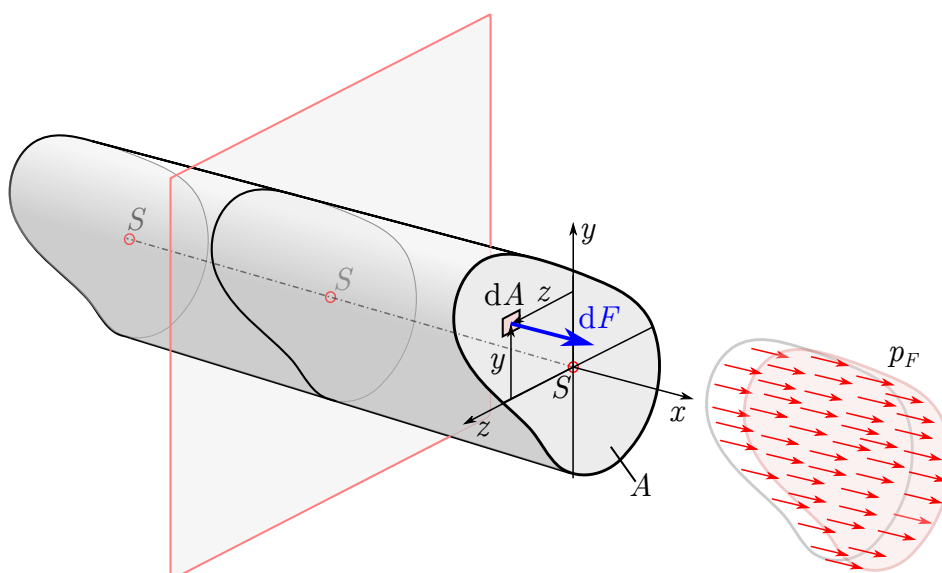


# Statika

Csernák Gábor



*Lektorálatlan változat! Ha hibát talál, kérem, jelezze a [csernak@mm.bme.hu](mailto:csernak@mm.bme.hu) címen!*

# Előszó

Ez a kiadvány a BME Gépészmérnöki Karán alapképzésben oktatott Statika tantárgy tematikájához igazodik, tehát elsősorban gépész- és mechatronikai mérnök hallgatóknak kíván segítséget nyújtani a statika<sup>1</sup> alapvető összefüggéseinek és módszereinek ismertetésével. Az itt közölt ismeretanyag a BME Műszaki Mechanikai Tanszék dolgozóinak több évtizedes oktatási tapasztalata alapján alakult ki, akik folyamatosan részt vettek a tantárgy tananyagának és oktatási módszereinek fejlesztésében. Köszönettel tartozom munkatársaimnak, hogy tudásukat, tapasztalataikat megosztották velem.

A statika tudománya többféle gondolatmenet alapján is felépíthető. Az egyik szokásos megközelítés szerint a statika alaptételéből (lásd 3.3. tétel) indulnak ki, és abból vezetik le az egyensúly feltételeit a különféle konkrét esetekre. Egy másik gondolatmenet számos, a hétköznapi tapasztalatok alapján elfogadható alapelv (axióma) kimondásán alapul, melyek felhasználásával kikövetkeztethetők a legáltalánosabb esetekre is alkalmazható törvényszerűségek. Ez a jegyzet az utóbbi megközelítéshez áll közel.

Az anyag felépítése során arra törekedtem, hogy az olvasóban minél előbb kialakuljon egy kép arról, hogy mivel foglalkozik a statika, és annak eredményei mire és hogyan használhatók a gyakorlatban. Ezért az első fejezet a mechanikai és statikai alapfogalmak és megoldási módszerek ismertetésével kezdődik. Az ezek illusztrálására felhozott példákban előfordul, hogy a későbbi fejezetekben tárgyalt tételekre, illetve hétköznapi tapasztalatokra hivatkozom, mert reményeim szerint így jobban megérthető a legalapvetőbb tételek, definíciók és alapelvek gyakorlati jelentősége. A statika alapelveinek kimondása (1.6. fejezet) után viszont egy matematikailag szigorúbb tárgyalásmód kerül előtérbe.

A tananyag befogadását rövid feladatok kidolgozásával próbáltam megkönnyíteni. Bár ezek segíthetik a leírtak megértését, az elmélet megfelelő mélységű elsajátításához elengedhetetlennek tartom az önálló feladatmegoldás gyakorlását, amihez az [1] példatárat javaslom. A szöveg jobb tagolása érdekében a tételek, következmények, példák végét a ♠, míg a definíciók és megjegyzések végét a ♣ szimbólum jelzi.

Bízom abban, hogy mind a hallgatók, mind az esetleg érdeklődő szakemberek haszonnal forgatják majd ezt a könyvet.

Budapest, 2022. október.

Csernák Gábor

---

<sup>1</sup>A következőkben a tudományág nevét kis, a tantárgy nevét nagybetűvel írjuk.



# Tartalomjegyzék

Előszó	III
Tartalomjegyzék	VII
<b>1. Statikai alapfogalmak</b>	<b>1</b>
1.1. Bevezetés . . . . .	1
1.2. A mechanika felosztása . . . . .	3
1.3. Modellek . . . . .	8
1.3.1. A modell fogalma . . . . .	8
1.3.2. Mechanikai modellek . . . . .	10
1.4. Az erő . . . . .	13
1.4.1. Terhelési (erő) modellek . . . . .	14
1.4.2. Az erő, mint vektor . . . . .	15
1.5. A statikai feladatok megoldási módszerei és az erő megadása . . . . .	20
1.5.1. Az erő geometriai megadása . . . . .	21
1.5.2. Az erő megadása koordinátákkal . . . . .	22
1.5.3. Szabadtest-ábrák . . . . .	26
1.6. A statika alapelvei . . . . .	29
1.6.1. Közös támadáspontú erők eredője . . . . .	30
1.6.2. Két, ugyanarra a merev testre ható erő egyensúlya . . . . .	33
1.6.3. Egyensúlyi erőrendszer hozzáadása vagy elvétele . . . . .	33
1.6.4. Három, ugyanarra a merev testre ható erő egyensúlya . . . . .	35
1.6.5. A hatás-ellenhatás törvénye . . . . .	36
1.6.6. A helyettesíthetőség (megmerevítés) elve . . . . .	39
1.6.7. Az erópárok egyenértékűségének elve . . . . .	41
1.7. Kényszerek . . . . .	41
1.7.1. A kényszer fogalma . . . . .	41
1.7.2. Támasztás, görgős támasz . . . . .	43
1.7.3. Síkcukló . . . . .	45
1.7.4. Gömbcsukló . . . . .	47
1.7.5. Kötél . . . . .	47
1.7.6. Befogás . . . . .	47
1.7.7. Csúszka . . . . .	48
1.7.8. Kétcuklós kényszer . . . . .	49

<b>2. Síkbeli erőrendszerek</b>	<b>51</b>
2.1. Két párhuzamos erő eredője	51
2.1.1. Azonos értelmű erők	51
2.1.2. Ellentétes értelmű erők eredője	56
2.1.3. Az erőpár	58
2.2. Erő tengelyre számított nyomatéka	59
2.3. Az erőpár tulajdonságai	64
2.3.1. Az erőpár nyomatéka	64
2.3.2. Koncentrált erőpár	66
2.4. Közös síkú erők és erőpárok eredője	67
2.5. Koncentrált erő áthelyezése másik hatásvonalra, és az erőrendszer redukálása	70
2.6. Síkbeli erőrendszer egyensúlya	73
2.7. Erő felbontása három, vele egy síkba eső komponensre	76
2.7.1. Ritter-féle számító eljárás	79
2.7.2. Culmann-féle szerkesztő eljárás	81
<b>3. Térbeli erőrendszerek eredője és egyensúlya</b>	<b>85</b>
3.1. Erő pontra számított nyomatéka	85
3.2. Kapcsolat a pontra és tengelyre számított nyomatékok között	89
3.3. Térbeli erőrendszer redukálása	91
3.4. Vektorkettősök	94
3.5. A statika alaptétele	95
3.6. Erőrendszerek osztályozása vektorkettősük alapján	96
3.7. Megoszló erőrendszerek, súlypont	100
3.7.1. Párhuzamos erőrendszer középpontja	100
3.7.2. Súlypont	105
3.7.3. Vonal mentén megoszló párhuzamos erőrendszer eredője	114
<b>4. Szerkezetek statikája</b>	<b>117</b>
4.1. Szabadsági fok	117
4.1.1. A szabadsági fok fogalma	117
4.1.2. A szabadsági fok és az egyensúlyi egyenletek kapcsolata	119
4.1.3. Statikai határozottság	120
4.1.4. A kényszererő-rendszer elemeinek jelölése	126
4.2. Rácsos szerkezetek	128
4.2.1. A rácsos szerkezetek tulajdonságai	128
4.2.2. Csomóponti módszer	132
4.2.3. Átmetsző módszer	135
4.2.4. A rácsos szerkezetek előnyei és hátrányai	138
4.3. Síkbeli csuklós szerkezetek	138
4.3.1. Bakállvány csuklóiban ébredő erők meghatározása	139
4.3.2. A reakciók meghatározása a szuperpozíció elv alapján	143
4.3.3. Gerber-tartó	145
4.4. Példák	148

<b>5. Rudak igénybevételei</b>	<b>153</b>
5.1. A testekben ébredő belső erőrendszer . . . . .	153
5.2. A rudak geometriai leírása . . . . .	156
5.3. Az igénybevétel fogalma . . . . .	157
5.4. Igénybevételi függvények és igénybevételi ábrák . . . . .	162
5.5. Kapcsolatok az igénybevételi függvények között . . . . .	167
5.6. Törtvonalú és síkgörbe rudak igénybevételei . . . . .	180
<b>6. Keresztmetszetek nyomatékai</b>	<b>187</b>
6.1. A nyomaték fogalmának általánosítása . . . . .	187
6.2. Elsőrendű nyomatékok . . . . .	189
6.3. Másodrendű nyomatékok . . . . .	191
6.3.1. Tengelyre és tengelypárra számított másodrendű nyomatékok . . . . .	191
6.3.2. Poláris másodrendű nyomaték . . . . .	196
6.4. Steiner-tétel . . . . .	197
6.5. Másodrendű nyomatékok elforgatott tengelyek esetén . . . . .	203
6.6. Főmásodrendű nyomatékok, főirányok . . . . .	208
6.6.1. A főmásodrendű nyomatékok meghatározása Mohr-féle kördiagrammal	208
6.6.2. Főmásodrendű nyomatékok sajátérték-sajátvektor számítással . . . . .	210
<b>7. Feltételes kényszerek: tapadási súrlódás</b>	<b>215</b>
7.1. A feltételes kényszerek értelmezése . . . . .	215
7.2. A Coulomb-súrlódás alapmodellje . . . . .	216
7.3. Súrlódás pontszerű érintkezések mellett . . . . .	223
7.4. Merev testek gördülése . . . . .	225
7.5. Gördülési ellenállás, indítási nyomaték . . . . .	226
7.6. A tapadási és csúszási súrlódás összehasonlítása . . . . .	228
7.7. Kötélsúrlódás . . . . .	228
7.8. Csapsúrlódás . . . . .	233
<b>8. Függelék</b>	<b>237</b>
8.1. Matematikai alapok – mátrixok és vektorok között értelmezett szorzások . . . . .	237
8.2. Néhány homogén test és síkidom súlypontjának számítása . . . . .	242
8.2.1. Negyedkörcikk alakú lemez súlypontja . . . . .	242
8.2.2. Negyedkörív alakú rúd súlypontja . . . . .	243
8.2.3. Félgömb súlypontja . . . . .	243
8.2.4. Kúp súlypontja . . . . .	244
8.3. Síkidomok másodrendű nyomatékai . . . . .	245
8.4. A legfontosabb szakkifejezések angol megfelelői . . . . .	246





# 1. fejezet

## Statikai alapfogalmak

### 1.1. Bevezetés

A statika tudománya a mechanika egyik részterülete, ezért jelentőségének megértéséhez először át kell tekintenünk, hogy mivel is foglalkozik a mechanika. Talán az a legtalálhatóbb meghatározás, miszerint *a mechanika a mozgásokkal, a deformációkkal (alakváltozásokkal), és az erőkkel foglalkozó tudomány* [2]. A mozgás, a deformáció és az erő mind olyan fogalmak, melyeket a későbbiekben részletesen meg kell vizsgálnunk a mechanika keretein belül, de egyelőre megelégedhetünk e fogalmak hétköznapi értelmezésével.

