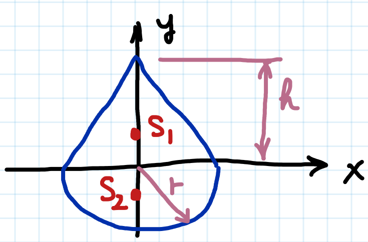
$$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{3} \underline{r}_{Si}\, l_i}{\sum_{i=1}^{3} l_i} \leftarrow \text{2 skalár egyenlet}$$

$$x_S = \frac{x_{S1} l_1 + x_{S2} l_2 + x_{S3} l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = 0\,m \quad \checkmark \text{ (szimmetria)}$$

$$y_S = \frac{y_{S1} l_1 + y_{S2} l_2 + y_{S3} l_3}{l_1 + l_2 + l_3} = 0{,}162\,m$$

$$\underline{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}162 \end{bmatrix} m$$

b)



egy háromszög és egy félkör lemez

$h = 1\,m \qquad r = 0{,}5\,m$

$$\underline{r}_{S1} = \begin{bmatrix} x_{S1} \\ y_{S1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h/3 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \frac{2rh}{2} = rh$$

$$\underline{r}_{S2} = \begin{bmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4r/3\pi \end{bmatrix} \qquad A_2 = \frac{r^2\pi}{2}$$

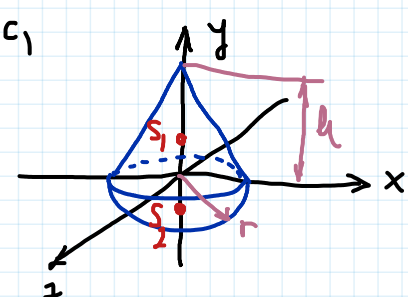
$$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} \underline{r}_{Si} A_i}{\sum_{i=1}^{2} A_i}$$

$$x_S = \frac{x_{S1} A_1 + x_{S2} A_2}{A_1 + A_2} = 0\,m$$

$$y_S = \frac{y_{S1} A_1 + y_{S2} A_2}{A_1 + A_2} = 0{,}0933\,m$$

$$\underline{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0933 \end{bmatrix} m$$

c)



körkúp és félgömb $\qquad h = 1\,m \qquad r = 0{,}5\,m$

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ h/4 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad V_1 = \frac{r^2\pi h}{3}; \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{8}r \\ 0 \end{bmatrix}; \quad V_2 = \frac{2r^3\pi}{3}$$

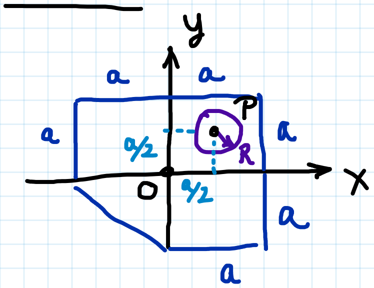
$$\underline{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{2} \underline{r}_i V_i}{\sum_{i=1}^{2} V_i} \quad \text{3 egyenlet}$$

$$x_S = \frac{x_{S1} V_1 + x_{S2} V_2}{V_1 + V_2} = 0\,m \quad ; \quad z_S = \frac{z_{S1} V_1 + z_{S2} V_2}{V_1 + V_2} = 0\,m$$

$$y_S = \frac{y_{S1} V_1 + y_{S2} V_2}{V_1 + V_2} = 0{,}03125\,m$$

$$\underline{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}03125 \\ 0 \end{bmatrix} m$$

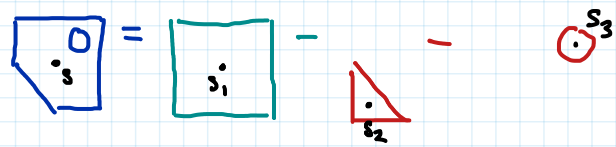
Példa 2



Mekkora R sugarú kört kell az alábbi lemez P pontjában felírni, hogy a lemez súlypontja az O-ban legyen?

$$\underline{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

3 elem:



$\underline{r}_{s_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} m \qquad A_1 = 4a^2 \qquad +$

$\underline{r}_{s_2} = \begin{bmatrix} -2a/3 \\ -2a/3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \frac{1}{2} a^2 \qquad -$

$\underline{r}_{s_3} = \begin{bmatrix} a/2 \\ a/2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = R^2\pi \qquad -$

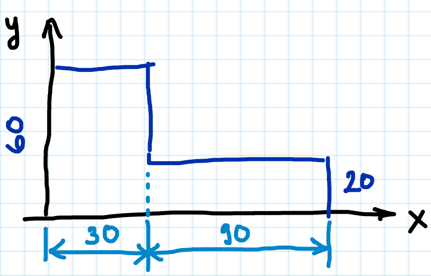
$$x_s = \frac{2a/3 \cdot \frac{1}{2}a^2 - a/2 \cdot R^2\pi}{4a^2 - \frac{1}{2}a^2 - R^2\pi} = 0\,m$$

$$y_s = \frac{2a/3 \cdot \frac{1}{2}a^2 - a/2 \cdot R^2\pi}{4a^2 - \frac{1}{2}a^2 - R^2\pi} = 0\,m$$

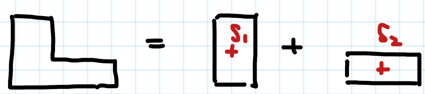
Tehát $\quad \frac{a^3}{3} = \frac{a}{2} R^2 \pi \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{2a^2}{3\pi}} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\, a$

Példa 3

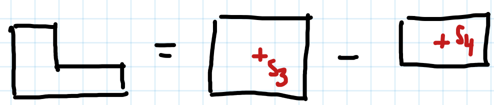
Határozzuk meg az ábrán látható síkidom súlypontjának a helyét két különböző felosztás alkalmazásával!



1-es felosztás:



2-es felosztás:



$$\underline{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} \underline{r}_{s_i} A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

1-es

$\underline{r}_{s_1} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix} mm \qquad A_1 = 30\;60\; mm^2$

$\underline{r}_{s_2} = \begin{bmatrix} 30+45 \\ 10 \end{bmatrix} mm \qquad A_2 = 20 \cdot 90\; mm^2$

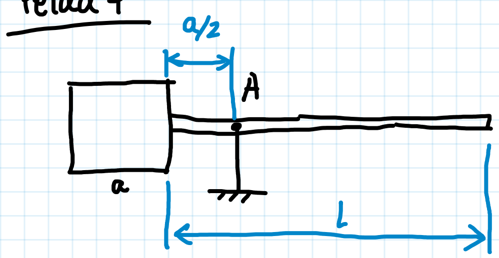
$$x_s = \frac{x_{s_1} A_1 + x_{s_2} A_2}{A_1 + A_2} = 45\,mm \qquad y_s = \frac{y_{s_1} A_1 + y_{s_2} A_2}{A_1 + A_2} = 20\,mm \qquad \underline{r}_s = \begin{bmatrix} 45 \\ 20 \end{bmatrix} mm$$

2-es

$\underline{r}_{s_3} = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \end{bmatrix} mm \qquad \underline{r}_{s_4} = \begin{bmatrix} 75 \\ 40 \end{bmatrix} mm \qquad A_3 = 120 \cdot 60\; mm^2 \qquad A_4 = 40 \cdot 90\; mm$

$$x_s = \frac{x_{s_3} \cdot A_3 - x_{s_4} A_4}{A_3 - A_4} = 45\,mm \qquad y_s = \frac{y_{s_3} A_3 - y_{s_4} A_4}{A_3 - A_4} = 20\,mm \qquad \underline{r}_s = \begin{bmatrix} 45 \\ 20 \end{bmatrix} mm$$

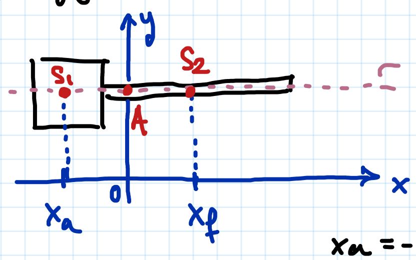
Példa 4



Az ábrán látható sorompó az "a" acélkockából és L hosszú négyzet keresztmetszetű fa rúdból áll. A keresztmetszet mérete "b". Mekkora legyen L, hogy az A pontban alátámasztva egyensúly legyen?

$a = 12\ \text{cm}$ $\qquad \rho_{acél} = 7800\ \text{kg/m}^3$

$b = 40\ \text{mm}$ $\qquad \rho_{fa} = 600\ \text{kg/m}^3$



$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i}$$

$x_a = -a, \quad m_a = \rho_a a^3$

$x_f = \frac{L}{2} - \frac{a}{2}, \quad m_f = \rho_f b^2 L$

$$x_s = \frac{-a^4 \rho_a + \frac{1}{2}(L-a) b^2 L \rho_f}{\rho_a a^3 + \rho_f b^2 L} = 0\ \text{m}$$

$$\Rightarrow 0{,}48L^2 - 0{,}0576L - 1{,}617 = 0$$

$\boxed{L_1 = 1{,}896\ \text{m}}$ ✓

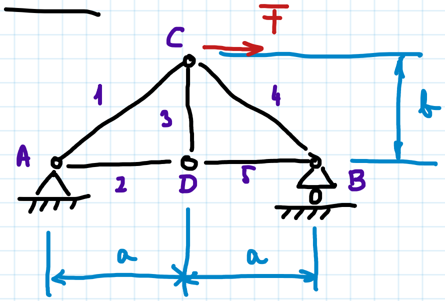
$L_2 = -1{,}776\ \text{m}$ ↯

6. Gyakorlat

Síkbeli rácsos szerkezetek
- merev, egyenes rudakból állnak
- rudak végeikkel csuklósan kapcsolódnak egymáshoz
- terhelés koncentrált erőkből áll, melyek a csuklókban hatnak
- szerkezet statikailag határozott

megoldás: → csomóponti módszer
↳ átmetsző módszer

Példa 1



$a = 1m$

$b = 1,2m$

$F = 2kN$

csuklókat betűkkel, rudakat számokkal jelöljük

Statikailag határozott?

szabadsági fok: $5 \cdot 3 = 15$ (5 test, mindegyiknek 3 szabadsági foka van)

kötöttségi fok: (csukló 2, görgő 1)

		test		kötöttségi fok
csukló	A	0, 1, 2	3db	$2 \cdot (3-1) = 4$
görgő	B	0, 4	2db	$1 \cdot (2-1) = 1$
csukló	C	1, 3, 4	3db	$2 \cdot (3-1) = 4$
csukló	D	2, 3, 5	3db	$2 \; (3-1) = 4$
csukló	B	4, 5	2db	$2 \cdot (2-1) = 2$

$\Sigma\, 15$ ✓

megjegyz.: talajt 0. testként jelöljük

kötöttségi fok = szabadsági fok
⇒ statikailag határozott

Oldjuk meg csomóponti módszerrel!

Alapötlet: szerkezet egyensúlyban ⇒ minden rúd egyensúlyban van

Mivel rudak végpontjain terheltek, csak ott lép fel reakcióerő. A 2 reakcióerő egyensúly esetén azonos hatásvonalú, nagyságú és ellentétes értelmű.