A *műszaki* mechanika művelése esetében még azt is hozzá kell tennünk a fenti definícióhoz, hogy vizsgálataink során a kidolgozott elvek *gyakorlati felhasználását* tartjuk szem előtt, ennek megfelelő feladatokat oldunk meg, és ehhez jól algoritmizálható megoldási módszereket keresünk. A műszaki mechanikai ismeretek teszik lehetővé a mérnökök számára, hogy olyan gépeket, szerkezeteket tervezzenek és üzemeltessenek, melyek a megkívánt módon mozognak (vagy nyugalomban maradnak), és eközben nem mennek tönkre a rájuk ható terhelések hatására.

A mechanika két legnagyobb részterülete a szilárd testek mechanikája, illetve a folyadékok és gázok mechanikája (áramlástan). A műszaki mechanika elsősorban a szilárd testekkel foglalkozik; ezt a területet pedig sokféleképpen feloszthatjuk. Mi a gépészmérnöki alapképzés tantervében szereplő tárgyak hagyományos tematikáját szem előtt tartva, két szempont alapján definiálunk részterületeket:

- 1) A vizsgált testek nyugalomban vannak vagy mozognak?
- 2) A vizsgált testekre ható erők okoznak-e alakváltozást?

E szempontok megfelelő figyelembevételére érdekében érdemes bevezetni az *egyensúly*, és a *merev test* fogalmát.

#### Egyensúly

Mint látni fogjuk, a statika keretében többek között annak a feltételeit vizsgáljuk, hogy valamilyen test vagy (tartó)szerkezet ne mozduljon el a rá ható terhelések hatására, hanem tartósan nyugalomban maradjon (1.1. ábra).

**1.1. definíció.** *A tartós nyugalom állapotát egyensúlynak nevezzük.*





**1.1. ábra.** Egyensúlyozás a kanadai CN Tower kilátójának peremén, a talajtól mért 356 m magasságban [A1]

**1.1. megjegyzés:** Bármely anyagi test helyzete és mozgása csak más testekhez képest értelmezhető, ezért egy test mozgásának leírásához választani kell egy másik testet is, amelyhez a mozgást viszonyítjuk. Ezt a másik testet *vonatkoztatási rendszernek* nevezzük. Gondoljunk egy állandó sebességgel haladó vonatra, ami éppen kigördül az állomásról! Ha az állomás épületét választjuk vonatkoztatási rendszernek, akkor azt állapíthatjuk meg, hogy a vonat mozog. Viszont ha a vonathoz rögzítjük a vonatkoztatási rendszert, akkor onnan nézve az állomás tűnik mozognak. Tehát hogy egy adott test nyugalomban van-e vagy mozog, az attól is függ, hogy milyen vonatkoztatási rendszert választunk.

A választást az könnyíti meg, hogy vannak természeti törvények által kitüntetett, különleges vonatkoztatási rendszerek, ún. *inerciarendszerek*. Minden inerciarendszerben ugyanúgy játszódnak le a fizikai folyamatok, ezért célszerű inerciarendszert választani vonatkoztatási rendszernek. Tehát azzal egészíthetjük ki a fenti definíciót, hogy akkor van egy test egyensúlyban, ha található hozzá olyan *inerciarendszer*, melyben tartósan nyugalomban van. Ha külön nem említik, hogy milyen vonatkoztatási rendszert használnak, akkor általában inerciarendszerhez képest kell értelmezni a mozgást.

Az inerciarendszerek tulajdonságainak részletes tárgyalásával a dinamika tudománya foglalkozik. Newton törvényei alapján belátható, hogy elvileg végtelenül sok inerciarendszer létezik, melyek egymáshoz képest egyenes vonalú, egyenletes haladó mozgást végeznek. Tehát ha találunk egy olyan inerciarendszert, amelyben a vizsgált test egyenes vonalú, egyenletes haladó mozgást<sup>1</sup> végez, akkor biztosan van olyan inerciarendszer is, ahol a test tartós nyugalomban, azaz egyensúlyban van. Bár a Föld kering a Nap körül és forog a saját tengelye körül (tehát nem haladó mozgást végez, pontjai nem egyenes vonalakon mozognak, és a mozgás üteme sem egyenletes), a mérnöki feladatok nagy részében mégis jó közelítéssel inerciarendszernek tekinthető. Ezért a talajhoz vagy az épületekhez képest nyugalomban lévő testeket egyensúlyban lévőnek tekinthetjük.

A nyugalom fogalmának értelmezéséhez érdemes azt is megfontolni, hogy a környezetből átadódó hatások következtében minden test kisebb-nagyobb rezgéseket végez. Ezek a rezgések sokszor nem láthatóak, de gyakran hallhatóak vagy tapintással érzékelhetőek. Például egy híd korlátját megfogva érezhetjük az azon áthaladó gépkocsik, villamosok által keltett rezgéseket. Egészen kis méretekben, az atomok, molekulák szintjén is mérhető rezgések, melyek a test hőmérsékletével kapcsolatos hőmozgásnak feleltethetőek meg. Statikai vizsgálataink során

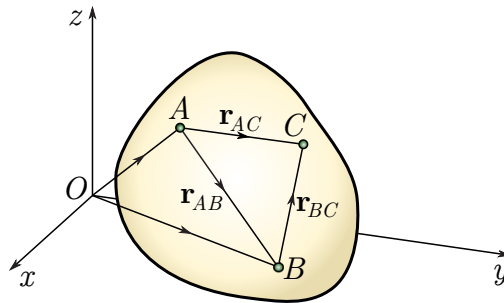
<sup>1</sup>Haladó mozgás során a test minden pontjának ugyanolyan irányú és nagyságú a sebessége.

ezeket a kis rezgéseket figyelmen kívül hagyjuk. A gyakorlatban azzal a közelítéssel is szoktak élni, hogy a lassan mozgó testeket is a statika eszközeivel vizsgálják, a dinamikai hatásokat elhanyagolva. ♣

### A merev test fogalma

A valóságban a szilárd testek deformálhatóak, méreteik változhatnak, de ez az alakváltozás – és az ezzel kapcsolatos elmozdulás – számos gyakorlati problémában olyan csekély, hogy a test egészét vizsgálva eltekinthetünk tőle, azaz merevnek tekinthetjük a testet.

**1.2. definíció.** Merev test: olyan anyagi test, melynek bármely két  $A$  illetve  $B$  pontja közötti távolság – azaz az  $A$ -ból  $B$ -be mutató helyvektor hossza – időben állandó:  $|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó}$  (1.2 ábra). ♠



**1.2. ábra.** A merev test bármely két pontja – például  $A$  és  $B$ ,  $B$  és  $C$  vagy  $A$  és  $C$  – közti távolság állandó. A nem egy egyenesre eső  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontok helye meghatározza a merev test térbeli helyzetét

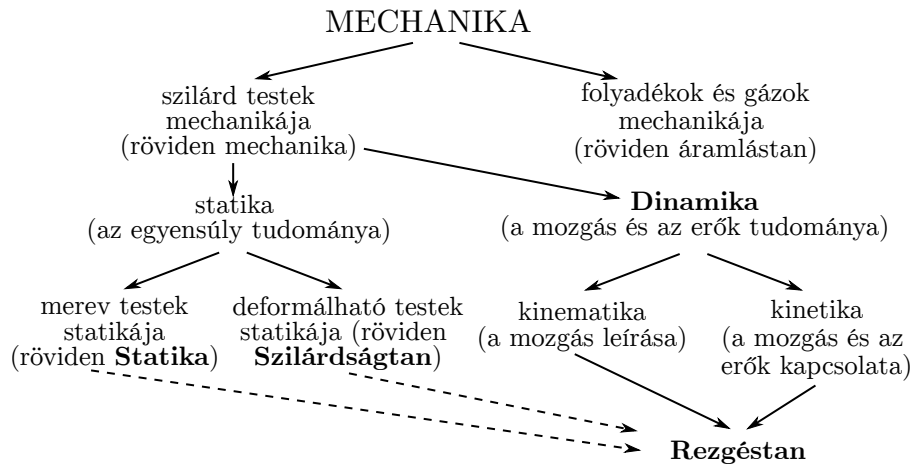
## 1.2. A mechanika felosztása

Az egyensúly és a merev test definíciója segítségével most már megadhatjuk a mechanika egy lehetséges felosztását, amit az 1.3. ábra szemléltet.

- A *statika* a legáltalánosabb értelmezés szerint a testek egyensúlyával foglalkozik. Ezen belül két területet szoktak elkülöníteni: a merev testek statikáját (amiben feltesszük, hogy a testekre ható erők csak elhanyagolható mértékű deformációt okoznak), és a deformálható testek statikáját.

A mechanikai szaknyelvben elterjedt, rövidített szóhasználat szerint a merev testek statikáját egyszerűen *statikának*, a deformálható testek statikáját pedig *szilárdságtannak* szokták nevezni (lásd 1.3. ábra). Ez utóbbi megközelítés szerint tehát azt mondhatjuk, hogy a *statika* a merev testek egyensúlyával foglalkozik. A továbbiakban ezt az értelmezést követjük.

Bár a valóságos testek nem tökéletesen merevek, számos műszaki feladat megoldása során kielégítő eredményre vezet az alakváltozás elhanyagolása. Például az ún. egyszerű gépek (lejtő, csavar, ék, emelő, csiga, hengerkerék, lásd 1.4. és 1.5. ábrák) működésének



**1.3. ábra.** A mechanika egy lehetséges felosztása. Az egyes tudományterületek nevét kis, a gépészmérnöki alapképzés hagyományos mechanika tárgyainak nevét pedig nagy kezdőbetűvel írtuk

megértéséhez elegendő a statika ismerete. A lejtő és a csavar működési elvét az 1.9. megjegyzésben, az éket az 1.6., az emelőt a 2.1., a hengerkereket a 7.3., a csigát pedig a 7.4. példában tárgyaljuk.



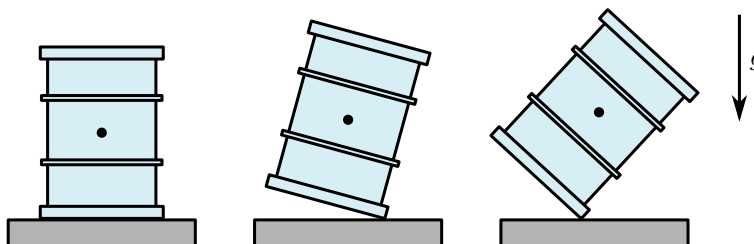
**1.4. ábra.** Lejtő: a Lacets de Montvernier serpentin Franciaországban [A2]

Statikai összefüggésekkel lehet meghatározni azt is, hogy egy talajra helyezett, valamilyen szögben megdöntött test felborul-e (1.6. ábra). Hasonlóan lehet számolni egy vitorlánhajó egyensúlyának feltételeit is (1.7. ábra). Az említett példákban viszonylag egyszerűen alkalmazhatóak a statika módszerei, de számos szerkezet ezeknél jóval bonyolultabb felépítésű. Gondolhatunk például egy toronydarura (1.7. ábra). Ebben az esetben statikai számításokkal lehet meghatározni a szükséges ellensúly nagyságát, és a darut alkotó rácsos szerkezet (lásd 4.2. fejezet) rúdjaiban ébredő erők nagyságát is – mindkettő elengedhetetlen a szerkezet megtervezéséhez.

A merev test modell használata azt is maga után vonja, hogy a statikában vizsgált szerkezetek esetében feltételezzük, hogy azok változás nélkül kibírják a rájuk ható terheléseket, bármekkora is azok. A valóságos szerkezetek azonban természetesen csak korlátozottan terhelhetők.



1.5. ábra. Néhány egyszerű gép: csavar, ék, fogó (két emelő), csiga, hengerkerék [A3]



1.6. ábra. Melyik hordó borul fel, ha a vázolt helyzetből elengedjük?

- Ha figyelembe vesszük a valóságos testek erők hatására bekövetkező deformációját, akkor felmerül az a kérdés is, hogy ennek során az anyagszerkezet megváltozhat, és a vizsgált test elszakadhat, eltörhet, vagy maradó alakváltozást szenvedhet. Ezeket a nemkívánatos eseteket *tönkremenetelnek* nevezzük. A műszaki mechanika nagy részterülete, a *deformálható testek egyensúlyával* foglalkozó *szilárdságtan* éppen arra a kérdésre keresi a választ, hogy hogyan lehet elkerülni a szerkezetek tönkremenetelét a méretek (például rudaknál a vastagság) megfelelő megválasztásával, azaz a *méretezéssel*. A szilárdságtan számítási módszereket ad ahhoz is, hogy egy meglévő szerkezetet *ellenőrizzünk* ebből a szempontból. Természetesen a gondos tervezés ellenére is előfordulhatnak tönkremenetelek, ahogy az 1.8. ábra is mutatja.

Gyakorlatilag bármilyen termékről legyen is szó, magától értetődő, hogy annak ki kell bírnia a terheléseket, tehát a tervezési folyamat szerves részét képezik a szilárdsági számítások. Fontos kiemelni, hogy a szilárdságtan tudománya jelentős részben támaszkodik a statika módszereire.

- Sok olyan műszaki feladattal is találkozhatunk, ahol a vizsgált testek deformációja elhanyagolható, de azok nem tartós nyugalomban vannak, hanem mozognak – sok esetben változik is a mozgásállapotuk a rájuk működő erők hatására. Ezzel a témakörrel a *dinamika* foglalkozik. Érdeemes megjegyezni, hogy nem csak a merev testek esetében hanyagolhatjuk el a deformációkat: bizonyos feladatokban elegendő a vizsgált test térbeli mozgását egy pontjának az elmozdulásával jellemezni. Az ennek megfelelő, ún. *anyagi pontnak* tekintett testek esetében is figyelmen kívül hagyható a deformáció.

**1.3. definíció.** Anyagi pont: *olyan test, melynek méretei lényegtelenek a vizsgált probléma megoldása szempontjából, vagy elhanyagolhatóak a vizsgált problémában szereplő egyéb távolságokhoz képest.* ♠

A fenti definícióból is látszik, hogy nem a test abszolút mérete számít ebben a be-



**1.7. ábra.** Bal oldalon: a vitorlákra, a hajótestre, és a tőkesúlyra ható erők egyensúlya statikai módszerekkel ellenőrizhető [A4]. Jobb oldalon: toronydaru ellensúllyal [A5]



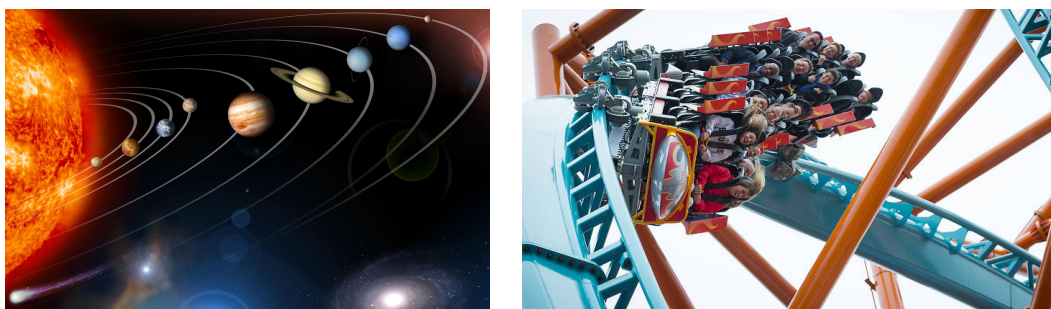
**1.8. ábra.** Egy törött főtartójú híd a Mississippi folyó felett [A6], és egy külső nyomástól összeroppant tartály [A7]

sorolásban! Megfelelő körülmények között egyaránt anyagi pontként modellezhetünk egy részecskegyorsítóban mozgó elektront, egy elhajtott kavicsot, egy lejtőn lecsúszó dobozt, vagy egy autópályán haladó gépkocsit. De akár a Naprendszer bolygóit is tekinthetjük anyagi pontoknak, ha a Nap körüli keringésüket akarjuk leírni, ekkor ugyanis méretük elhanyagolható a köztük lévő távolságokhoz képest (1.9. ábra).

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy *a dinamika az anyagi pontok és a merev testek mozgásával foglalkozik*. A dinamikának is van két fontos részterülete: a *kinematika* a testek mozgásának *leírásával* foglalkozó tudomány, a *kinetika* pedig a mozgásállapot megváltozása és a testre ható erők kapcsolatát kutatja.

- Fontos eset, amikor a vizsgált mechanikai rendszer bizonyos részeit deformálhatónak, sőt, rugalmasnak tekintjük, és azt vizsgáljuk, hogy milyen mozgások, rezgések alakulnak ki az egyensúlyi helyzet közelében – tehát ezek időbeli folyamatát tárgyaljuk. Az ezzel a témával foglalkozó *rezgés*tan a dinamika részének tekinthető, de felhasznál statikai és szilárdságtani összefüggéseket is.

A rezgéstani modellek jelentősége nyilvánvaló azokban az esetekben, amikor rugókat tartalmaz a vizsgált szerkezet, mint például a mechanikus órák vagy a gépkocsik futóműve (1.10. ábra). De a rezgésnek nagy a jelentősége a mérés technikában is: a vizs-



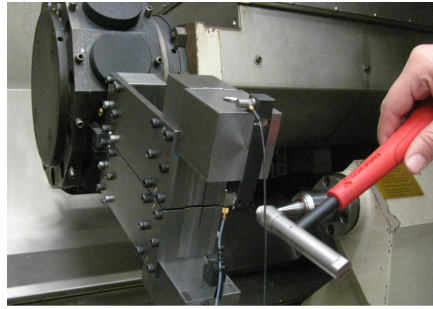
**1.9. ábra.** Naprendszer bolygói [A8] és hullámvasút [A9] – mindkét esetben vizsgálható a testek mozgása az anyagi pont modell és a merev test modell alapján is

gálandó gépet, szerkezetet megfelelő módon gerjesztve (például speciális kalapáccsal megütve, lásd 1.11. ábra), a létrejövő rezgések alapján következtetni lehet annak mechanikai tulajdonságaira. Mivel a hangok is a rezgésekből erednek, gyakran hallani is lehet, ha egy gép meghibásodott. A rezgések alapján történő vizsgálat hétköznapi példája, amikor a dinnyét vásárláskor megütögetik: a túlérett dinnyén belül repedések lehetnek, amiktől megváltozik az ütés hangja.

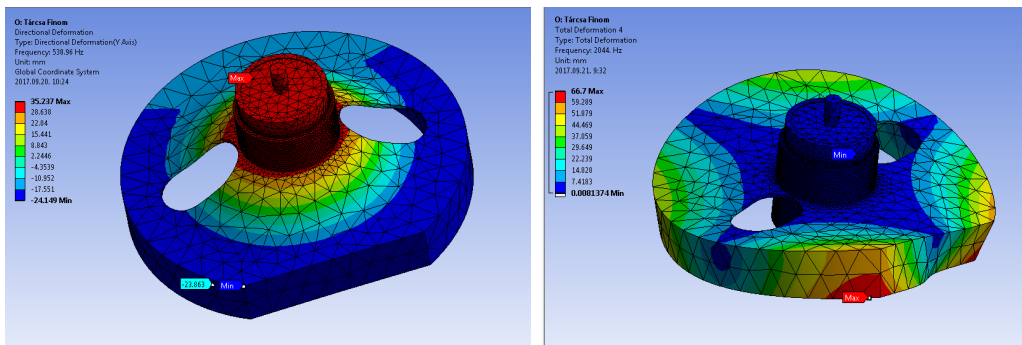


**1.10. ábra.** Bal oldalon: mechanikus karóra. Az óra alsó részén látszik a rezgő mozgást végző ún. billegő, a hozzá kapcsolt rugóval [A10]. Jobbra: gépkocsi futóműve [A11]

- Az iparban felmerülő mechanikai jellegű feladatok megoldásához gyakran egy hatékony numerikus eljárást használnak, a *végeselem módszert*. Ez a módszer a szilárd testek mechanikáján kívül áramlástani, hőtani és elektromosságtani problémák megoldására is alkalmazható (lásd 1.12. ábra).
- A mechanikán belül számos más részterületet is körülhatárolhatunk. Ilyenek például a szilárdságtannal rokon rugalmasságtan, képlékenységtan és kontinuummechanika, vagy a nemlineáris rezgések elmélete. Természetesen a valóságos problémákat nem mindig egyszerű besorolni a megemlített részterületek egyikébe: bizonyos esetekben szilárd testek és folyadékok kerülnek egymással kapcsolatba (repülőgépek, hajók, vizes



**1.11. ábra.** Egy alkatrész rezgésvizsgálata ún. modális analízis segítségével. A kalapács által keltett rezgéseket a testre ragasztott gyorsulásmérő szenzor detektálja [A12]



**1.12. ábra.** Egy alkatrész végeelem módszerrel meghatározott deformációi rezgés közben [A13]

úton haladó járművek stb., lásd 1.13. ábra), illetve a testek mozgása befolyásolhatja a kialakuló deformációkat is, ami bizonyos feladatokban fontos lehet.

**1.2. megjegyzés:** A szilárd testek mechanikáját többféleképpen is feloszthatjuk. Vannak, akik a mozgás leírásával foglalkozó kinematikára, és az erők hatásával foglalkozó dinamikára osztják fel. Ebben az esetben a dinamika részének tekinthető a statika, a szilárdságtan, a kinetika és a rezgéstan egyaránt.

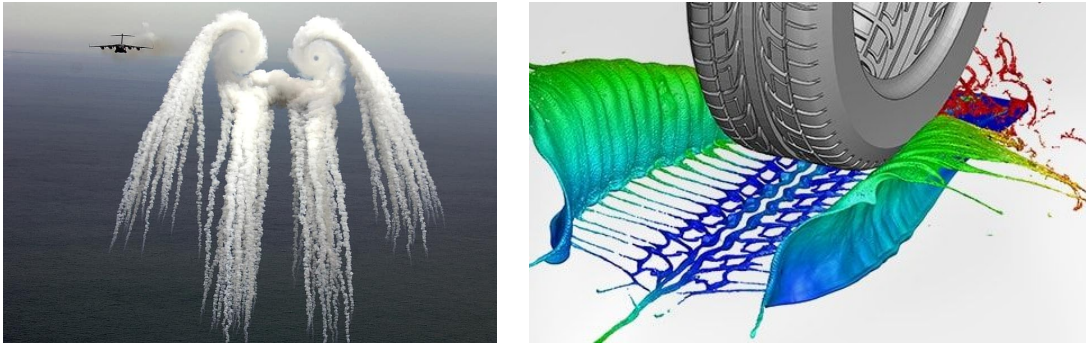
Mások azt helyezik előtérbe a felosztás során, hogy merev (statika, dinamika) vagy deformálható testeket (rugalmasságtan, képlékenységtan) vizsgál-e az adott tudományterület.