Def.: végpontjain terhelt rudat statikai rúdnak hívjuk

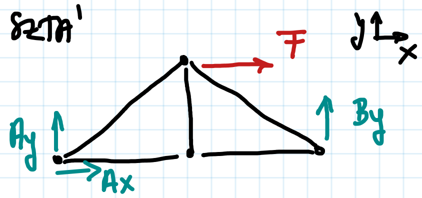
Rúd lehet húzott vagy nyomott
↓ pozitív ↓ negatív rúderő

(szilárdságtannál lesz fontos → rúderő pozitív vagy negatív hosszváltozást eredményez)

Hasonlóan, minden csukló egyensúlyban van

1. lépés: reakcióerők meghatározása

SZTÁ



EE

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + F = 0 \longrightarrow A_x = -F = -2kN$

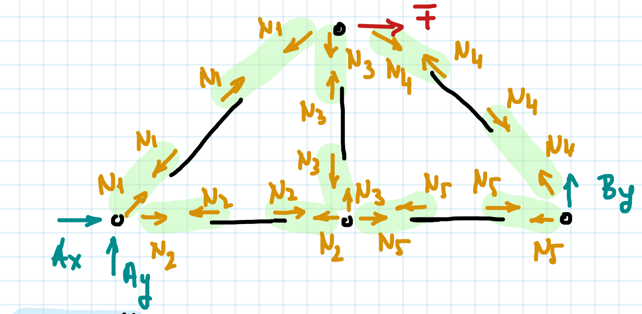
$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + B_y = 0 \longrightarrow A_y = -B_y = -1,2\,kN$

$\Sigma M_A = 0: \quad -F \cdot b + B_y \cdot 2a = 0 \longrightarrow B_y = F \frac{b}{2a} = 1,2\,kN$

2. lépés: rúderők meghatározása, most csomóponti módszerrel
↳ csuklók egyensúlyát vizsgáljuk
↳ 2 független egyenlet

előnye: jól algoritmizálható; összes rúderőt kiszámoljuk

Feltételezés: rudak húzottak



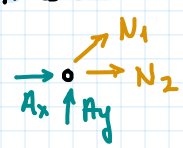
4 csukló → 4 SZTA' ↳ $2 \cdot 4 = 8$ egyenlet

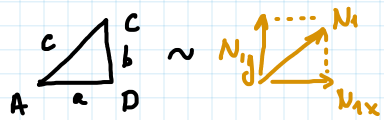
csuklónak nincs kiterjedése, pontszerű ↳ x, y irányú egyenlet

olyan csuklóval érdemes kezdeni, ahol max 2 ismeretlen erő van

utána csuklóról csuklóra haladunk

A csukló





EE

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + N_2 + N_{1x} = 0$

$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + N_{1y} = 0$

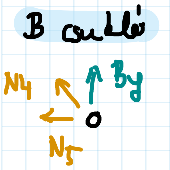
$\frac{N_{1x}}{N_{1y}} = \frac{a}{b}$

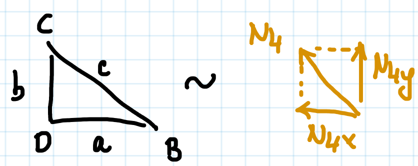
$N_{1y} = -A_y = 1{,}2\,kN \Rightarrow N_{1x} = \frac{a}{b} N_{1y} = 1\,kN$

$\frac{N_1}{N_{1x}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \Rightarrow N_1 = N_{1x}\frac{c}{a} = 1{,}562\,kN$ húzott

$N_2 = -A_x - N_{1x} = 1\,kN$ húzott

B csukló





EE

$\Sigma F_x = 0: \quad -N_5 - N_{4x} = 0$

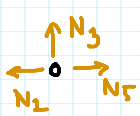
$\Sigma F_y = 0: \quad B_y + N_{4y} = 0 \rightarrow N_{4y} = -B_y = -1{,}2\,kN$

$\frac{N_{4x}}{N_{4y}} = \frac{a}{b} \Rightarrow N_{4x} = N_{4y}\frac{a}{b} = -1\,kN \Rightarrow N_4 = N_{4x}\frac{c}{a} = -1{,}562\,kN$ nyomott

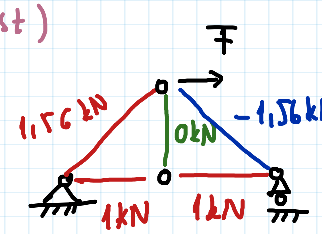
$\frac{N_4}{N_{4x}} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$

$N_5 = -N_{4x} = 1\,kN$ húzott

C csukló

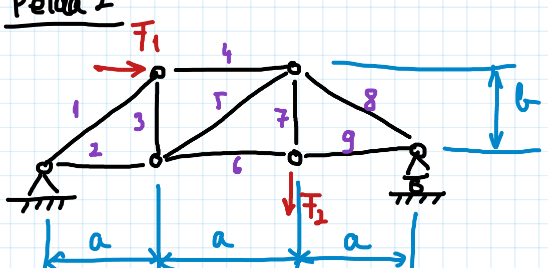


$\Sigma F_y = 0: \quad N_3 = 0\,kN$ vakrúd (nem vesz fel terhelést)



Megjegyzés: fennmaradó 3 egyenletet ellenőrzésre lehet használni

Példa 2



$a = 2m$

$b = 1{,}5m$

$F_1 = 2kN$

$F_2 = 3kN$

Mekkora a 4-es rúdban ébredő rúderő?

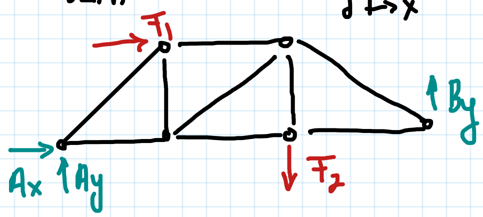
Oldjuk meg átmetsző módszerrel!

Átmetsző módszer: akkor használjuk, ha a rúderőt csak az egyik rúdjára kell a szerkezetnek meghatározni.

Használat: 2 részre vágjuk a szerkezetet úgy, hogy a kérdéses rúdon kívül még max másik 2 rudat vágjunk el. A három rúd nem futhat közös csomópontba. Ezután a szerkezet egyik felére felírjuk az egyensúlyi egyenleteket.

1. lépés. reakcióerők

SzTA'



EE

$\Sigma F_x = 0: \; A_x + F_1 = 0 \longrightarrow A_x = -2\,kN$

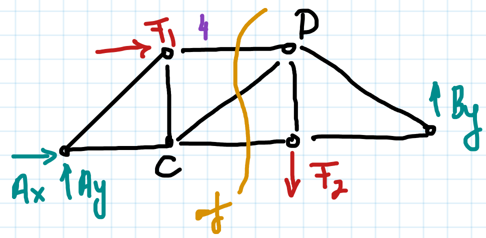
$\Sigma F_y = 0: \; A_y - F_2 + B_y = 0 \longrightarrow A_y = 0{,}5\,kN$

$\Sigma M_a = 0: \; -F_1 b - F_2 \cdot 2a + B_y \cdot 3a = 0 \longrightarrow B_y = 2{,}5\,kN$

2. lépés: szerkezet átmetszése

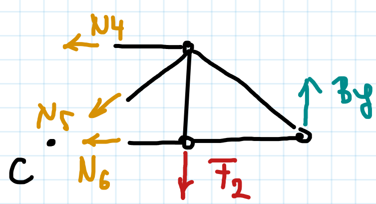
bármelyik felének kiválasztása

Legyen a jobb fele



rúderők mind irányát húzottnak feltételezzük őket

SzTA' jobb



EE

$\Sigma F_x = 0: \; -N_4 - N_{5x} - N_6 = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0: \; -N_{5y} - F_2 + B_y = 0$ (2)

$\Sigma M_c = 0: \; N_4 b - F_2 a + B_y \cdot 2a = 0$ (3)

(3) $N_4 = -2{,}667\,kN$

7. Gyakorlat

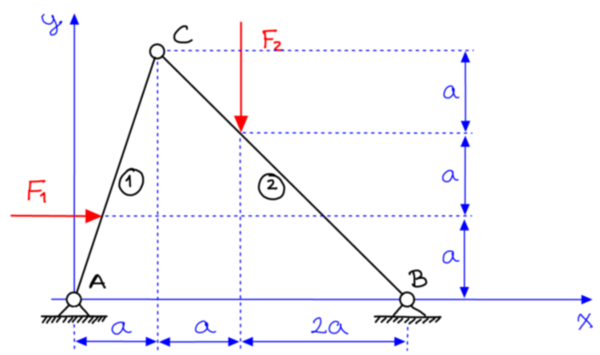
Síkbeli csuklós szerkezetek

- merev, egyenes rudakból állnak
- rudak csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz (nem feltétlen a végeken)
- terhelés tetszőleges helyen hat (nem csak a csuklókban, mint a rácsos szerkezeteknél)

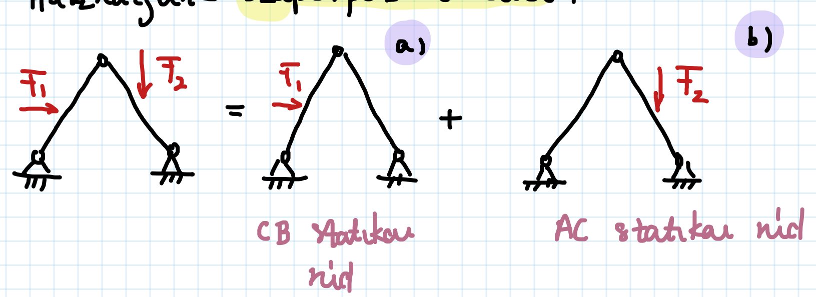
megoldás: → részekre bontás
→ szuperpozíció elve (ugyanaz, mint lineáris rendszereknél   bemenő jel ~ terhelés
kimenő jel ~ reakció
⇒ n-szeres terhelés n-szeres reakciót jelent)

Példa 6.1

6.1. Példa. Határozzuk meg számítással és szerkesztéssel az alábbi bakállvány esetén a reakcióerőket!
Adatok: $F_1 = 300$ N, $F_2 = 400$ N.
Megoldás: $F_{Ax} = -158,333$ N, $F_{Ay} = 125$ N, $F_{Bx} = -141,667$ N, $F_{By} = 275$ N.



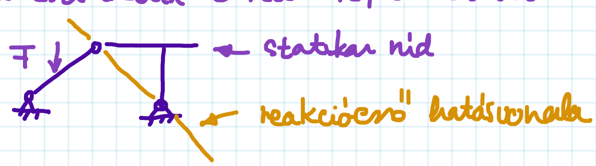
Használjuk szuperpozíció elvét!



Statikai rúd: csuklókban ébredő reakcióerők rúd irányúak

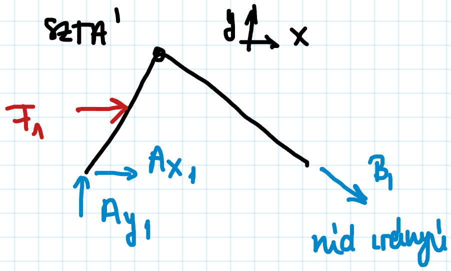
Miért? Mivel egyensúlyban van a szerkezet, minden tagja egyensúlyban van. Mivel a statikai rúd esetén csak a csuklókban ébred erő, a két erő azonos nagyságú, irányú, de ellentétes értelmű

pl.:



a) számítás

SZTA

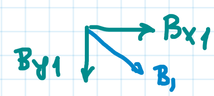


EE

$$\sum F_x = 0: \quad F_1 + A_{x1} + B_{x1} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_{y1} - B_{y1} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_a = 0: \quad -F_1 a - B_{y1} \cdot 4a = 0 \quad (3)$$

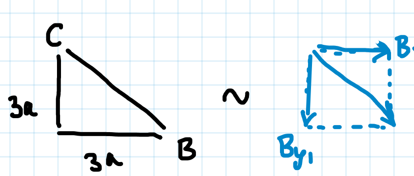


felbontva

$$\underline{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{x1} \\ -B_{y1} \end{bmatrix}$$