## 1.3. Modellek

### 1.3.1. A modell fogalma

A mechanika bemutatott felosztásának az alapját, hogy egy adott feladatban milyen elhanyagolásokat tehetünk. Elhanyagolásokra azért van szükség, mert a bennünket körülvevő világ rendkívül összetett, ezért a valós jelenségek leírása során nem vehetünk figyelembe minden körülményt. Ehelyett alkalmas közelítésekkel élünk: a vizsgált probléma szempontjából legfontosabb jellemzőkre, hatásokra korlátozzuk figyelmünket – azaz *modelleket* állítunk fel (1.14. ábra). Modelleket nem csak a mechanikában használnak: gyakorlatilag

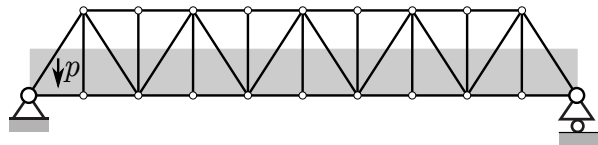




**1.13. ábra.** Bal oldalon: repülőgép által keltett örvények kísérleti kimutatása [A14]. Az örvények periodikusan gerjesztik a szárnyakat, melyek ettől rezgő mozgást végeznek. Jobb oldalon: víztócsán áthaladó gumibroncs numerikus vizsgálata [A15]

minden tudományág modellekkel dolgozik, és az egyes modellek kezeléséhez ad vizsgálati módszereket.

**1.4. definíció.** A modell egy bonyolult rendszer alkalmas módon leegyszerűsített mása, ami a vizsgált jelenség szempontjából a valósághoz hasonlóan viselkedik [3]. ♠



**1.14. ábra.** Vasúti híd [A16] és mechanikai modellje.  $p$  a vonat súlyából származó megmozlító erő intenzitását jelöli, lásd 1.4.1. fejezet

A klasszikus műszaki mechanika keretében makroszkopikus méretű, a fénysebességnél jelentősen lassabban mozgó testeket vizsgálunk. Nagy sebességeknél vagy kis (atomi) méreteknél ez az elmélet már pontatlan eredményeket ad. Az ilyen feladatok megoldására a *relativisztikus mechanika* illetve a *kvantummechanika* alkalmazható, melyek a klasszikus mechanikától eltérő matematikai eszközöket alkalmaznak.

**1.3. megjegyzés:** A speciális relativitáselmélet szerint minden  $v$  sebességgel mozgó test megrövidül a mozgás irányában. Ha a test nyugalmi mérete  $L_0$ , akkor a  $v$  sebesség melletti hossza

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.1)$$

ahol  $c = 299792458$  m/s a fénysebesség. Az ember által épített leggyorsabb eszköz a Parker napszonda, mely 2021 áprilisában körülbelül  $v = 147780$  m/s sebességgel haladt. A rövidülés mértéke még ebben az esetben is csupán

$$\frac{L(v)}{L_0} \approx 0.9999998785 \quad (1.2)$$

volt, tehát a hétköznapi tárgyak mozgása során ez a hatás valóban elhanyagolható.

A kvantummechanika egyik legfontosabb eredménye a Heisenberg-féle határozatlansági reláció, mely szerint egy test térbeli helye és impulzusa (azaz a tömegének és sebességének szorzata, más néven lendülete) egyidejűleg nem mérhető tetszőleges pontossággal: minél pontosabban mérjük az egyiket, annál kevesebb információnk lehet a másikról. Makroszkopikus méretű testek esetében elhanyagolható az ebből eredő hiba. Például ha egy 5 g tömegű golyó helyét  $1 \mu\text{m}$  pontossággal ismerjük, akkor a sebességének bizonytalansága csupán  $10^{-26}$  m/s nagyságrendű.

A fenti példák mutatják, hogy a klasszikus (newtoni) mechanika általában több mint elegendő pontossággal használható a gyakorlatban. ♣

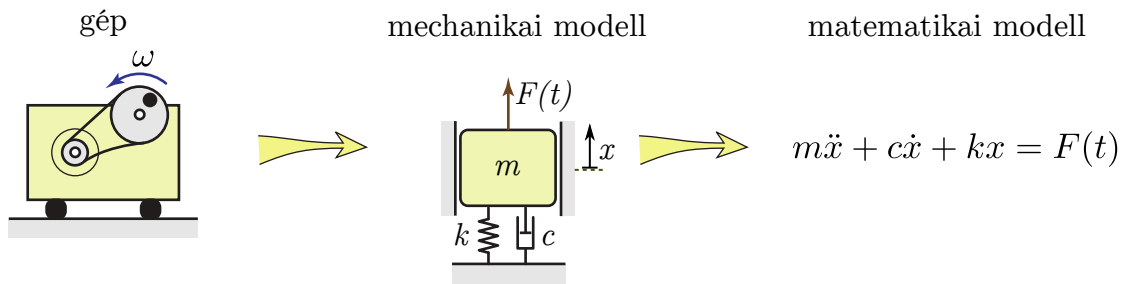
A megfelelő modell felállítása a legnehezebb mérnöki feladatok közé tartozik. Ennek során elsősorban a vizsgálat célját kell szem előtt tartani, például hogy mekkora a megkívánt pontosság és milyen következményekkel járhatnak az elhanyagolásokból eredő hibák.

Azonban azt is meg kell fontolni, hogy mekkora erőfeszítéseket kíván az egyes modellek alkalmazása. Szilárdsági méretezés során – amikor a test ismeretlen geometriai méreteit kell meghatározni – gyakran előfordul, hogy a szükséges számítás jelentősen egyszerűbbé válik, ha feltesszük, hogy a keresett méret egy bizonyos tartományba esik. Például hengeres tartályok méretezésekor egyszerűsítési lehetőséget jelent, ha a keresett falvastagság sokkal kisebb a henger átmérőjénél. Viszont csak a méretezési eljárás *végén* ismerjük meg az egyszerűbb modell alapján számított falvastagságot, és csak akkor tudjuk összehasonlítani az átmérővel. Ha a két méret aránya nem felel meg a kiinduláskor választott modellnek (túl vastagra jön ki a fal), akkor újra kell kezdeni a számítást, egy alkalmasabb modell alapján. Más esetekben előfordulhat, hogy a terhelés következtében annyira megváltozik egy test alakja, hogy ez a deformáció már nem hanyagolható el, ezért a merev test modell már csak korlátozottan alkalmazható (lásd 1.48. ábra). Ezek a példák is mutatják, hogy az alkalmazott modellek érvényességéről mindig meg kell győződni az azok alapján végrehajtott számítások eredményei alapján. Egy adott modellel kapott eredményeket mérésekkel is lehet ellenőrizni a megvalósított szerkezeten, annak figyelembevételével, hogy a mérési eljárások sem tökéletesen pontosak. A gyakorlatban a biztonságra való törekvés miatt általában olyan ráhagyással tervezik a gépeket, szerkezeteket, hogy a modellezésből eredő pontatlanságoknak minél kisebb legyen a jelentősége.

Gyakran több modellezési lépés is szükséges egy adott feladat megoldásához, például a megfelelő mechanikai modell felállítása után a számításokhoz matematikai modelleket (egyenleteket, függvényeket, stb.) kell használni. Ezt a folyamatot mutatja be az 1.15. ábra.

### 1.3.2. Mechanikai modellek

A mechanikában használatos modellek általában három csoportba oszthatók: geometriai modellek, anyagmodellek, és a környezethez való kapcsolódás modelljei.



**1.15. ábra.** Forgó alkatrészt tartalmazó gép sematikus ábrája, a gépalapozás tervezéséhez használható mechanikai modell, és a matematikai modell (egy másodrendű differenciálegyenlet) [A17]

## Geometriai modellek

A *geometriai modellek* a vizsgált testek alakjával és méreteivel kapcsolatosak. Az alábbiakban ismertetünk néhány gyakran használatos geometriai modellt.

- Az *anyag pont* (aminek az alakja, mérete nem fontos a feladat szempontjából) és a *merev test* (aminek az alakja és mérete nem változik) fogalmát már megismertük az 1.2. és az 1.3. definíciók kapcsán.
- A statikában és a szilárdságtanban alapvetően fontos geometriai modell a *rúd*:

**1.5. definíció.** A *rúd olyan szilárd test, aminek az egyik mérete lényegesen nagyobb a másik kettőnél.*

Rudakkal sokszor fogunk találkozni mind a statika, mind a szilárdságtan tárgyalása során. A rúdmodell használható az 1.7. ábrán látható toronydaru vagy az 1.14. ábrával szemléltetett híd mechanikai vizsgálata esetében is. A rudakról részletesebben lesz még szó az 5. fejezetben.

- A rudaknál bonyolultabb geometriájú testeket modellez a *lemez* és a *héj*:

**1.6. definíció.** A *héj és a lemez olyan szilárd testek, amiknek az egyik mérete lényegesen kisebb a másik kettőnél. A héj legalább egy irányban görbült, a lemez középfelülete egy síkkal párhuzamos.*

Épületek födémszerkezeteit általában lemezként, a tartályok falát pedig gyakran héjként modellezhetjük (1.16. ábra).

## Anyagmodellek

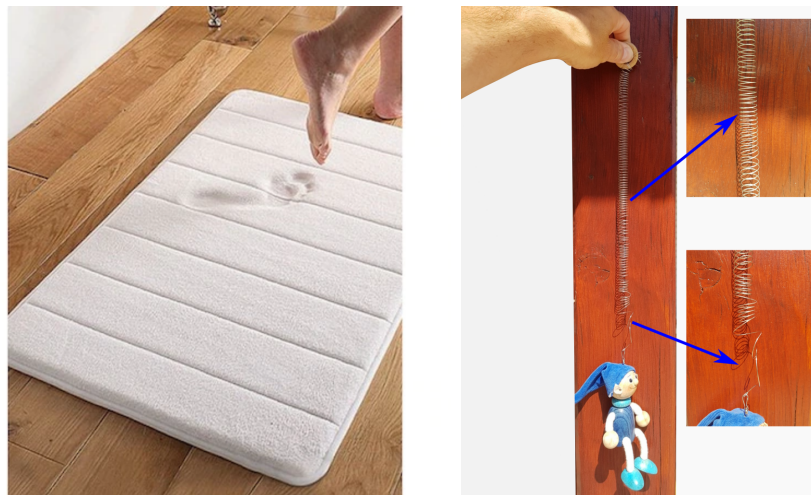
Az *anyagmodellek* azt írják, le, hogy a különböző anyagok hogyan viselkednek terhelés hatása alatt.

- A *merev test* modell nemcsak geometriai, hanem anyagmodellnek is tekinthető.



1.16. ábra. Tartályok és födém [A18, A19, A20]

- A *rugalmas* (elasztikus) anyagmodellel leírható anyagok a terhelés megszüntetése után azonnal visszanyerik eredeti alakjukat, mint egy acélrugó.
- A *viszkoelasztikus* anyagok is visszanyerik alakjukat a terhelés levétele után, de ehhez valamennyi időre van szükség (1.17. ábra).
- A *képlékeny* anyagok a terhelés hatására maradó alakváltozást szenvednek.



1.17. ábra. Bal oldalon: viszkoelasztikus szőnyeg [A21]. Jobb oldalon: egy kis erővel meghúzott rugó visszanyeri eredeti alakját, de nagy erők hatására maradandó módon eldeformálódik a rugót alkotó huzal [A22]

A felsoroltakon kívül számos más anyagmodell is létezik. Fontos, hogy különböző nagyságú terhelések mellett különböző lehet az ugyanarra az anyagra alkalmazandó anyagmodell is! Kis terhelések mellett a szilárd anyagok általában rugalmasnak tekinthetők, nagy terhelések mellett viszont már maradó alakváltozást szenvedhetnek, azaz képlékeny anyagmodellel írható le a viselkedésük (1.17. ábra).

### A környezethez való kapcsolódás modelljei

Mechanikai rendszereknél azt is modellezni kell, hogy a testek *hogyan kapcsolódnak a környezetükhöz*.

- Lehetséges, hogy más testek adott módon korlátozzák a vizsgált test mozgását – ezeket a korlátozásokat *kényszereknek* nevezzük. A statikában tipikusan előforduló kényszerek modelljeivel majd az 1.7. fejezetben foglalkozunk.
- Az egymással kapcsolatba kerülő testek mechanikai kölcsönhatásba kerülhetnek egymással. Az ezt jellemző *erő* az egyik legfontosabb fogalom a statikában, ezért annak bevezetésére és a megfelelő *terhelési modellek* tárgyalására külön fejezeteket szánunk.

## 1.4. Az erő

**1.7. definíció.** Az erő a testek vagy mezők közti mechanikai kölcsönhatás mértéke. Jele  $F$ , mértékegysége  $N$  (newton). ♠

Az erőről a mindennapi életben szerzett, közvetlen tapasztalatok alapján mindenkiben kialakult valamilyen kép. Ebből a képből kiindulva megállapíthatjuk, hogy az erőnek kétféle hatását különböztethetjük meg:

1. Mechanikai kölcsönhatás következtében megváltozhat egy test *mozgásállapota*. Ezt alapul véve, Newton II. törvénye alapján definiáljuk az  $F$  erőt: egy  $m$  tömegű anyagi pont  $a$  nagyságú gyorsulásához

$$F = ma \quad (1.3)$$

nagyságú erőt kell az anyagi pontra kifejteni, és a gyorsulás az erő irányában következik be.<sup>2</sup> Ennek a definíciónak a részletesebb vizsgálata a kinetika tárgykörébe tartozik. Egyensúlyban – azaz az 1.1. definíció szerint a tartós nyugalom vagy egyenes vonalú egyenletes mozgás állapotában – a test pontjainak gyorsulása nulla, azaz az  $F$  erő is nulla.

2. A mechanikai kölcsönhatás *alakváltozást* (deformációt) is okozhat. Ezt kihasználva készíthetünk rugós erőmérőt az erő nagyságának meghatározására (1.18. ábra). A rugós erőmérővel történő mérés során egyszerre két, azonos  $F$  nagyságú, de ellentétes irányú erő is hat a rugó két végén, melyek azt egyensúlyban tartják. Az erőmérő ekkor definíció szerint  $F$  erőt mutat.<sup>3</sup>



1.18. ábra. Rugós erőmérő [A23, A24]

<sup>2</sup>Mind az erő, mind a gyorsulás iránnyal és nagysággal jellemezhető vektormennyiség.

<sup>3</sup>A két ellentétes erő jelenléte miatt kézenfekvőnek tűnik, hogy  $2F$  erő veszi igénybe a rugót, de ez téves. Az erő által okozott hatásokat jellemző *igénybevételekről* bővebben lesz még szó az 5. fejezetben.

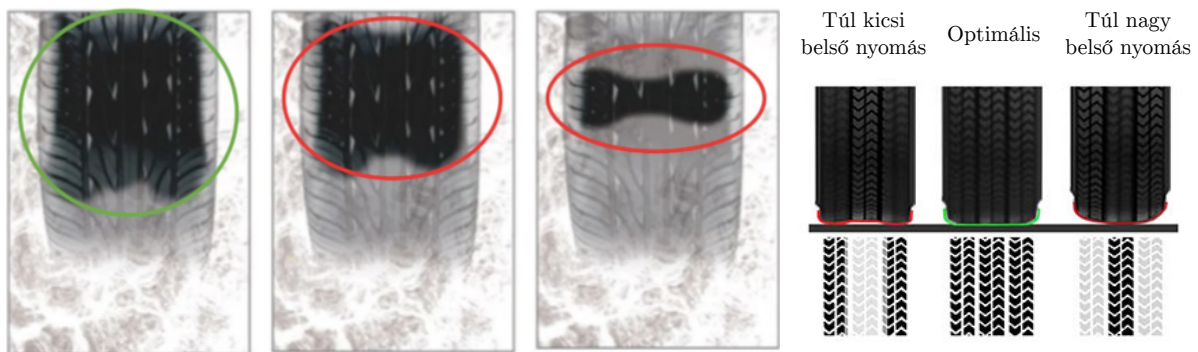
Hogy a gyorsító és deformációt okozó hatások közül melyiket tapasztaljuk elsősorban, az a körülményektől függ. A testekre ható erő mindig okoz alakváltozást, bár az egyes esetekben – például merev testeknél – elhanyagolható. Több erő hatására egyensúlyban lévő testek pontjainak gyorsulása viszont lehet zérus.

Mivel a statika a merev testek egyensúlyát vizsgálja, mind a gyorsulás, mind az alakváltozás a tárgykörén kívül esik. Tehát a statika keretében tudományos igénnyel nem definiálható az erő, de számos tulajdonságát megállapíthatjuk.

### 1.4.1. Terhelési (erő) modellek

A kölcsönhatások nagyon gyakran két test közvetlen érintkezésével jönnek létre.<sup>4</sup> Az ebben az esetben ébredő erőket *felületi erőknek* nevezzük.

A felületi erő véges nagyságú (tehát nem pontszerű) érintkező felületen hat, ezért a valóságban mindig valamilyen *megoszló erővel* állunk szemben. A legáltalánosabb esetben a felületi erő egy felület mentén oszlik meg, mint ahogy az 1.19. ábrán is látható.



**1.19. ábra.** Példa felületen megoszló erőre. A gumiabroncsok talajjal érintkező felületének nagysága függ az abroncsban lévő levegő nyomásától. Ezen a felületen oszlik meg a kerék és a talaj között ébredő erő [A25, A26]

Gyakran alkalmazható közelítés az, amikor a felületen megoszló erőt egy él (vonall) mentén megoszló erővel, vagy a felszín egyetlen pontjában támadó erővel helyettesítjük. Az egy pontban támadó erőt *koncentrált erőnek* fogjuk nevezni (1.20. ábra).

Felületen vagy vonal mentén megoszló erőt annak *intenzitásával* lehet jellemezni. Az erő intenzitást általában a  $p$  szimbólum jelöli, mértékegysége  $\text{N/m}^2$  (felületen megoszló erő) vagy  $\text{N/m}$  (vonallal mentén megoszló erő). A középiskolai tanulmányok során megismert  $p$  nyomás tulajdonképpen nem más, mint a felületen megoszló erő intenzitása. Ennek megfelelően, állandó  $p$  intenzitás mellett egy  $A$  felületen ébredő erő nagysága  $F = pA$ .

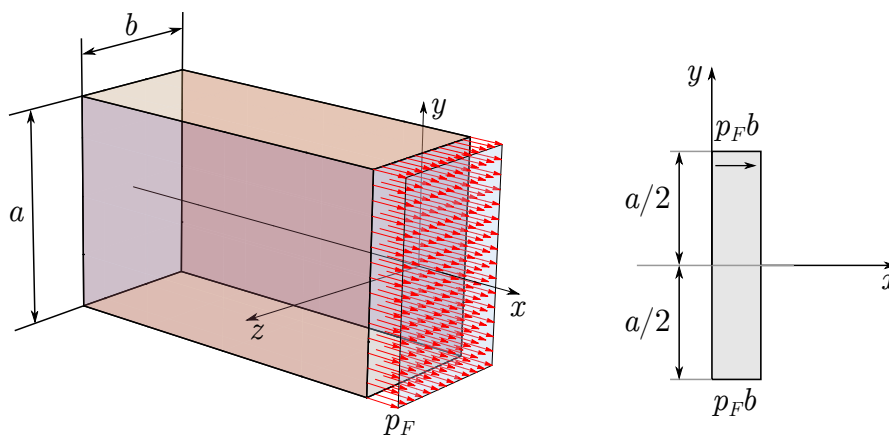
Nem csak akkor használható a vonal mentén megoszló erő fogalma, amikor egy vékony él mentén oszlik meg az erő. Az 1.21. ábrán egy olyan esetet mutatunk, amikor a felületen megoszló erő  $p_F$  intenzitása állandó a  $z$  tengely mentén. Ekkor ez az erő helyettesíthető egy  $p = p_F b$  intenzitású, az  $y$  tengely vonala mentén megoszló erővel.<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Gyakran mechanikai kölcsönhatásnak nevezik a testek érintkezésével kapcsolatos kölcsönhatásokat.

<sup>5</sup>A felületen és a vonal mentén megoszló erők intenzitását egyaránt  $p$  szokta jelölni, de az ugyanabban a képletben szereplő kétféle intenzitás megkülönböztetése érdekében itt  $p_F$ -fel jelöltük a felületi intenzitást.



1.20. ábra. Példa vonal mentén megoszló erőre [A27] és koncentrált erőre [A28]



1.21. ábra. Az  $a \times b$  méretű felületen ébredő, állandó  $p_F$  intenzitású erőrendszer helyettesítése vonal mentén ébredő,  $p = p_F b$  intenzitású megoszló erőrendszerrel

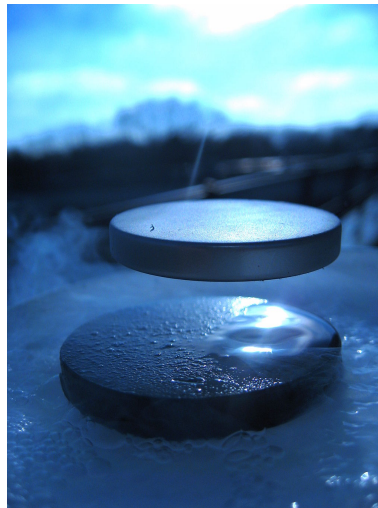
Mező és test közvetlen érintkezés nélkül is kölcsönhatásba kerülhet, például az elektrosztatikus, mágneses vagy a gravitációs mező esetében. Ilyenkor a test egész térfogatán megoszló *térfogati erőkkel* van dolgunk. A térfogati erők jellemzésére csak ritkán használják a  $\text{N/m}^3$ -ben mért intenzitást, helyette inkább azt szokás megadni, hogy a test 1 kg-jára vagy elektrosztatikus kölcsönhatásoknál adott mennyiségű elektromos töltésre mekkora erő hat. Az így definiálható fizikai mennyiségeket *térerősségnek* nevezik. Ennek megfelelően a  $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$  nehézségi gyorsulás tekinthető a nehézségi erő térerősségének, mert számértéke azt adja meg, hogy a test 1 kg tömegű darabjára mekkora nehézségi erő hat.

### 1.4.2. Az erő, mint vektor

Az erő további tulajdonságainak megállapításához a koncentrált erő modelljéből indulunk ki, és feltételezzük, hogy a megoszló erők is helyettesíthetők sok kis koncentrált erő összességével.<sup>6</sup> Az egy testre vagy szerkezetre ható erők összességét *erőrendszernek* nevezzük, ezért gyakran *megoszló erőrendszernek* nevezik a korábban tárgyalt megoszló erőket.

Hétköznapi tapasztalataink szerint az erőt nagyságán kívül az is jellemzi, hogy melyik

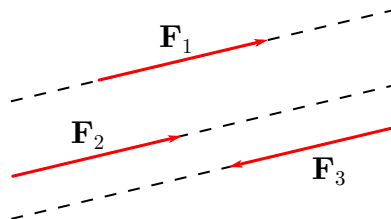
<sup>6</sup>Ennek felel meg, hogy a megoszló erőket sok kis nyíllal szokták ábrázolni, mint az 1.21. ábrán.



**1.22. ábra.** Példa térben megoszló erőre: szupravezető korong felett lebegő mágnes [A29]

térbeli irány felé, és a vizsgált test melyik pontjában hat. Ebből következően jól meg lehet ragadni az erő fontos tulajdonságait, ha *vektormennyiségnek* tekintjük. A statikai számításokban ennek nagyon nagy szerepe van, ezért itt röviden összefoglaljuk a vektorok legfontosabb tulajdonságait. A vektorokkal kapcsolatos algebrai műveletekről az 1.5.2. fejezetben és a 8.1 függelékben lesz szó.

Egy vektor *irányát* egy egyenes jelöli ki, az ezzel párhuzamos vektorokat ugyanolyan irányúnak tekintjük. Egy adott irányhoz kétféle *irányítást* (a vektor *értelmét*) rendelhetünk, amit megfelelően felvett nyíllal jelölünk, ahogy az 1.23. ábra mutatja.