(3): $B_{y1} = -F_1/4 = -75\,N$ (2) $A_{y1} = B_{y1} = -75\,N$

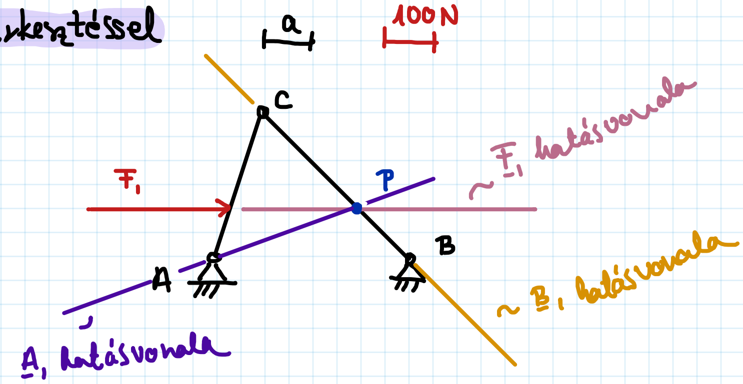
B_1 iránya ismert



$$\frac{B_{x1}}{B_{y1}} = \frac{3a}{3a} \Rightarrow B_{x1} = -75\,N$$

(1) $A_{x_1} = -F_1 - B_{x_1} = -225\,N$ $\quad \underline{A}_1 = \begin{bmatrix} -225 \\ -75 \end{bmatrix} N$ $\quad \underline{B}_1 = \begin{bmatrix} -75 \\ 75 \end{bmatrix} N$

szerkesztéssel



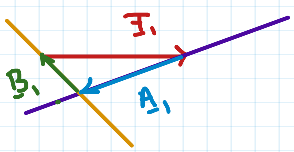
3 erő egyensúlya

$\underline{F}_1$ és $\underline{B}_1$ hatásvonala ismert

↦ ? metszéspont

$\underline{A}_1$ hatásvonala átmegy A-n és P-n

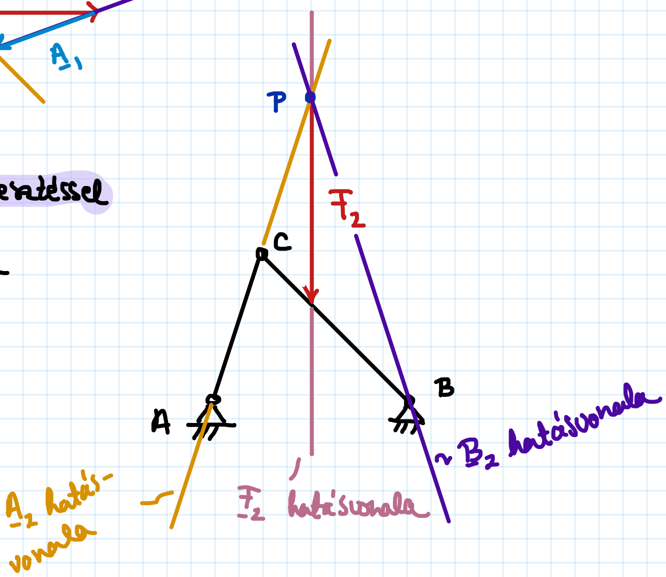
⇒ vektorfolyam szerkeszt

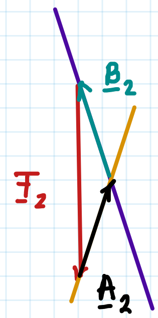


vektorfolyam

b) **szerkesztéssel**

$\underline{A}_2, \underline{F}_2$ iránya ismert

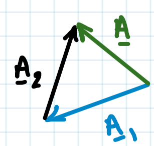


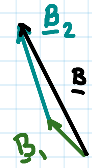


vektorfolyam

A terhelés a kettő vektoriális összege

$\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \qquad \underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2$

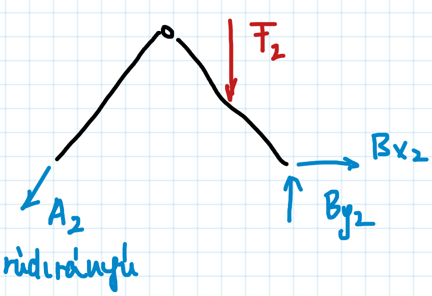




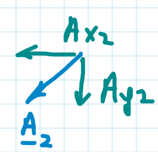
leolvasva: $\underline{A} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \cdot 100 \\ 1{,}25 \cdot 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ 125 \end{bmatrix} N \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \cdot 100 \\ 2{,}75 \cdot 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -150 \\ 275 \end{bmatrix} N$

számítással

SzTA



EE



$\sum F_x = 0: \; -A_{x2} + B_{x2} = 0 \qquad (1)$

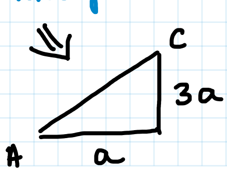
$\sum F_y = 0: \; -A_{y2} + B_{y2} - F_2 = 0 \qquad (2)$

$\sum M_b = 0: \; A_{y2} \cdot 4a + F_2 \cdot 2a = 0 \qquad (3)$

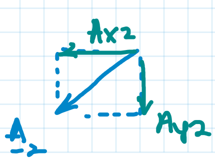
$\underline{A}_2 = \begin{bmatrix} -A_{x2} \\ -A_{y2} \end{bmatrix}$

(3) $A_{y2} = -F_2/2 = -200\,N \qquad$ (2) $B_{y2} = A_{y2} + F_2 = 200\,N$

⇓



~



$\dfrac{3a}{a} = \dfrac{A_{y2}}{A_{x2}} \Rightarrow A_{x2} = \dfrac{A_{y2}}{3} = -66{,}67\,N$

$B_{x2} = A_{x2} = -66{,}67\ N$ $\quad \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 66{,}67 \\ 200 \end{bmatrix} N$ $\quad \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} -66{,}67 \\ 200 \end{bmatrix} N$

A terhelés a kettő vektor összege! $\underline{A} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} -225 \\ -75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 66{,}67 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -158{,}33 \\ 125 \end{bmatrix} N$

$\underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2 = \begin{bmatrix} -75 \\ 75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -66{,}67 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -141{,}67 \\ 275 \end{bmatrix} N$

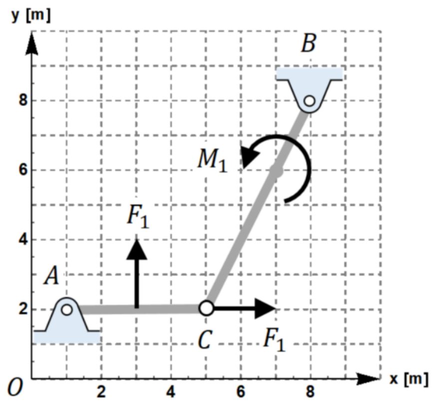
Szerkesztés és számolás összhangban van, mivel a szerkesztés 25 N pontosságú volt

Példa 6.3

6.3. Példa. A vázolt csuklós szerkezetet az AC és BC merev rudak alkotják, melyek a C csuklóval kapcsolódnak egymáshoz. A berajzolt terhelések nagyságai: $F_1 = 20$ kN, $M_1 = 12$ kNm.

Feladatok: **a)** Rajzolja fel külön-külön az AB és BC rudak szabadtest ábráit, valamint határozza meg a szerkezet reakcióerőit és írja fel vektorosan az $\boldsymbol{F}_A$ és $\boldsymbol{F}_B$ reakcióerőket! **b)** Írja fel vektorosan a CB rúdról az C *csuklóra* (*csapra*) átadódó $\boldsymbol{N}_{CB}$ erővektort! **c)** Írja fel vektorosan az AC rúdról az C *csuklóra* (*csapra*) átadódó $\boldsymbol{N}_{AC}$ erővektort!

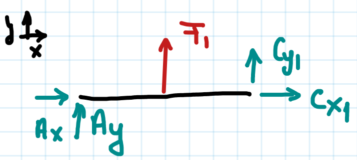
Megoldás: $F_{Ax} = -17$ kN, $F_{Ay} = -10$ kN, $F_{Bx} = -3$ kN, $F_{By} = -10$ kN, $\boldsymbol{N}_{CB} = \boldsymbol{F}_B$, $N_{ACx} = -17$ kN, $N_{ACy} = 20$ kN.



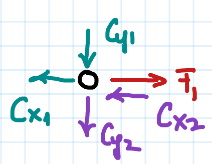
Oldjuk meg részekre bontással!

Ha csuklóban van külső terhelés, az erőt csak az egyik testen tüntetjük fel!

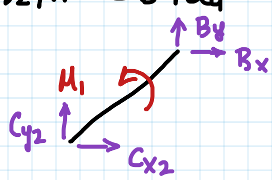
SZTÁ AC rúd



SZTÁ C csukló



SZTÁ CB rúd



most a csuklóban ható erőt a C csuklón tüntettem fel

Figyeljük meg, hogy a 3 szabadtest ábrát összeillesztve a C csukló belső erői kiejtik egymást, és csak az F_1 külső terhelés marad ott!

3 + 2 + 3 egyensúlyi egyenletet lehet felírni a 3 SZTÁ-hoz.

EE AC rúd

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x + C_{x1} = 0 \qquad (1)$

$\Sigma F_y = 0: \quad A_y + F_1 + C_{y1} = 0 \qquad (2)$

$\Sigma M_c = 0: \quad -A_y \cdot 4m - F_1 \cdot 2m = 0 \qquad (3)$

EE C csukló

$\Sigma F_x = 0: \quad F_1 - C_{x1} - C_{x2} = 0 \qquad (4)$

$\Sigma F_y = 0: \quad -C_{y1} - C_{y2} = 0 \qquad (5)$

EE CB rúd

$\Sigma F_x = 0: \quad B_x + C_{x2} = 0 \qquad (6)$

$\Sigma F_y = 0: \quad C_{y2} + B_y = 0 \qquad (7)$

$\Sigma M_c = 0: \quad M_1 + B_y \cdot 3m - B_x \cdot 6m = 0 \qquad (8)$

(3) $A_y = -\dfrac{F_1}{2} = -10\ kN$

(2) $C_{y1} = -A_y - F_1 = -10\ kN$

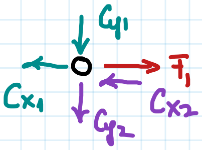
(5) $C_{y2} = -C_{y1} = 10\ kN$

(7) $B_y = -C_{y2} = -10\,kN$ (8) $B_x = \frac{M_1}{6} + \frac{B_y}{2} = -3\,kN$ (9) $C_{x2} = -B_x = 3\,kN$

(4) $C_{x1} = F_1 - C_{x2} = 17\,kN$ (1) $A_x = -C_{x1} = -17\,kN$

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ -10 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{F}_B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix} kN$$

SZTA' alapján a C csukló terhelésen



BC rúdról $\underline{N}_{BC} = \begin{bmatrix} -C_{x2} \\ -C_{y2} \end{bmatrix}$

AC rúdról $\underline{N}_{AC} = \begin{bmatrix} -C_{x1} \\ -C_{y1} \end{bmatrix}$

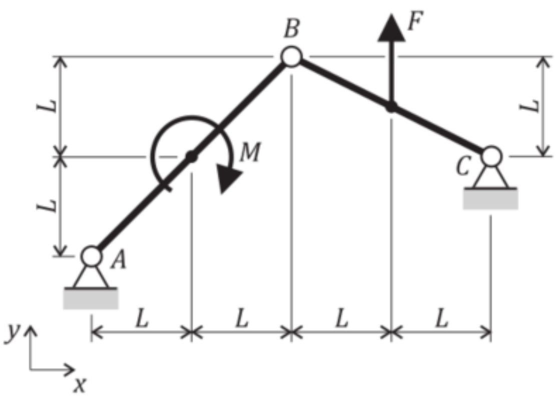
Tehát $\underline{N}_{BC} = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix} kN \qquad \underline{N}_{AC} = \begin{bmatrix} -17 \\ 10 \end{bmatrix} kN$

Példa 6.2

6.2. Példa. Az AB és BC egyenes merev rudakat a B csukló kapcsolja össze. A tartó terhelése a megadott F nagyságú koncentrált erő és M nagyságú koncentrált erőpár a megadott értelemekben. A tartó nyugalomban van. Adatok: $L = 1\,\text{m}$, $F = 20\,\text{N}$, $M = 50\,\text{Nm}$.

Feladatok: a) Rajzolja fel külön-külön az AB és BC rudak szabadtest ábráit! A BC rúdról az AB rúdra átadódó erőt jelölje $\underline{F}_B$-vel! **b)** Határozza meg az A és C csuklós támaszoknál fellépő $\underline{F}_A$ és $\underline{F}_C$ reakcióerő vektorokat! **c)** Adja meg a BC rúdról az AB rúdra átadódó erőt $\underline{F}_B$ erő vektort!

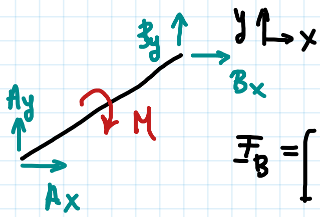
Megoldás: $F_{Ax} = 10$ N, $F_{Ay} = -15$ N, $F_{Cx} = -10$ N, $F_{Cy} = 15$ N, $\boldsymbol{N}_{CB} = \boldsymbol{F}_B$, $F_{Bx} = -10$ N, $F_{By} = 15$ .N



Oldjuk meg részekre bontás elvével!

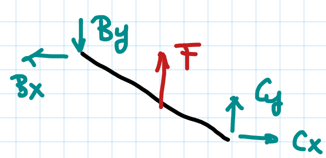
Most elég 2 részre bontani a csuklónál, mert csak 2 test csatlakozik és nincs rajta külső terhelés!