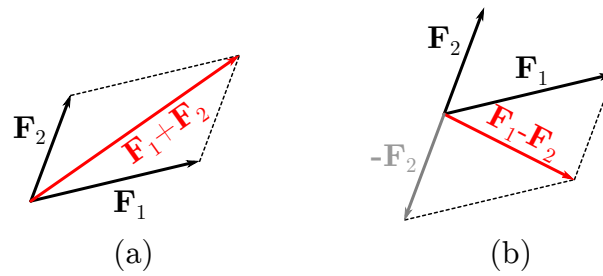
**1.23. ábra.** Az  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  és  $\mathbf{F}_3$  vektorok párhuzamosak, tehát azonos irányúak.  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  értelme azonos,  $\mathbf{F}_3$  értelme ezzel ellentétes

A vektorok mechanikai számításokhoz történő használatához az alábbi definícióra fogunk támaszkodni:

**1.8. definíció.** A vektorok irányított egyenesdarabokkal jellemezhető, a paralelogrammaszabály szerint összegezhető mennyiségek. ♠

A paralelogrammaszabály szerint egy  $\mathbf{F}_1$  és egy  $\mathbf{F}_2$  vektor összege az az  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  vektor, melynek hosszát és irányát az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  vektorokból összeállított paralelogramma átlója adja meg, az 1.24/a ábra alapján. Nyilvánvaló a szerkesztésből, hogy az összeg nem függ az összeadandó vektorok sorrendjétől:  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1$ .





**1.24. ábra.** Az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  vektorok összege (a) és különbsége (b) a paralelogrammaszabály alapján

**1.4. megjegyzés:** A mechanikában számos fizikai mennyiség szabatos leírásához és vizsgálatához vektorokat fogunk használni. Nagyon fontos, hogy az egyenletekből egyértelműen kiderüljön, hogy egy adott szimbólum skalármennyiséget, vektort, annak egy komponensét, nagyságát, stb. jelöli-e. Az iránnyal nem jellemezhető skalármennyiségeket dőlt betűvel (pl.  $m$ ) jelöljük. Nyomatásban – ebben a jegyzetben is – a vektorokat vastag betűvel (pl.  $\mathbf{F}$ ) jelöljük, de kézírásban célszerű az aláhúzás ( $\underline{F}$ ) vagy esetleg a nyíl ( $\vec{F}$ ) használata. Egy vektor nagyságát (mely lehet előjeles mennyiség is) dőlt betűvel ( $F$ ), adott koordinátáját (más néven skalárkomponensét vagy skaláris komponensét) pedig alsó index használatával ( $F_x$ ) jelöljük. Ha ki akarjuk hangsúlyozni, hogy nem előjeles mennyiségről van szó, akkor az abszolút érték jelet használjuk ( $|\mathbf{F}|$ ) a vektor nagyságának megadásakor. Mátrixok jelölésére nyomatásban vastag betűt ( $\mathbf{M}$ ), kézírásban kettős aláhúzást ( $\underline{\underline{M}}$ ) használunk. ♣

**1.5. megjegyzés:** Vannak olyan mennyiségek, melyek ugyan egyértelműen jellemezhetőek irányukkal, értelmükkel és nagyságukkal – azaz irányított egyenesdarabokkal –, de nem követik a paralelogrammaszabályt, ezért nem vektorok. Ilyen mennyiség például a szögelfordulás: az 1.25. ábrán is látható, hogy a forgatások sorrendjének felcserélése más végeredményre vezet.

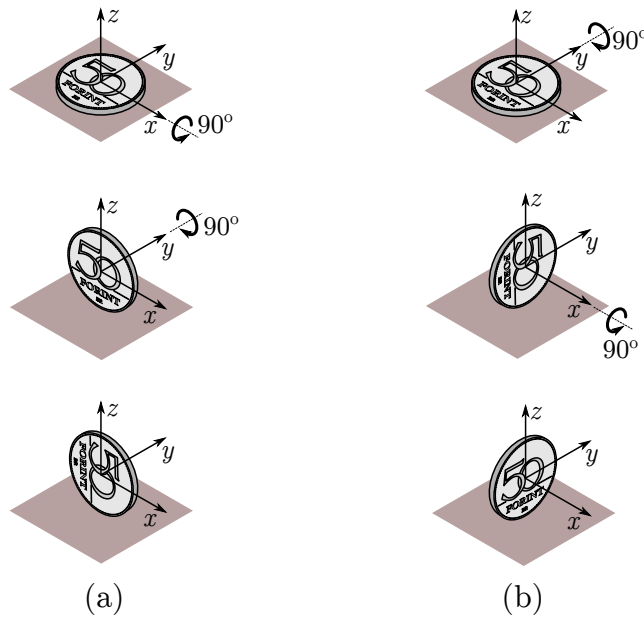
Az erőről a hétköznapi tapasztalatból tudjuk, hogy van iránya és nagysága, de hogy valóban vektornak tekinthessük, arra is rá kell mutatni, hogy az erővektorok teljesítik a paralelogramma szabályt. Erre a kérdésre az 1. szuperpozíció elv kapcsán fogunk visszatérni. ♣

Egy  $\mathbf{F}$  vektor ( $-\mathbf{F}$ ) *ellentettjét* úgy definiáljuk, mint egy  $\mathbf{F}$ -vel megegyező nagyságú,  $\mathbf{F}$ -fel párhuzamos, de azzal ellentétes irányítású – tehát  $\mathbf{F}$ -fel ellentétes *értelmű* – vektort. Ezt felhasználva, a paralelogrammaszabály szerint két vektornak nemcsak az összege, hanem a különbsége is megszerkeszthető, az 1.24/b ábra szerint:  $\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 + (-\mathbf{F}_2)$ .

**1.9. definíció.** Egy  $\mathbf{F}$  vektor  $\lambda$  skalárral való szorzatának eredménye egy olyan  $\lambda\mathbf{F}$  vektor, mely  $\mathbf{F}$ -fel párhuzamos, nagysága pedig  $|\lambda\mathbf{F}| = |\lambda||\mathbf{F}|$ . Ha  $\lambda$  pozitív, akkor  $\mathbf{F}$  és  $\lambda\mathbf{F}$  értelme megegyezik, ha  $\lambda$  negatív, akkor pedig értelmük ellentétes. ♠

A skalárral való szorzással tehát a vektor hosszát és értelmét tudjuk megváltoztatni. Az ellentett képzése is a vektor skalárral való szorzásának speciális esete,  $\lambda = -1$  esetén.

**1.6. megjegyzés:** Ha a szorzótényezők közül legalább az egyiket szimbólummal adjuk meg, akkor a skalármennyiségek közti szorzást általában nem jelöljük: tehát egy  $a$  és egy  $b$  skalármennyiség szorzata  $ab$ , háromszor  $a$  pedig  $3a$ . Ha az egyik szorzótényező adott szám, a

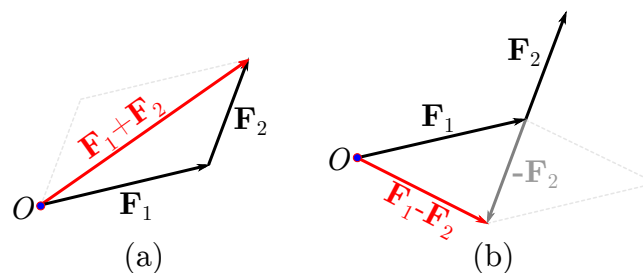


**1.25. ábra.** Két forgatás egymásutánja. Bal oldali ábrák: forgatások először az  $x$ , majd az  $y$  tengely körül. Jobb oldali ábrák: forgatások először az  $y$ , majd az  $x$  tengely körül [A30]

másik pedig szimbólum, akkor a számot írjuk előre. Adott számok szorzásánál pont jelöli a műveletet:  $3,5 \cdot 2,4 = 8,4$ .

Ehhez hasonlóan, vektorok skalárral való szorzásánál sem szokták kitenni a műveleti jelet, ha szimbólumokat használnak. Tehát a  $\lambda$  skalár és a  $\mathbf{v}$  vektor szorzata  $\lambda\mathbf{v}$ , a  $\mathbf{v}$  vektor ötszöröse pedig  $5\mathbf{v}$ . ♣

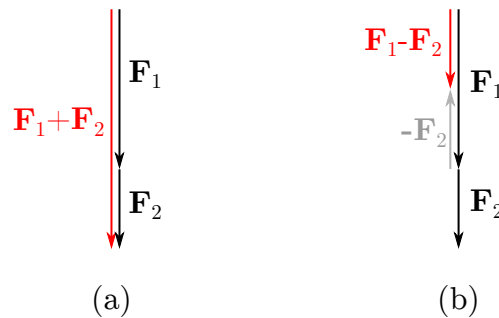
Mivel a paralelogramma szemközti oldalai párhuzamosak és megegyező nagyságúak, a vektorok összegét a *háromszögszabály* szerint is megszerkeszthetjük: egy tetszőleges  $O$  kezdőpontból felmérjük az  $\mathbf{F}_1$  vektort, majd annak végpontjából az  $\mathbf{F}_2$  vektort. A két vektor összege az  $O$  kezdőponttól az  $\mathbf{F}_2$  vektor végpontjáig húzott vektor, ahogy az 1.26. ábra mutatja. Ennek alapján tetszőleges számú vektor összegezhető: a vektorokat egymás után



**1.26. ábra.** Az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  vektorok összege (a) és különbsége (b) a háromszögszabály alapján

felmérve, az összeg az elsőként felmért vektor kezdőpontjából az utolsóként felmért vektor végpontjába mutat (1.40. ábra). A háromszögszabály alkalmazása abból a szempontból előnyös a paralelogrammaszabályhoz képest, hogy segítségével párhuzamos vektorok összege

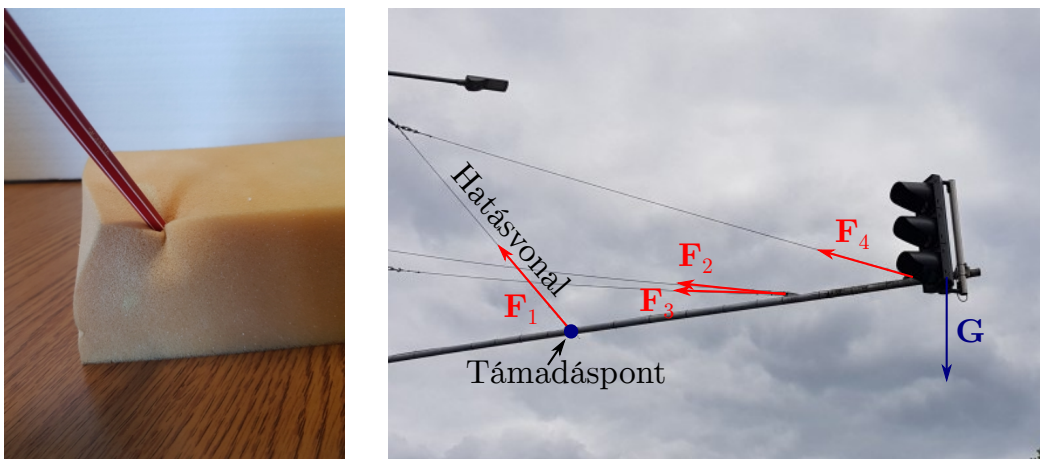
vagy különbsége is értelmezhető (1.27. ábra).