SZTA' AB rúd



$\underline{F}_B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$

SZTA' BC rúd



EE AB rúd

$\Sigma F_x = 0: \; A_x + B_x = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0. \; A_y + B_y = 0$ (2)

$\Sigma M_b = 0: \; A_x \cdot 2L - A_y \cdot 2L - M = 0$ (3)

EE BC rúd

$\Sigma F_x = 0 \cdot C_x - B_x = 0$ (4)

$\Sigma F_y = 0: C_y - B_y + F = 0$ (5)

$\Sigma M_b = 0 \quad F \cdot L + C_y \cdot 2L + C_x\, L = 0$ (6)

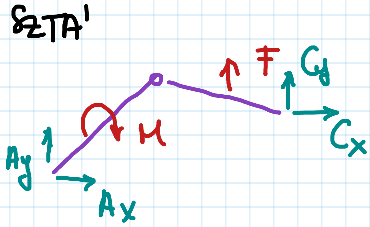
6 egyenlet, 6 ismeretlen

$$\underline{F}_A = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_C = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix} N \qquad \underline{F}_B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \end{bmatrix} N$$

BC rúd hatása AB-re az AB rúd SZTA'-járól olvasható le, azaz $\underline{F}_B = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \end{bmatrix} N$

Megjegyzés

SZTA'



Szerkezetre felírt 3 egyensúlyi egyenletet lehet ellenőrzésre használni

$\Sigma F_x = 0: \; A_x + C_x = 0$

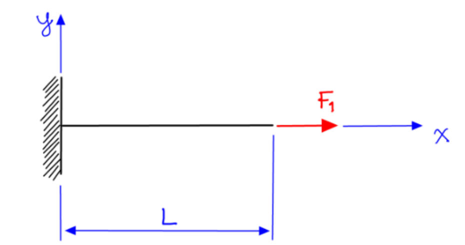
$\Sigma F_y = 0: \; A_y + C_y + F = 0$

$\Sigma M_a = 0: \; -M + F \cdot 3L + C_y \cdot 4L - C_x\, L = 0$

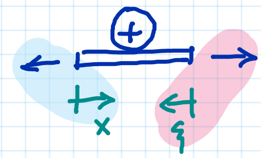
8. Gyakorlat

Példa 8.1

8.1. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!
Megoldás: $N(x) = F_1$, $V(x) = 0$, $M_h(x) = 0$, $M_t(x) = 0$.



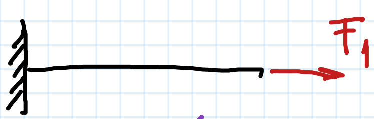
KM felületére normális irányú erő
↳ normáligénybevétel

N :


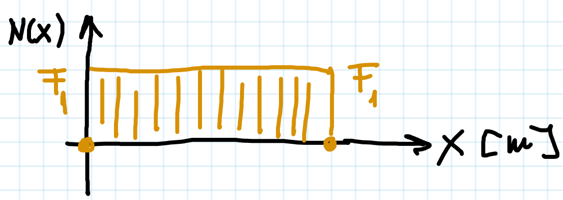
: előjelkonvenció

x irányból felírva: ← nyilacskák okoznak + irányba ugrást az erő támadáspontjában

ξ irányból felírva: → nyilacskák okoznak + irányba ugrást az erő támadáspontjában

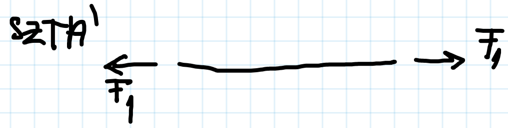


ξ ←| ▭→ pozitív



0-ból indul 0-ba érkezik

⇒ befogásnál a reakció ← F_1 kell legyen!

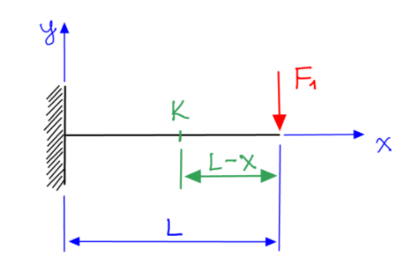


$A_y = 0\,N$
$M_A = 0\,N$
$A_x = -F_1$

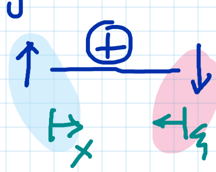
$N(x) = F_1$
$V(x) = 0$
$M_h(x) = 0$
$M_t(x) = 0$

Példa 8.2

8.2. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!
Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = F_1$, $M_h(x) = F_1(L - x)$, $M_t(x) = 0$.



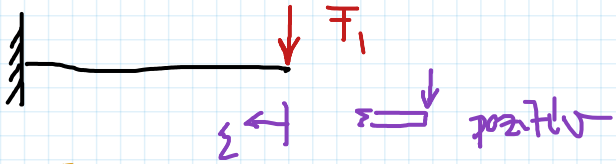
KM síkjába eső erő : nyíróigénybevétel

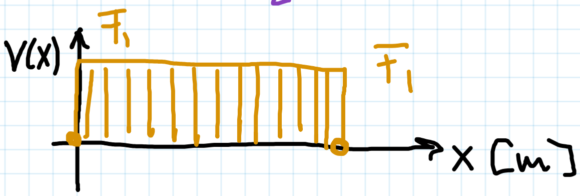
V :


: előjelkonvenció

x irányból felírva. ↑ nyilacska + ugrást eredményez az erő támadáspontjában

ξ irányból felírva: ↓ nyilacska + ugrást okoz az erő támadáspontjában





0-ból indul 0-ba érkezik

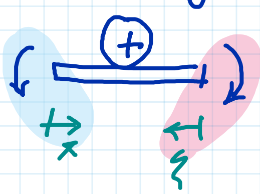
$\Rightarrow$ befogásnál a reakcióerő $\uparrow F_1$

$A_y = F_1$

$N(x) = 0$ $M_t(x) = 0$

KM síkjába eső nyomaték : hajlítóigénybevétel

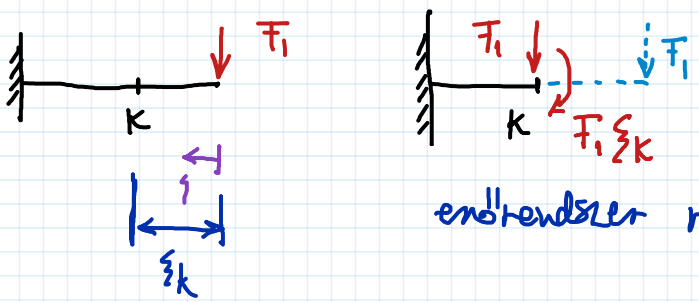
M_h :



: előjelkonvenció

x irány felől redukál : ↺ nyomatékok pozitívak

ξ irány felől redukál : ↻ nyomatékok pozitívak

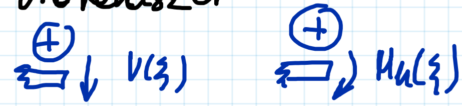


---- itt található erőrendszert redukáljuk K pontba

erőrendszer redukáltja : $\downarrow F_1$ nyíró igénybevétel ↻ $F_1 \xi_K$ hajlítóigénybevétel

Tehát ξ függvényében bárhova redukálunk, a redukált erőrendszer

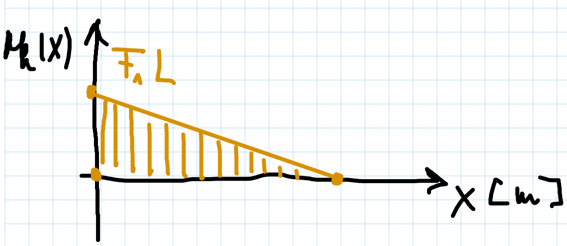
$\downarrow F_1$ erőből és ↻ $F_1 \cdot \xi$ nyomatékból áll



$\Rightarrow$ $V(\xi) = F_1$ $M_h(\xi) = F_1 \xi$

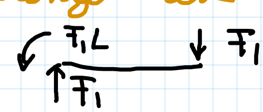
Mivel $\xi = L - x$, ezért $V(x) = F_1$ $M_h(x) = F_1 L - F_1 x$

megjegyz. $V(x) = -M_h'(x)$



0-ból indul, 0-ba érkezik

$\Rightarrow$ befogásnál ↺ $F_1 \cdot L$ reakciónyomaték ébred!



megjegyz. $M_h(x)$ függvény meredeksége $-V(x)$ függvény

$M_h(x)$ értéke 0 és L között $-\int_0^L V(x)\,dx$ nagyságot változik

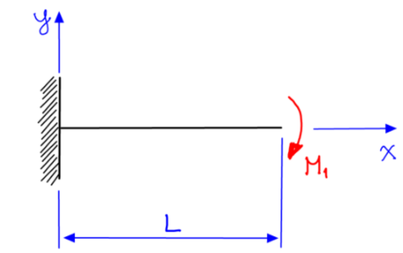
↳ előjelhelyes terület

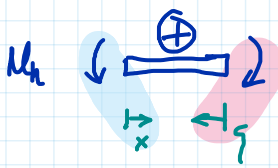
$-F_1 \cdot L$

Példa 8.3

8.3. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!

Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = 0$, $M_h(x) = M_1$, $M_t(x) = 0$.

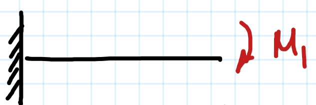




· előjelkonvenció

x felől: nyíl pozitív irányban okoz ugrást a támadáspont helyén

ξ felől: nyíl pozitív ugrást okoz a támadáspont helyén



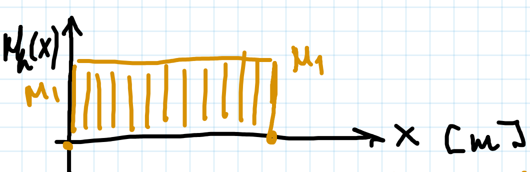
ξ ⟵| ξ⟹ pozitív

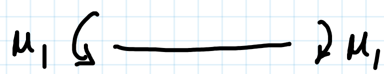
$M_h(x) = M_1$

$M_t(x) = 0$

$N(x) = 0$

$V(x) = 0$



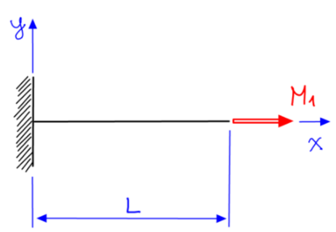


0-ból indul 0-ba ér A befogásnál M_1 reakciónyomaték ébred

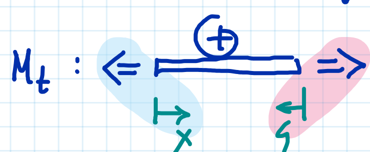
Példa 8.4

8.4. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!

Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = 0$, $M_h(x) = 0$, $M_t(x) = M_1$.



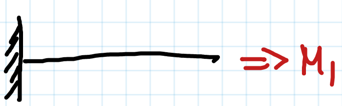
KM-re normális irányú nyomaték: csavaró igénybevétel

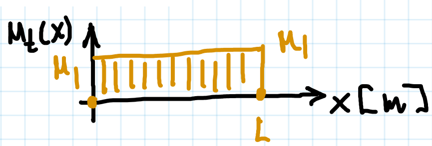


. előjelkonvenció

x irányból ⇐ nyíl + irányú ugrás a támadáspontnál

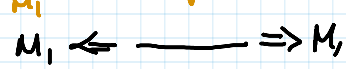
ξ irányból: ⇒ nyíl + irányú ugrás a támadáspontnál





0-ból indul 0-ba ér

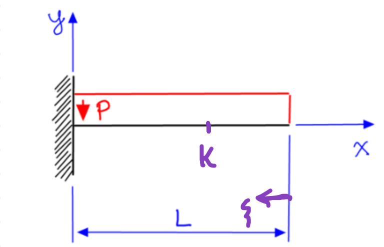
↳ A befogásnál ⇐ M_1 reakciónyomaték



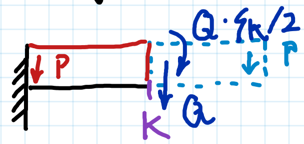
$M_t(x) = M_1$ $N(x) = 0$ $V(x) = 0$ $M_h(x) = 0$

Példa 8.5

8.5. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!
Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = p(L-x)$, $M_h(x) = p(L-x)^2/2$, $M_t(x) = 0$.