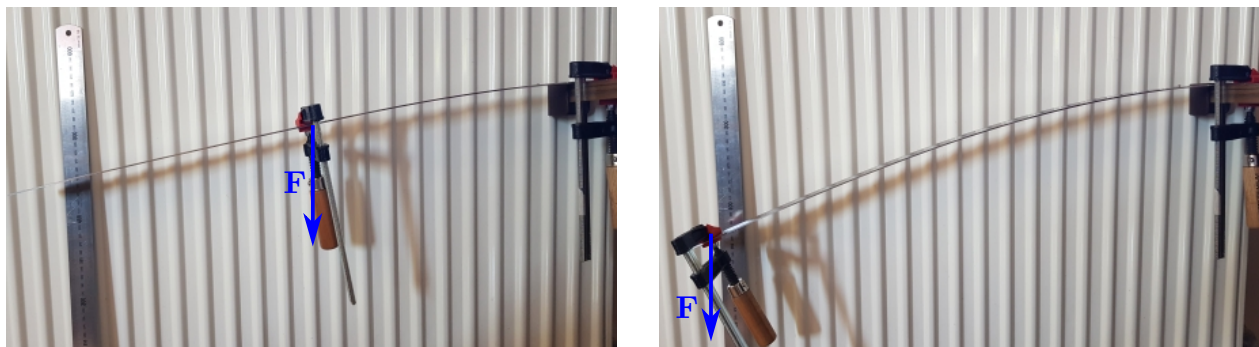
**1.27. ábra.** Párhuzamos  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  vektorok összege (a) és különbsége (b) a háromszögszabály alapján

A vektorokat matematikai értelemben csak nagyságuk, irányuk és értelmük jellemzi, térbeli elhelyezkedésük nem értelmezett. A vektorok műszaki mechanikai alkalmazásához azonban további tulajdonságokat is be kell vezetni:

- A fizikai mennyiségeket jellemző vektorokhoz *mértékegységet* is kell rendelni – ezt az erővektor esetében már megtettük. Csak azonos mértékegységgel megadott vektorokat lehet összeadni vagy egyiket a másiktól kivonni.
- A hétköznapi tapasztalatból ismert, hogy az erő alkalmazásának helye – *támadáspontja* – is meghatározó a kifejtett hatás szempontjából. Például ha egy szivacsból készült testet valahol pontszerű erőhatás ér, akkor jól látható, hogy a deformáció a támadáspont közelében a legnagyobb (1.28. ábra). Egy rugalmas, egyik végén rögzített rúd végének lehajlása is más, attól függően, hogy hol éri a rudat a terhelés (1.29. ábra).



**1.28. ábra.** Bal oldalon: látszik, hogy melyik pontban éri erő a szivacsot, tehát hogy hol van az erő támadáspontja. Jobb oldalon: egy közlekedési lámpa tartórúdjára ható erők. Az  $\mathbf{F}_1$  erő támadáspontját és hatásvonalát külön megjelöltük [A31]



**1.29. ábra.** Egy asztalhoz rögzített vékony acélrúd alakja, a teher (pillanatszerű) két különböző helyzetében [A32]

Az irány és a támadáspont együttesen meghatározza a vektor tartóegyenesének térbeli helyét, azaz a vektor *hatásvonalát*. Az 1.23. ábrán szaggatott vonalakkal jelöltük a vektorok hatásvonalait, míg az 1.28. ábrán a vékony fekete vonalnak látszó drótkötelek egyenesei adják meg az  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_4$  erők hatásvonalait.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy az  $\mathbf{F}$  koncentrált erőt vektora, támadáspontja, és mértékegysége határozza meg.

**1.7. megjegyzés:** A mechanikában általában nagy jelentősége van annak, hogy a vizsgált testhez képest hol található egy vektor hatásvonala vagy támadáspontja. A hatásvonal és a támadáspont fogalmára támaszkodva a vektorok alábbi három típusát különböztetjük meg *mechanikai szempontból*:

- A *szabad vektorok* önmagukkal párhuzamosan bárhová eltolhatók, azaz nem számít térbeli elhelyezkedésük. A szabad vektorok három térbeli koordinátával adhatók meg, melyekből kifejezhető a vektor nagysága és iránya. A matematikai értelemben vett vektorok is szabad vektoroknak tekinthetők.
- A *ponthoz kötött* vektorok esetében meg kell adni a vektor kezdőpontjának a helyét is, „ahol a vektor hat”. Elsősorban a deformálható testek mechanikájában van szerepük; ebben a jegyzetben ponthoz kötött vektorokkal nem foglalkozunk. A félreértések elkerülése érdekében felhívjuk a figyelmet arra, hogy a *pontra számított* vektoroknak viszont nagy jelentősége lesz a következőkben (lásd 3.1. fejezet).
- A vektorok harmadik csoportját a *hatásvonalukhoz kötött* vektorok alkotják. Ezek a vektorok a hatásvonaluk mentén szabadon eltolhatók, mert ettől a hatásuk nem változik meg. Látni fogjuk az 1.6. fejezetben, hogy az erő vektora ilyen. ♣

## 1.5. A statikai feladatok megoldási módszerei és az erő megadása

A legtöbb statikai feladat esetében azt szeretnénk meghatározni, hogy milyen erőrendszernek kell hatnia egy merev testre ahhoz, hogy egyensúlyban maradjon. Az egyensúlyi erőrendszer

meghatározására kétféle megközelítési módot dolgoztak ki: a *szerkesztő* és a *számító* eljárást. E két megközelítési mód elvileg egyenértékű, de a számító módszerrel a gyakorlatban nagyobb pontosság érhető el. A szerkesztéses megoldásnak viszont az az előnye, hogy sokkal szemléletesebb. Térbeli feladatok esetében – mikor az erők hatásvonalai nem egy síkba esnek – a szerkesztés már sokkal bonyolultabb, és kevésbé szemléletes, ezért ritkán alkalmazzák. A gyakorlatban azért is fontos, hogy két módszer is létezik a feladatok megoldására, mert így lehetőség nyílik a végeredmény másik módszerrel történő ellenőrzésére.

Attól függően, hogy melyik megközelítési módot választjuk, kétféleképpen is megadható az erő – mindkét esetben egyértelműen rögzíteni kell az  $\mathbf{F}$  erő nagyságát, irányát, irányítását (azaz vektorát), továbbá a támadáspontját.

### 1.5.1. Az erő geometriai megadása

Mivel az erő támadáspontjának fontos a szerepe, a feladatok megoldása során általában le kell rajzolni a vizsgált szerkezetet alkotó testeket, és ezen a *szerkezeti ábrán* lehet ábrázolni az erő vektorát szimbolizáló nyilat (irányított egyenesszakaszt). A szerkezetet többnyire kicsinyítve rajzoljuk le, és ehhez fel kell venni egy megfelelő *rajzmértéket* (méretarányt, léptéket). Például az 1:40 méretarányú 1.30. ábra esetében a valóságos méretek a rajzon feltüntetett távolságok negyvenszeresei. Tehát ha egy kötélen  $A$  és  $B$  rögzítési pontjai között a valóságban 2 m a távolság, akkor a szerkezeti ábrán ezek között 5 cm-t mérhetünk ezzel a méretarányal.

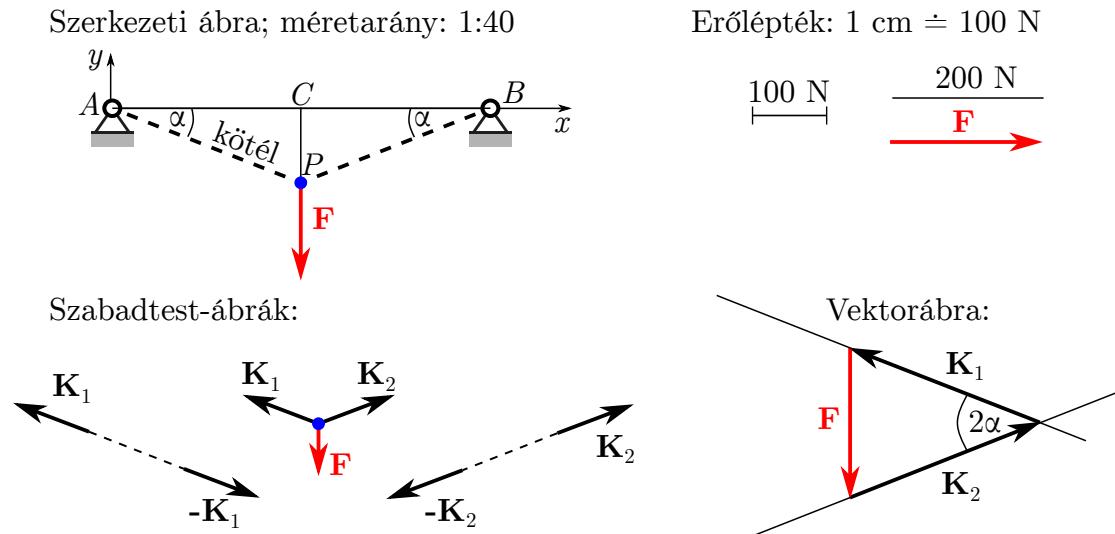
Ha szerkesztéssel szeretnénk meghatározni egy testre ható erőket, akkor a szerkezeti ábra mellé egy *vektorábrát* is kell rajzolnunk. Ahhoz, hogy az erővektorok nagyságát le tudjuk olvasni a vektorábráról, egy *erőmértéket* vagy *erőléptéket* kell megadni. Az erőmérték a rajzmértéktől teljesen független, azt adja meg, hogy a vektorábrán szereplő egységnyi hosszúságú erő nyíl hány  $N$  erőnek felel meg, pl.  $1 \text{ cm} \doteq 100 \text{ N}$ . Mivel a szerkezeti ábra a geometriai viszonyokat rögzíti a méretarány segítségével, az azon esetleg szereplő erővektorokat nem feltétlenül szükséges az erőlépték szerint megadni. Ennek megfelelően a szerkesztés során az erők *támadáspontját és hatásvonalát a szerkezeti ábrán, nagyságát, irányát és értelmét pedig a vektorábrán szerkesztjük meg.*<sup>7</sup>

Hogy jobban áttekinthető legyen, milyen erőket kell figyelembe venni egy adott feladatban, érdemes külön-külön lerajzolni a vizsgált testeket a rájuk ható erőkkel egy-egy ún. *szabadtest-ábrán*. Ezeknek az ábráknak nem szükséges arányosnak lenniük, elegendő, ha jelleghelyesen ábrázolják a ható erőket. A szabadtest-ábráról az 1.5.3. fejezetben bővebben lesz szó.

A szerkezeti ábra, a vektorábra, és a szabadtest-ábra megrajzolását az 1.1. példa kapcsán illusztráljuk. A feladat megoldásához olyan tételeket használunk fel, melyeket csak a későbbi fejezetekben részletezünk, de bizonyára ismertek a középiskolai tananyagból.

**1.1. példa:** *Az egymástól 2 m távolságban lévő  $A$  és  $B$  pontok közé egy kötelet rögzítünk, melynek  $P$  felezőpontjába egy pontszerű testként modellezhető karikát rögzítettek. Erre a kis-méretű testre ismert  $F = 200 \text{ N}$  nagyságú erő hat. A kötélen belógása  $\overline{PC} = 40 \text{ cm}$ . Határozzuk meg a kötélagakban ébredő erőket!*

<sup>7</sup>Sok esetben meghatározható bizonyos erők hatásvonalai a szerkezeti ábráról. Ekkor az ismert hatásvonalak irányát át kell másolni a vektorábrára.



**1.30. ábra.** Az 1.1. példa megoldása szerkesztéssel: szerkezeti ábra, szabadtest-ábrák, vektorábra

### Megoldás:

Első lépésben megrajzoljuk a szerkezeti ábrát a feladatban adott méreteknek megfelelően (1.30. ábra). Mivel a (szaggatott vonallal jelölt) kötéllel csak húzóerőt lehet kifejteni (lásd 1.7. fejezet), a szerkezeti ábra megmutatja a  $P$  pontban lévő karikára ható  $\mathbf{K}_1$  és  $\mathbf{K}_2$  kötélérők irányát és értelmét.

A két kötélágra és a karikára három darab szabadtest-ábrát rajzolhatunk. Ennek során felhasználhatjuk, hogy az  $AP$  és  $PB$  kötélágak csak akkor lehetnek egyensúlyban, ha két végükre azonos nagyságú és irányú, de ellentétes értelmű erők hatnak (2. alapelv). Ez azt jelenti, hogy a  $\mathbf{K}_1$  és  $\mathbf{K}_2$  kötélérők meghatározásával minden erő ismertté válik a feladatban.

A további vizsgálatokhoz ezért csak a  $P$  pontban lévő karikára ható három erőt rajzoljuk be egy vektorábrába. A karika egyensúlyát az 1.3. tétel alapján vizsgálhatjuk, ami kimondja, hogy három közös támadáspontú, nem párhuzamos erő egyensúlyához az szükséges, hogy a vektori összegük nulla legyen, azaz a vektorháromszögük záródjon. A felvett erőlépték szerint az ismert  $|\mathbf{F}| = 200$  N nagyságú erőt egy 2 cm hosszúságú nyíllal tudjuk ábrázolni a vektorábrán, melyre a szerkezeti ábráról másoljuk át a  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  és  $\mathbf{F}$  vektorok hatásvonalainak irányát. A vektorháromszög záródását úgy érhetjük el, hogy az ismeretlen  $\mathbf{K}_1$  és  $\mathbf{K}_2$  erők hatásvonalait az  $\mathbf{F}$  erő végpontjain át húzzuk meg. A berajzolt vonalak metszéspontja egyértelműen megadja a kötélérők vektorainak nagyságát.