Redukáljuk az erőrendszert jobbról K pontba!



Redukált erőrendszer $\downarrow Q = p\xi_K$ $\curvearrowright Q\cdot\xi_K/2$

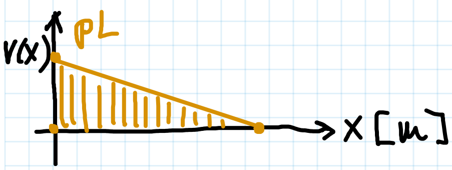
Tehát ξ függvényében: $\downarrow p\xi$ $\curvearrowright p\xi^2/2$

nyíróigénybevétel $V(\xi)$ $\oplus$ hajlítóigénybevétel $M_h(\xi)$ $\oplus$

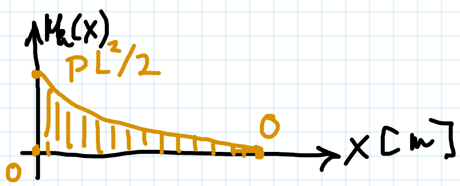
$V(\xi) = p\xi$

$M_h(\xi) = p\xi^2$ mivel $\xi = L - x$: $V(x) = pL - px$ $M_h(x) = p(L-x)^2 \cdot \frac{1}{2}$

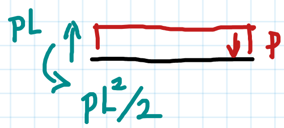
$M_h'(x) = -p(L-x) = -V(x)$



0-ból indul 0-ba ér: befogásnál reakcióerő $\uparrow pL$



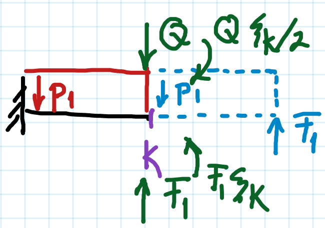
0-ból indul, 0-ba ér: Befogásnál $\curvearrowleft pL^2/2$ reakciónyomaték



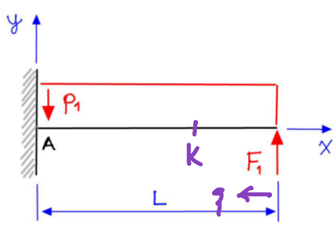
$N(x) = 0$ $M_t(x) = 0$

Példa 8.8

8.8. Példa. Írjuk fel az igénybevételi függvényeket és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat (parabolaívek esetén az érintővel együtt)! Adatok: $L = 4$ m, $p_1 = 3$ kN/m, $F_1 = 3$ kN.
Megoldás: $N(x) = 0$, $V(x) = 9 - 3x$, $M_h(x) = 12 - 9x + 1,5x^2$, $M_t(x) = 0$.



redukáljunk jobb oldalról!



Redukált erőrendszer: $\downarrow Q = p_1\xi_K$ $\uparrow F_1$ nyíróigbevétel

$\curvearrowright Q\,\xi_K/2$ $\curvearrowleft F_1\xi_K$ hajlítóigbevétel

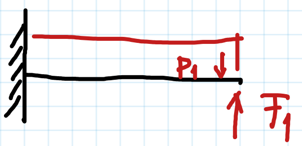
Azaz ξ függvényében $V(\xi) = p_1\xi - F_1$ $M_h(\xi) = p_1\,\xi^2/2 - F_1\,\xi$

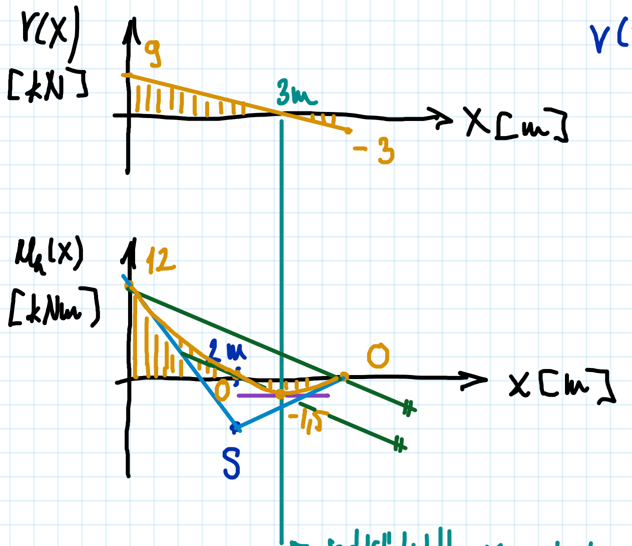
Mivel $\xi = L - x$: $V(x) = p_1L - F_1 - p_1x = 9 - 3x$

$M_h(x) = p_1(L-x)^2/2 - F_1L + F_1x = 1,5x^2 - 9x + 12$

$M_h'(x) = 3x - 9 = -V(x)$ ✓

$N(x) = 0$ $\qquad$ $M_t(x) = 0$





$V(x)$ függvény $p_1(x)$ meredekségű.

0 és L közt $\int_0^L p_1(x)\,dx$ nagyságot változik

↳ előjelhelyes terület: $-p_1 \cdot L = -12\,kN$

$M_h(0m) = 12\,kNm$ $\qquad$ $M_h(4m) = 0\,kNm$

$M_h(2m) = 0\,kNm$

← szélsőérték x_{sz} helyen lesz, ahol $M_h'(x_{sz}) = 0$

$-V(x_{sz}) = 0$ $\qquad$ $3x_{sz} - 9 = 0 \Rightarrow x_{sz} = 3m$

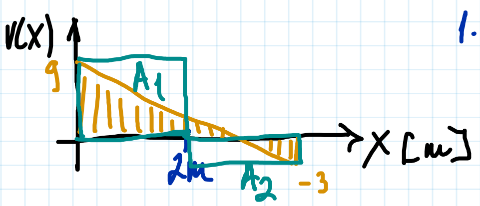
$M_h(x_{sz}) = M_h(3m) = 12 - 9 \cdot 3 + 1{,}5 \cdot 3^2 = -1{,}5\,kNm$

itt az érintő vízszintes

$M_h(0)$ és $M_h(4m)$ helyekre érintő szerkesztése segédpontokkal

$A_1 = 9 \cdot 2 = 18\,kNm$

$A_2 = -3 \cdot 2 = -6\,kNm$



1. lépés lin intervallum 2 egyenlő részre bont

2 lépés: 2 terület felmér, területek magassága $V(0)$ és $V(4m)$

3 lépés S segédpont kiszámítása

$S = M_h(0) - A_1 = 12 - 18 = -6\,kNm$

↳ S felvesz $(2m, -6\,kNm)$ pontba

4 lépés. $M_h(0) - S$ és $S - M_h(4m)$ összekötése

$\Rightarrow$ meredekségek 0m és 4m pontokba

megjegyz. $M_h(4m) \overset{?}{=} S - A_2$ $\qquad$ $S - A_2 = -6 - 6 = 0\,kNm = M_h(4m)$ ✓

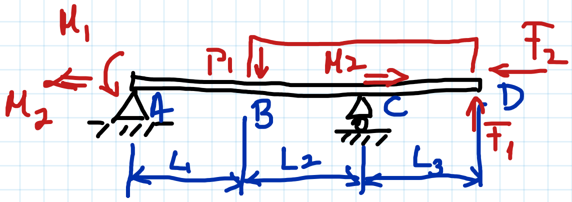
azaz $M_h(4m)$ az S segédpont és A_2 terület segítségével is megkapható

$M_h(2m)$-nél (2m a fele a lin szakasznak) a meredekség az $M_h(0) - M_h(4m)$ húr

utolsó lépés parabola megrajzolása pontokban lévő érintők segítségével

9. gyakorlat

Példa 9.1



$L_1 = 2m$ $\quad F_1 = 8\,kN$

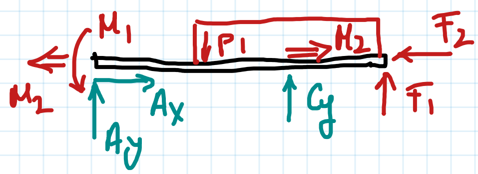
$L_2 = 3m$ $\quad F_2 = 7\,kN$

$L_3 = 4m$ $\quad M_1 = 4\,kNm$

$p_1 = 5\,kN/m$ $\quad M_2 = 6\,kNm$

1. reakciók kiszámítása

SZTÁ



EE

$\Sigma F_x = 0: \; A_x - F_2 = 0$

$\Sigma F_y = 0: \; A_y - p_1(L_2+L_3) + C_y + F_1 = 0$

$$\Sigma M_a = 0: \; M_1 - p_1(L_2+L_3)\left[\frac{L_2+L_3}{2} + L_1\right] + C_y(L_1+L_2) + F_1(L_1+L_2+L_3) = 0$$

$A_x = F_2 = 7\,kN$ $\quad C_y = 23{,}3\,kN$ $\quad A_y = 3{,}7\,kN$

2. igénybevételek

$N(x) = -A_x$ $\quad 0 < x < L_1+L_2+L_3$

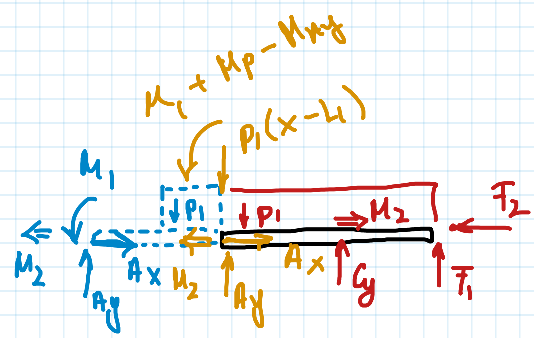
$M_{t_1}(x) = M_2$ $\quad 0 < x < L_1+L_2$

$M_{t_2}(x) = 0$ $\quad L_1+L_2 < x < L_1+L_2+L_3$

$V_1(x) = A_y$ $\quad 0 < x < L_1$

$V_2(x) = A_y - p_1(x-L_1)$ $\quad L_1 < x < L_1+L_2$

$V_3(x) = A_y - p_1(x-L_1) + C_y$ $\quad L_1+L_2 < x < L_1+L_2+L_3$



$M_{h_1}(x) = M_1 - A_y x$ $\quad 0 < x < L_1$

$M_{h_2}(x) = M_1 - A_y x + p_1(x-L_1)\cdot\frac{x-L_1}{2}$ $\quad L_1 < x < L_1+L_2$

$M_{h_3}(x) = M_1 - A_y x + \frac{p_1}{2}(x-L_1)^2 - C_y(x-L_1-L_2)$ $\quad L_1+L_2 < x < L_1+L_2+L_3$

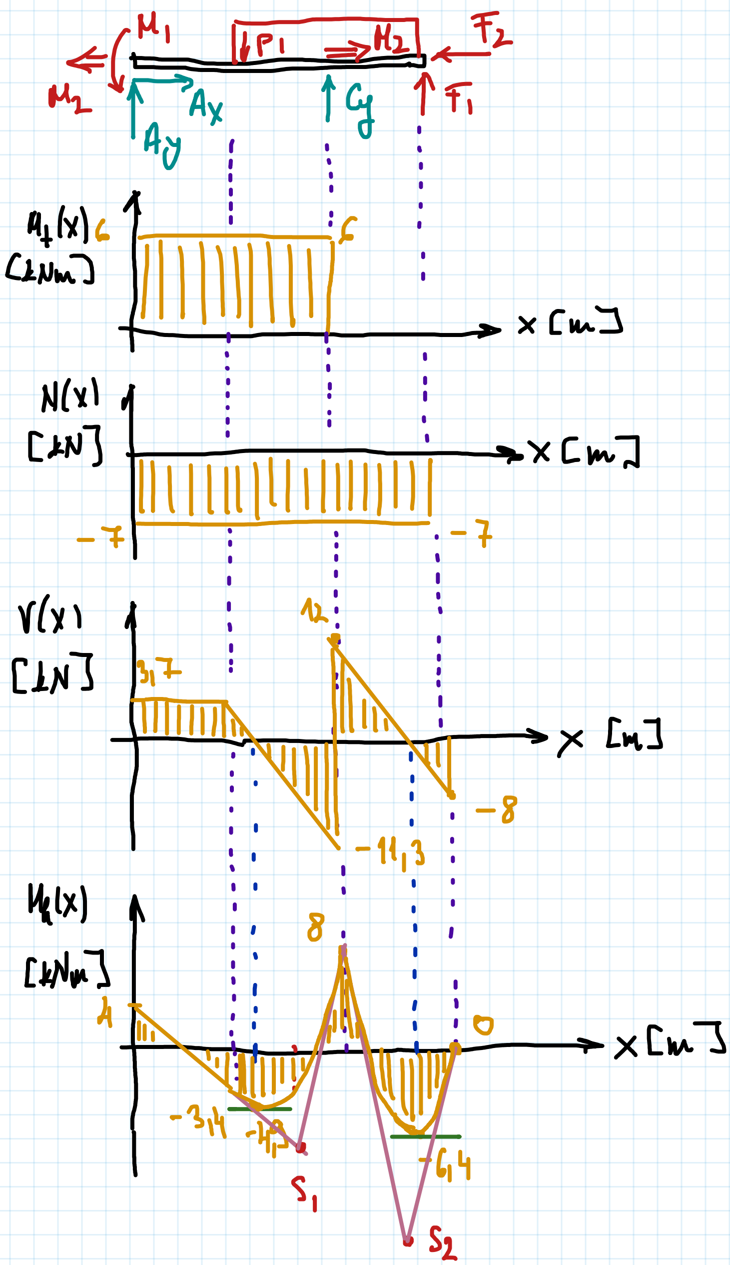
Tehát az igénybevételi függvényeket 3 szakaszra kell osztani

$M'_{h_1}(x) = -A_y = -V_1(x)$ ✓

$M'_{h_2}(x) = -A_y + p_1(x-L_1) = -V_2(x)$ ✓ $\quad$ ellenőrzés

$M'_{h_3}(x) = -A_y + p_1(x-L_1) - C_y = -V_3(x)$ ✓

Igénybevételi ábrák



Figyelni kell a tengelyek arányaira a függvények ábrázolásánál!

$V_1(0) = 3{,}7\,kN = V_2(L_1)$

$V_2(L_1+L_2) = -11{,}3\,kN$

$V_3(L_1+L_2) = 12\,kN$

$V_3(L_1+L_2+L_3) = -8\,kN$

$M_{h_1}(0) = 4\,kNm$ $\quad M_{h_1}(L_1) = -3{,}4\,kNm$

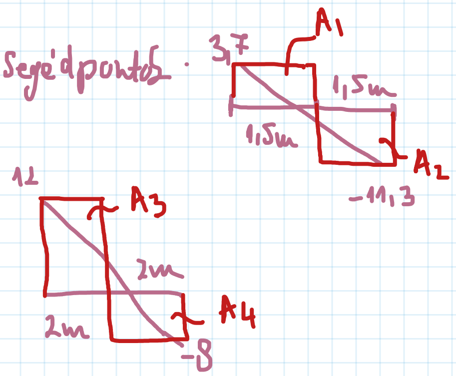
$V_2(x_{sz_1}) = 0 \Rightarrow x_{sz_1} = 2{,}74\,m$

$V_3(x_{sz_2}) = 0 \Rightarrow x_{sz_2} = 7{,}4\,m$

$M_h(x_{sz_1}) = -4{,}88\,kNm$

$M_h(x_{sz_2}) = -6{,}4\,kNm$

Segédpontok:



$S_1 = M_{h_2}(L_1) - A_1 = M_{h_2}(L_1) - 3{,}7 \cdot 1{,}5 = -8{,}95\,kNm$

$x_{S_1} = 3{,}5\,m$

$M_{h_2}(L_1+L_2) = 8\,kNm = M_{h_3}(L_1+L_2)$

$S_2 = M_{h_3}(L_1+L_2) - A_3 = M_{h_3}(L_1+L_2) - 12 \cdot 2 = -16\,kNm$

$x_{S_2} = 7\,m$

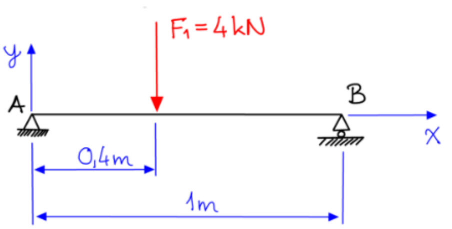
$M_{h_3}(L_1+L_2+L_3) = 0\,kNm$

10. Gyakorlat

Példa 8.6

8.6. Példa. Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és az igénybevételi ábrákat!

Megoldás: $N_1(x) = 0$, $V_1(x) = F_A$, $M_{h1}(x) = -F_A x$, $M_{t1}(x) = 0$, $N_2(x) = 0$, $V_2(x) = F_A - F$, $M_{h2}(x) = -F_A x + F_1(x - 0,4)$, $M_{t2}(x) = 0$.



SZTA'

EE

$\Sigma F_x = 0: \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0: \quad A_y - F_1 + B_y = 0 \quad \rightarrow A_y = 2,4\ kNm$

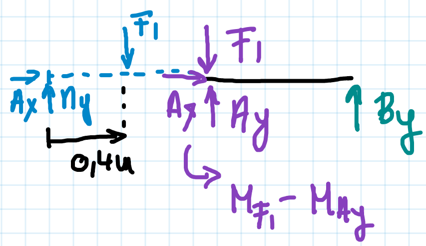
$\Sigma M_a = 0: -F_1 \cdot 0,4 + B_y \cdot 1 = 0$

$\rightarrow B_y = 1,6\ kNm$

Igénybevételi függvények 2 folytonos szakaszra oszthatók!

$V_1(x) = A_y = 2,4\ kNm \qquad 0 < x < 0,4m$

$V_2(x) = A_y - F_1 = -1,6\ kNm \qquad 0,4m < x < 1m$



$M_{a1}(x) = -A_y x \qquad 0 < x < 0,4m$

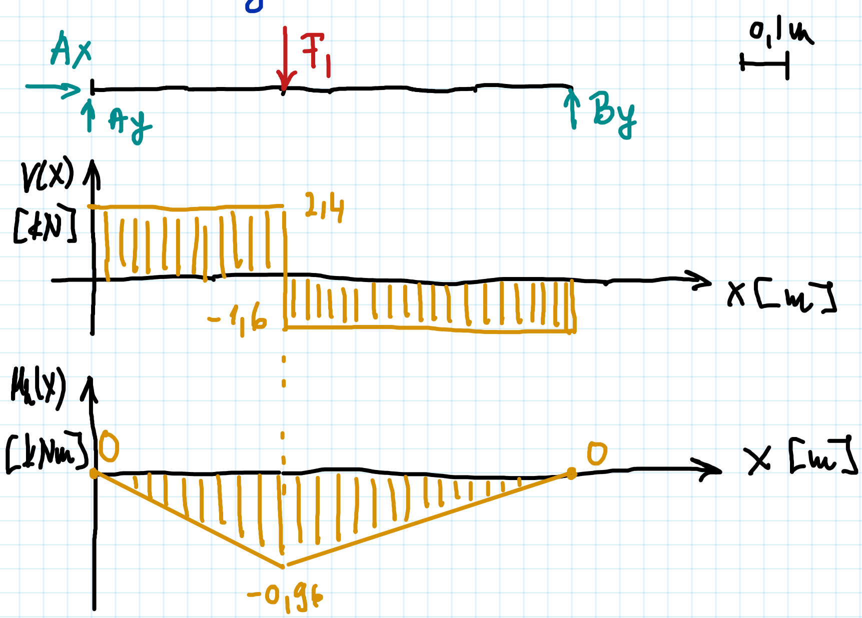
$M_{a2}(x) = -A_y x + F_1(x - 0,4m) \qquad 0,4m < x < 1m$

$N(x) = A_x = 0 \qquad 0 < x < 1m$

$M_t(x) = 0 \qquad 0 < x < 1m$

a konstan 0 függvényeket most nem ábrázolom

méretarányos ábra a szerkezetről



$M_{a1}(0) = 0\ kNm$

$M_{a1}(0,4m) = -2,4 \cdot 0,4 = -0,96\ kNm$

$M_{a2}(0,4\ m) = -0,96\ kNm$ ✓, mivel nincs ugrás itt M_a-ban, hisz nincs koncentrált nyomaték

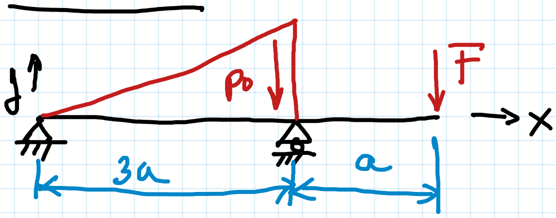
$M_{a2}(1m) = 0\ kNm$

$M_{a1}'(x) = -A_y = -V_1(x)$

$M_{a2}'(x) = -A_y + F_1 = -V_2(x)$

ell. ✓

Példa 9.2



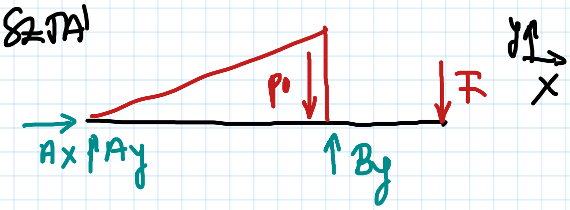
Adatok

$a = 0{,}3\,m$ $\quad p_0 = 4\,kN/m$

$F = 1\,kN$

Határozzuk meg az igénybevételi fgv-eket és ábrákat!

SZTÁ



EE

$\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - p_0 \frac{3}{2} a + B_y - F = 0$

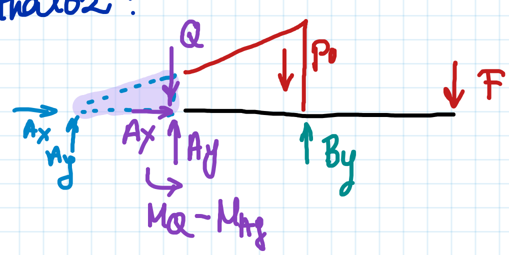
$\Sigma M_a = 0. \quad -p_0 \frac{3}{2} a \, 2a + B_y 3a - F\, 4a = 0$

$B_y = 2{,}53\,kN$ $\quad A_y = 0{,}27\,kN$ $\quad N(x) = 0$ $\quad M_t(x) = 0$

Igénybevételi függvények 2 folytonos szakaszra oszthatók!

$V_1(x) = A_y - Q = A_y - \frac{1}{2}\, p(x) \cdot x$

Q ~ elhagyott terület magasság alap



$p(x) = x \cdot \frac{p_0}{3a}$ ↳ meredekség

ell. $p(0) = 0$ $\quad$ között lineáris

$p(3a) = p_0$

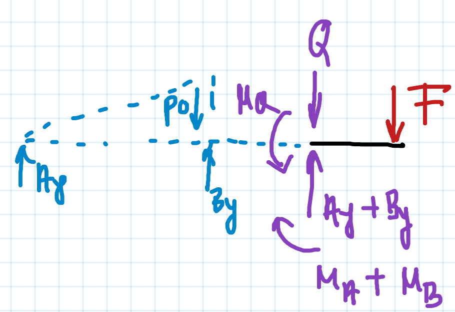
Tehát: $V_1(x) = A_y - \frac{1}{6a} p_0 x^2 \qquad 0 < x < 3a$

$M_{h_1}(x) = -A_y x + \frac{p_0}{6a} x^2 \cdot \frac{x}{3} \qquad 0 < x < 3a$

erőkar

$V_2(x) = A_y + B_y - \frac{1}{2} p_0 3a \qquad 3a < x < 4a$

$M_{h_2}(x) = -A_y x + \frac{1}{2} p_0 3a (x - 2a) - B_y (x - 3a) \qquad 3a < x < 4a$



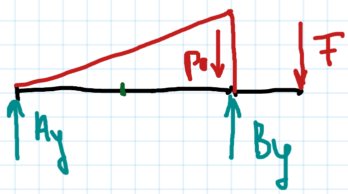
ellenőrzés:

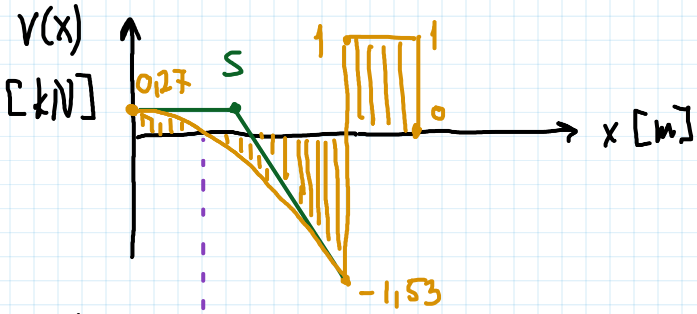
$M_{h_1}'(x) = -A_y + \frac{p_0}{6a} x^2 = -V_1(x)$ ✓

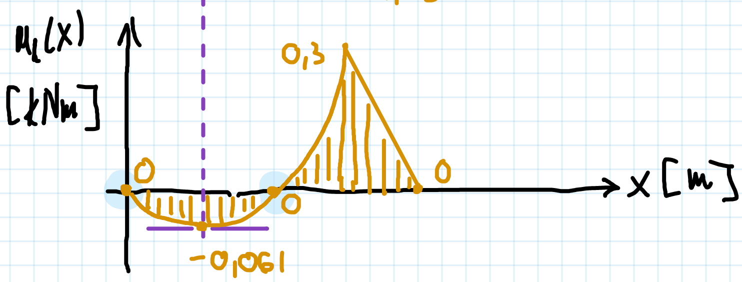
$M_{h_2}'(x) = -A_y + \frac{1}{2} p_0 3a - B_y = -V_2(x)$ ✓

Igénybevételi ábrák

0,1m

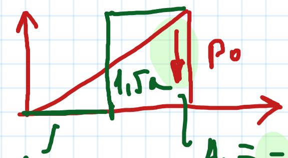






$V_1(0) = 0{,}267\ kN$

$\Delta V = \int p(x)\,dx$



$A_1 = 0$ $\quad A_2 = -1{,}5a \cdot p_0 = -1{,}8\ kN$

segédpont: $S = V_1(0) + A_1 = 0{,}27\ kN$

$V_1(3a) = -1{,}53\ kN\ (= S + A_2)$

$V_2(3a) = 1\ kN$

$M_{h_1}(x_{sz}) = ?$

$V_1(x_{sz}) = 0 \Rightarrow x_{sz} = \sqrt{\frac{0{,}267}{2{,}22}} = 0{,}35\,m$

$M_{h_1}(x_{sz}) = -0{,}061\ kNm$

$M_{h_1}(0) = 0\ kNm$

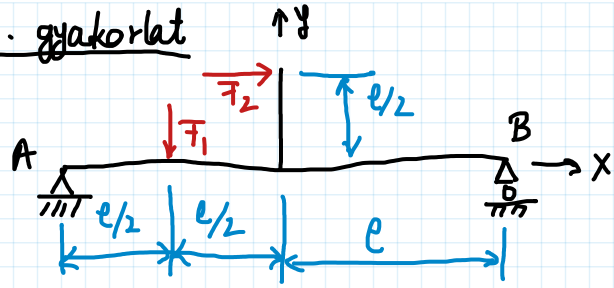
$M_{h_1}(x_z) = 0 \quad x_z = ? \quad \longrightarrow \quad M_{h_1}(x_z) = x_z(-0{,}267 + 0{,}74\,x_z^2) = 0$

$x_{z_1} = 0\ m \qquad x_{z_2} = 0{,}6\,m$

$M_{h_1}(3a) = 0{,}3\ kNm$

$M_{h_2}(3a) = 0{,}3\ kNm \qquad M_{h_2}(4a) = 0\ kNm$

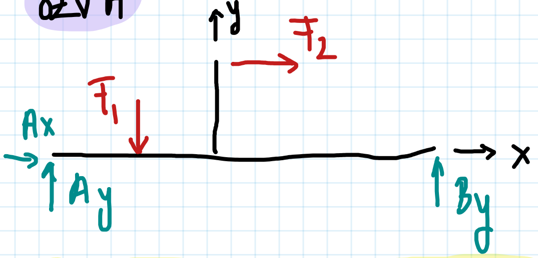
12. gyakorlat



$\ell = 1m$ $\quad F_1 = 120N$ $\quad F_2 = 200N$

Igénybevételi ábrák?

SZTA



EE

$$\Sigma F_x = 0: \; A_x + F_2 = 0 \implies A_x = -F_2 = -200\,N$$

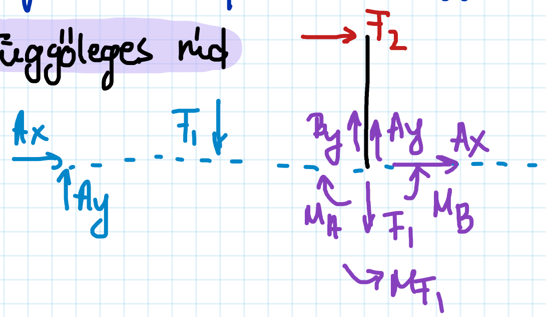
$$\Sigma F_y = 0: \; A_y - F_1 + B_y = 0$$

$$\Sigma M_a = 0: \; -F_1 \cdot \ell/2 + F_2 \cdot \ell/2 - B_y \cdot 2\ell = 0$$

$B_y = 80\,N$ $\qquad A_y = 40N$

Igénybevételek felírhatók egyenként a rudakra. Vízszintes + függőleges

Függőleges rúd



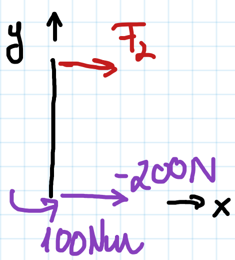
Ilyenkor a vízszintes rudat elhagyjuk, a rajta lévő erőrendszert redukáljuk oda, ahol a 2 rúd csatlakozott!

Redukált erőrendszer: x irányú erők: $A_x = -200\,N$

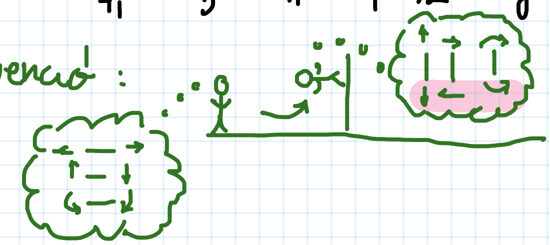
y irányú erők: $B_y + A_y - F_1 = 0\,N$

nyomatékok: $M_{F_1} + M_B - M_A = F_1 \, \ell/2 - A_y \cdot \ell + B_y \, \ell = 100\,Nm$

Tehát:



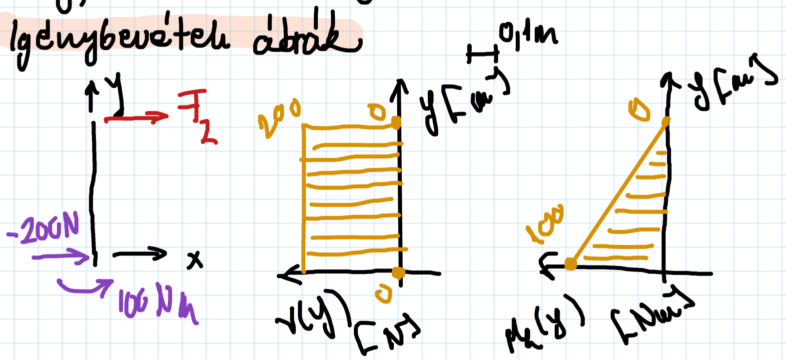
Előjelkonvenció:



lentről felfele redukálva

$N(y) = 0$ $\qquad V(y) = -(-200N) = 200N$ $\qquad M_h(y) = 100\,Nm + (-200) \cdot y = 100 - 200y$

Igénybevételi ábrák

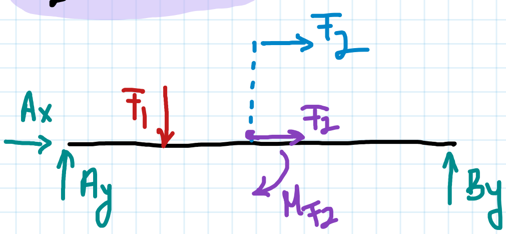


ell.: $M_h'(y) = -200 = -V(y)$ ✓

$M_h(0) = 100Nm$

$M_h(\ell/2) = 0Nm = M_h(0) - \underbrace{\int_0^{\ell/2} V(y)\,dy}_{\text{terület} = 200 \cdot 0,5}$

Vízszintes rúd



függőleges rudat elhagyjuk, rajta lévő erőrendszert a rudak csatlakozási pontjába redukáljuk

$M_{F_2} = F_2 \cdot \ell/2$

Igénybevételek 3 folytonos szakaszra bonthatók

I.: $0 < x < \ell/2$

$N_1(x) = -A_x = 200N$

$V_1(x) = A_y = 40N$

$M_{h_1}(x) = -A_y \cdot x = -40x$

II.: $\ell/2 < x < \ell$

$N_2(x) = -A_x = 200N$

$V_2(x) = A_y - F_1 = -80N$

$M_{h_2}(x) = -A_y x + F_1(x - \ell/2) = 80x - 60$

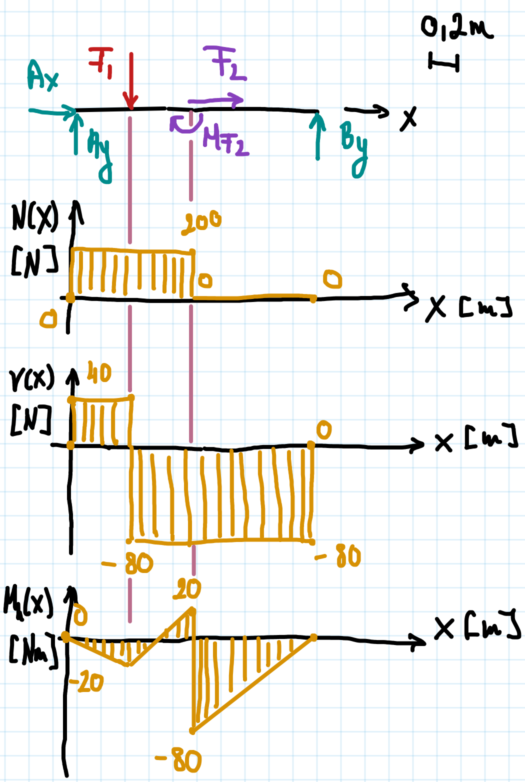
III.: $\ell < x < 2\ell$

$N_3(x) = -A_x - F_2 = 0N$

$V_3(x) = A_y - F_1 = -80N$

$M_{h_3}(x) = -A_y x - F_1(x - \ell/2) - F_2 \ell/2 = 80x - 160$

Igénybevételi ábrák

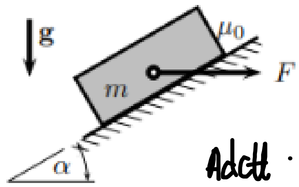


$M_{h_1}(0) = 0Nm$ $\quad M_{h_1}(\ell/2) = -20Nm$ $\quad M_{h_2}(\ell/2) = -20Nm$

$M_{h_2}(\ell) = 20Nm$ $\quad M_{h_3}(\ell) = -80Nm$ $\quad M_{h_3}(2\ell) = 0Nm$

13 gyakorlat

Példa 1



1. Egy α hajlásszögű érdes lejtőn egy m tömegű hasáb nyugszik, melyre vízszintes F erő hat (a nehézségi erő mellett). Határozzuk meg az F erő legnagyobb és legkisebb értékét, melynél a hasáb még egyensúlyban van (nem csúszik meg)!
Megoldás: (feltéve, hogy $\mu_0 < 1/\tan\alpha$, különben *önzárás* következik be)

Adott: m, μ_0, F

$$mg\frac{\tan\alpha-\mu_0}{1+\mu_0\tan\alpha} \le F \le mg\frac{\tan\alpha+\mu_0}{1-\mu_0\tan\alpha}$$

Hasáb tömegpontként kezelhető

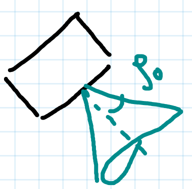
μ_0: tapadási súrlódási együttható

Mekkora az a minimális és maximális erő, amivel hatva a hasábra az nyugalomban marad?

Nyugalomban marad, ha $\underline{K}$ kényszererő a súrlódási kúpon belül marad

$\underline{K} = \underline{N} + \underline{S}$

$\underline{N}$: felületre normális irányú komponens
$\underline{S}$: felület síkjába eső komponens



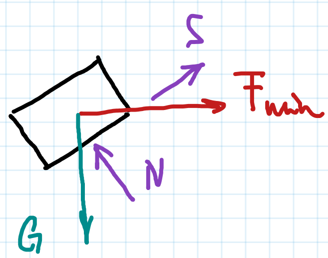
↖ súrlódási kúp

$\mu_0 = \operatorname{tg}\rho_0$

ρ_0: súrlódási félkúpszög

a) $F_{min} = ?$

SZTA'



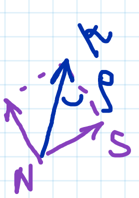
$G = mg$

$\underline{F}_{min} + \underline{G} + \underline{K} = \underline{0}$

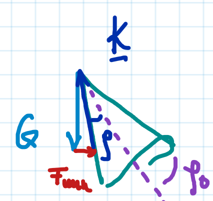
3 erő egyensúlya

pont nem csúszik le a hasáb

↳ S a lefele mozgást akadályozza: felfele mutat a lejtőn

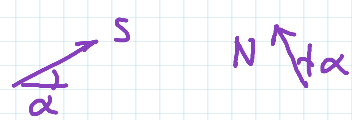


K maradjon a félkúpban, de szélső helyzetben



$\operatorname{tg}\rho = \dfrac{S}{N}$, $\rho \le \rho_0$ esetén a félkúpon belül vagyunk

$\Rightarrow$ szélsőhelyzet esetén $\rho = \rho_0 \Rightarrow \operatorname{tg}\rho_0 = \mu_0 = \dfrac{S}{N}$ (1)



EE

$\Sigma F_x = 0$: $F_{min} + S\cdot\cos\alpha - N\sin\alpha = 0$ (2)

$\Sigma F_y = 0$ $-G + S\sin\alpha + N\cos\alpha = 0$ (3)

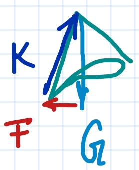
(1): $N = \mu_0 S$

(3) $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha + \mu_0\sin\alpha}$

(2) $F_{min} = \dfrac{\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu_0\sin\alpha}\cdot mg$

Ha $\sin\alpha - \mu_0 \cos\alpha \le 0$ külső erő nélkül is nyugalomban marad a test, mivel többe kéne, hogy lecsússzon (F_{min} negatív)

ábrázolva pl.:

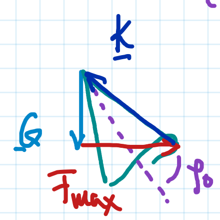


$\underline{G}$ a súrlódási félkúpban volt, balra mutató $\underline{F}$ vektorral érintendő a palástot

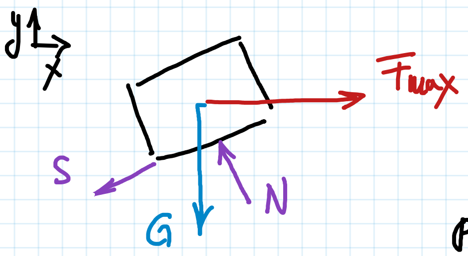
Mikor igaz ez? $\sin\alpha - \mu_0\cos\alpha \le 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \le \mu_0 = \operatorname{tg}\rho_0 \Rightarrow \alpha \le \rho_0$

b) $F_{max} = ?$ → pont nem indul meg felfele ⇒ S lefele mutat a lejtőn (akadályoz)

megjegyz.: F_{max} esetén $\underline{K}$ a második palásttal párhuzamos



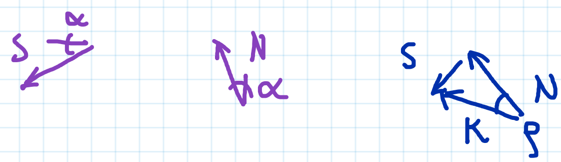
SZTÁ



$\sum F_x = 0: \quad F_{max} - S\cos\alpha - N\sin\alpha = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = 0: \quad -G + N\cos\alpha - S\sin\alpha = 0 \quad (2)$

pont nem csúszik meg: $\mu_0 = S/N \quad (3)$



(3) $\mu_0 N = S$

(2) $N = \dfrac{1}{\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha}\, mg$

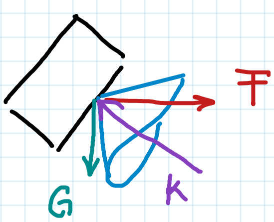
(1) $F_{max} = \dfrac{\mu_0\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha} \cdot mg$

$\cos\alpha - \mu_0 \sin\alpha > 0$ esetén érvényes

Ha $\cos\alpha - \mu_0\sin\alpha \le 0$ $\quad F_{max} \to \infty \Rightarrow$ önzárás

↳ $\cos\alpha \le \mu_0 \sin\alpha \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha \le \mu_0$

azaz nincs olyan nagy erő, amivel elkezdene felfele csúszni a hasáb!

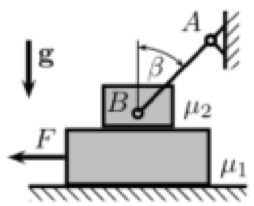


F erő a kúpon belül van

$\underline{F} + \underline{G} + \underline{K} = 0 \Rightarrow \underline{K} = -\underline{F} - \underline{G} = -(\underbrace{\underline{F} + \underline{G}})$

nem érintheti a felső palástot semmi esetben

Példa 3

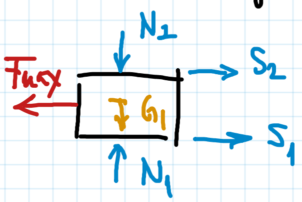


3. Egy G_1 súlyú hasáb nyugszik az érdes vízszintes talajon. A hasábon egy másik, G_2 súlyú hasáb található, amit egy $\beta = 45°$-os helyzetű *súlytalan* merev rúddal rögzítünk a falhoz egy sima csuklóval. Mekkora lehet a G_1 hasábra ható vízszintes irányú F erő, anélkül, hogy a hasáb megcsúszna ($G_1 = 2G_2 = 30$ kN, $\mu_1 = 0{,}3$, $\mu_2 = 0{,}2$)?
Megoldás:

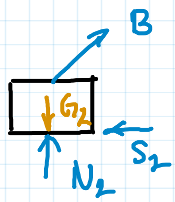
$$F_{\max} = \mu_1 G_1 + G_2 \frac{\mu_1 + \mu_2}{\tan\beta + \mu_2} \tan\beta \equiv 15{,}25\,\text{kN}$$

2 test → 2 SZTA' : mindkettő doboz pontszerű testként kezelhető (nincs kiterjedése)

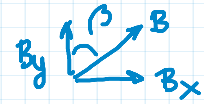
SZTA' 1



SZTA' 2



BA rúd statikai rúd
↳ csak a csuklókban terhelt
⇒ $\underline{B}$ vektor rúdirányú



megcsúszás határa: $\mu_1 = \frac{N_1}{S_1}$ (1) $\qquad \mu_2 = \frac{N_2}{S_2}$ (2)

EE 1

$\Sigma F_x = 0: \ -F_{max} + S_2 + S_1 = 0$ (3)

$\Sigma F_y = 0: \ N_1 - N_2 - G_1 = 0$ (4)

EE 2

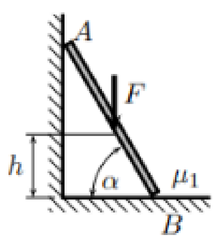
$\Sigma F_x = 0: \ B_x - S_2 = 0$ (5)

$\Sigma F_y = 0: \ B_y - G_2 + N_2 = 0$ (6)

$B_x = B \sin\beta$ (7) $\qquad B_y = B\cos\beta$ (8)

$$F_{max} = \mu_1 G_1 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{1 + ctg\beta \cdot \mu_2} G_2 = 15{,}25\,kN$$

Példa 2

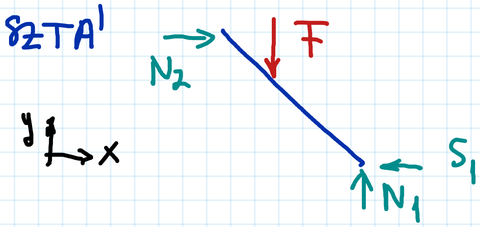


2. Egy $l = 2$ m hosszúságú, elhanyagolható tömegű létra támaszkodik az érdes talajon ($\mu_1 = 0{,}4$) a függőleges sima falnak $\alpha = 60°$-os szögben. Határozzuk meg szerkesztéssel és számítással, hogy egy $F = 700$ N súlyú ember milyen h magasságig mászhat fel a létrára, anélkül, hogy az megcsúszna! Mekkora erővel nyomja a fal a létrát? Hogyan változnak a kiszámított értékek, ha a fal is érdes ($\mu_2 = 0{,}25$)?
Sima fal esetén: $h = 1{,}2$ m, $\quad A = \mu_1 F \equiv 280$ N
Érdes fal esetén:

$$h = \mu_1 l \frac{\mu_2 \cos\alpha + \sin\alpha}{1 + \mu_1\mu_2} \tan\alpha \equiv 1{,}25\,\text{m}, \qquad A = F\frac{\sin\rho_1}{\cos(\rho_1 - \rho_2)} \equiv 262{,}4\,\text{N}$$

a)

SZTA'



sima fal $\mu_2 = 0$

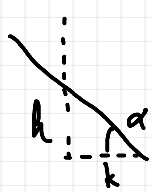
$S_1 = N_1 \mu_1$ (1)

EE

$\Sigma F_x = 0 \cdot \ N_2 - S_1 = 0$ (2)

$\Sigma F_y = 0 \quad N_1 - F = 0$ (3)

$\Sigma M_B = 0: \ F \cdot h/tg\alpha - N_2 l \sin\alpha = 0$ (4)

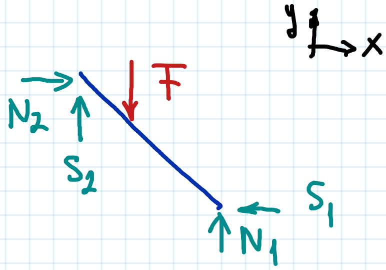


$\frac{h}{k} = tg\alpha$

(2) $N_2 = N_1\mu_1$ (3) $N_1 = F$ (2) $N_2 = F\mu_1$ (4) $h = \dfrac{F\mu_1 \ell \sin\alpha}{F}\,\mathrm{tg}\alpha = 1{,}2\,m$

$N_2 = F\mu_1 = 280\,N$

b) SZTA'



(1) $S_2 = N_2\mu_2$ (2) $S_1 = N_1\mu_1$

EE

$\Sigma F_x = 0 \cdot N_2 - S_1 = 0$ (3)

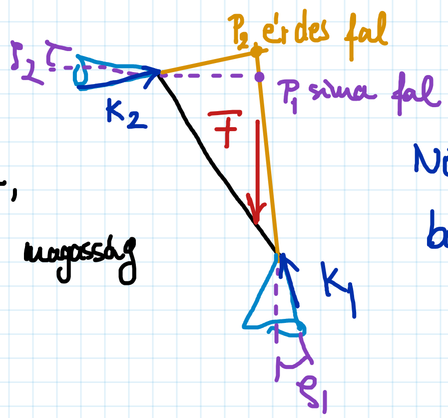
$\Sigma F_y = 0 \quad S_2 + N_1 - F = 0$ (4)

$\Sigma M_b = 0: \; F \cdot h/\mathrm{tg}\alpha - S_2 \ell \cos\alpha - N_2 \ell \sin\alpha = 0$ (5)

(3) $N_2 = N_1\mu_1$ (4) $N_1(\mu_1\mu_2 + 1) = F$

(5) $\dfrac{N_1(\mu_1\mu_2+1)h}{\mathrm{tg}\alpha} = \ell N_1(\mu_1\mu_2\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha) \Rightarrow h = \dfrac{\ell\mu_1(\mu_2\cos\alpha + \sin\alpha)\,\mathrm{tg}\alpha}{\mu_1\mu_2 + 1} = 1{,}25\,m$

ábrázolva



P2 balrább található, tehát nagyobb h magasság tartozik hozzá

Növelve bármelyik félkúpszöget a metszéspont balra vándorolna