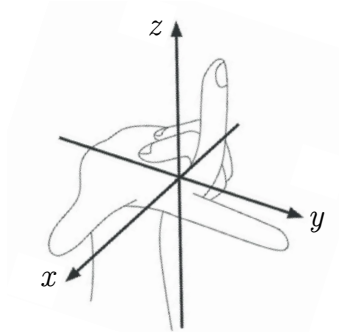
Természetesen a feladatok szerkesztéses megoldása során is meg kell adni a végeredmény numerikus értékét. A példában a  $\mathbf{K}_1$  vektort ábrázoló nyíl hossza körülbelül 26,5 mm a vektorábrán, ami 265 N erőnek felel meg.<sup>8</sup> A számításos megoldással az 1.2. példa foglalkozik.♠

### 1.5.2. Az erő megadása koordinátákkal

Az erővektorral végzett számítások megkönnyítésére célszerű bevezetni egy megfelelő koordináta-rendszert. A legtöbb esetben a jobbsodrású tengelyekkel felrajzolt *Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszert* használják. Egy ilyen koordináta-rendszer  $x$ ,  $y$  és  $z$  tengelyei

<sup>8</sup>Mivel ezt az eredményt szerkesztéssel kaptuk, ez nem tökéletesen pontos.

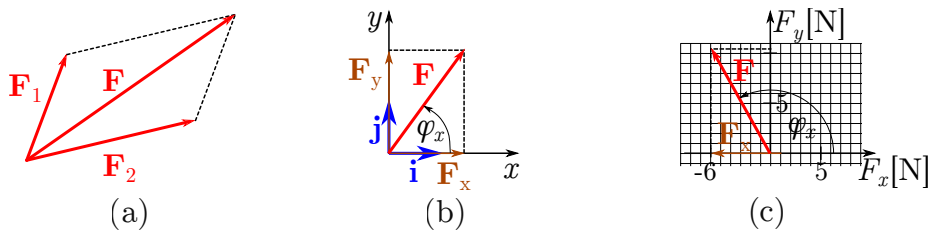
a jobb kéz hüvelyk, mutató és középső ujjainak megfelelő irányokba mutatnak, az 1.31. ábrának megfelelően.



1.31. ábra. Jobbsodrású koordináta-rendszer

A rendszer origójának és a tengelyek irányának megválasztása elvileg tetszőleges: a fizika törvényeinek ugyanazt az eredményt kell adniuk minden koordináta-rendszerben. Tehát a koordináta-rendszer megválasztásakor az a legfontosabb szempont, hogy a lehető legegyszerűbb legyen a feladat megoldása. Például ha a feladatban szereplő erővektorok mindegyike párhuzamos egy adott síkkal, akkor célszerű lehet abban a síkban felvenni az  $x$  és  $y$  tengelyeket. Ezt tettük az 1.30. ábrán is, bár a feladat szerkesztéses megoldásához nem kellett koordináta-rendszert bevezetni.

Az 1.24. ábrán bemutatott paralelogrammaszabályból következik, hogy annak a megfordítása is igaz: egy adott vektor felbontható két, vele egy síkba eső, adott irányú komponensre (összetevőre) is, azaz két olyan vektorra, melyek összege az eredeti vektorral egyezik meg, ahogy az 1.32/a ábra mutatja. Egy adott feladatban célszerű minden vektort adott irányú,



1.32. ábra. (a) Egy  $\mathbf{F}$  vektor felbontása két komponensre:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  (b) Bázisvektorok bevezetése (c) Ha  $\mathbf{F}_x$  és  $\mathbf{i}$  ellentétes irányúak, akkor az  $F_x$  koordináta negatív; itt  $F_x = -6$  N

egymásra merőleges komponensekre bontani. A felbontásnak megfelelő irányokat síkban egy  $(x, y)$  koordináta-rendszerrel, illetve a megfelelő tengelyekkel párhuzamos, egységnyi hosszúságú és mértékegység nélküli  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  bázisvektorokkal adhatjuk meg. Például az 1.32/b ábrán az látható, hogy az  $\mathbf{F}$  erővektor komponensei a szintén newton (N) mértékegységű  $\mathbf{F}_x$  és  $\mathbf{F}_y$  vektorok:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y. \quad (1.4)$$

A skalárral való szorzás definícióját felhasználva az is megtehető, hogy a vektorok komponenseit a bázisvektorok skalárral való szorzásával adjuk meg. Az így definiált skalár szorzók

a vektor *koordinátái* vagy más néven skalárkomponensei.<sup>9</sup> Az  $\mathbf{F}$  vektor ennek megfelelően az alábbi alakban is kifejezhető:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}. \quad (1.5)$$

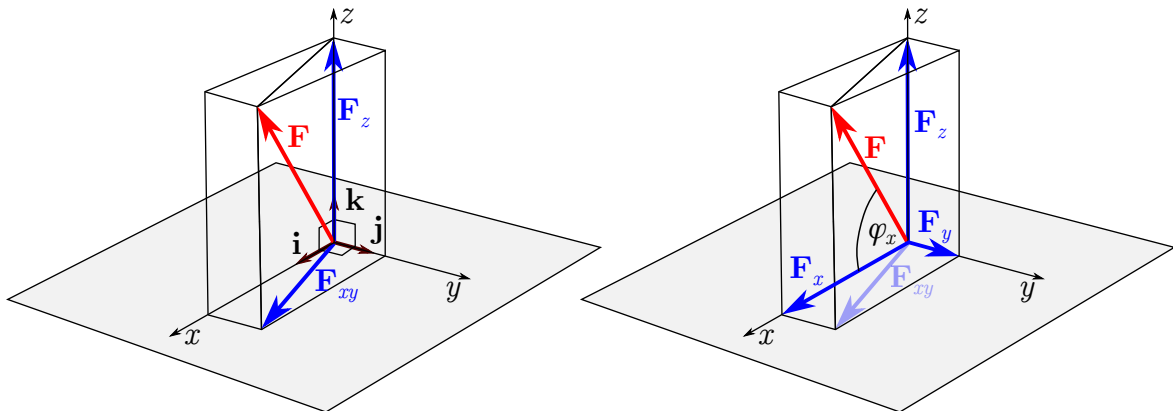
Itt  $F_x$  és  $F_y$  az  $\mathbf{F}$  erővektor síkbeli koordinátái, melyek mértékegysége N. Ezeknek a koordinátáknak az értékét már nem az  $(x, y)$ , hanem az  $(F_x, F_y)$  koordináta-rendszerben tudjuk leolvasni. A koordináta-rendszerek felrajzolásakor a tengelyeken mindig fel kell tüntetni, hogy mit is ábrázolunk. Például az 1.32/c ábrán látható esetben a két tengelyfelirat  $F_x$  és  $F_y$ . Ha számértékeket is megadunk a koordináta-rendszerben, akkor mindenképpen meg kell adni a használt mértékegységeket is – ezeket hagyományosan szögletes zárójelben írják a tengely mellé.<sup>10</sup>

A feladatok számításos megoldása során általában nincs szükség az  $(F_x, F_y)$  koordináta-rendszer felrajzolására, mert a koordináták értékei előjelhelyesen számíthatók az  $\mathbf{F}$  vektor tengelyekre vetett vetületei alapján. Például az 1.32/b és c ábrákon látható esetekben egyaránt használhatók az

$$F_x = |\mathbf{F}| \cos(\varphi_x) \quad \text{és} \quad F_y = |\mathbf{F}| \sin(\varphi_x) \quad (1.6)$$

képletek, ahol  $\varphi_x$  az  $\mathbf{F}$  vektor  $x$  tengellyel bezárt szögét jelöli. Az 1.32/c ábra példájában  $|\mathbf{F}| = 12 \text{ N}$  és  $\varphi_x = 120^\circ$ , amiből  $F_x = -6 \text{ N}$ ,  $F_y = 6\sqrt{3} \text{ N} \approx 10,39 \text{ N}$ .

A fenti gondolatmenetet általánosítva beláthatjuk, hogy egy térbeli vektor egyértelműen felbontható három nem párhuzamos komponens összegére. Az egyszerűség kedvéért vegyünk fel három egymásra merőleges irányt, és a megfelelő  $x$ ,  $y$  és  $z$  tengelyeket, valamint az  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$  bázisvektorokat, az 1.33. ábra szerint! Az  $\mathbf{F}$  vektor és a  $z$  tengely kijelölnek egy síkot. Ebben a síkban a vektor felbontható egy  $z$ -vel párhuzamos  $\mathbf{F}_z$ , és egy arra merőleges – azaz az  $xy$  síkba eső –  $\mathbf{F}_{xy}$  komponensre. Ezután az  $xy$  síkba eső komponens tovább bontható egy-egy  $x$  illetve  $y$  irányú komponensre:  $\mathbf{F}_{xy} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$ . Tehát ebben az esetben három



**1.33. ábra.** Egy  $\mathbf{F}$  vektor felbontása  $z$  irányú  $\mathbf{F}_z$  és arra merőleges  $\mathbf{F}_{xy}$  komponensre.  $\mathbf{F}_{xy}$  tovább bontható  $x$  illetve  $y$  irányú komponensekre

<sup>9</sup>A külföldi szakirodalomban előfordul, hogy a skalár értékű koordinátákat nevezik komponenseknek.

<sup>10</sup>Egy mértékegységgel rendelkező fizikai mennyiséget a megfelelő számérték és mértékegység szorzataként adhatunk meg. Ezért az a jelölés is szokásos, hogy a mennyiséget jelölő szimbólum és a mértékegység hányadosát adják meg a tengely mellett, például  $F_x/\text{N}$  alakban. Ez a hányados már mértékegység nélküli szám, amit ábrázolhatunk a koordináta-rendszerben.



darab komponens vektort kaphatunk:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z, \quad (1.7)$$

melyek kifejezhetők három skaláris koordináta és a megfelelő bázisvektorok szorzatainak segítségével is:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}. \quad (1.8)$$

Az  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$  és  $\mathbf{F}_z$  vektorok az  $\mathbf{F}$  vektor egyes tengelyekre vetett vetületei. A vetítés szabályai miatt most is igaz, hogy  $F_x = |\mathbf{F}| \cos(\varphi_x)$ , ahol  $\varphi_x$  az  $\mathbf{F}$  vektor és az  $x$  tengely által bezárt szög (1.33. ábra). A  $\varphi_x$  szög értékétől függően pozitív vagy negatív az  $F_x$  koordináta.

Ha rögzítjük a bázisvektorokat, akkor az  $\mathbf{F}$  vektor jellemzésére elegendő a bázisvektorok együtthatóinak, az  $\mathbf{F}$  vektor  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  koordinátáinak (skalárkomponenseinek) a megadása, ún. *oszlopvektor* formájában:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Gyakran célszerű lehet egymás mellé írni a vektor koordinátáit  $\mathbf{F} = [F_x \ F_y \ F_z]^T$  alakban; itt a T index (az ún. transzponálás jele) mutatja, hogy az  $\mathbf{F}$  vektor nem sorvektor, hanem oszlopvektor, csak a hellyel való takarékoskodás érdekében egymás mellé írtuk a koordinátákat.

**1.8. megjegyzés:** Nagyon fontos, hogy a mechanika keretében használt vektorok valamilyen fizikai mennyiséget írnak le, tehát nem alkot bármilyen számhármast (pl. a levegő hőmérséklete Kelvinben, a szélesség m/s-ban és a légnyomás hPa-ban) egy vektort. A  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  számhármast akkor tekinthető egy  $\mathbf{v}$  vektor három koordinátájának, ha egy másik, az eredetihez képest elforgatott koordináta-rendszerre áttérve az új koordinátákkal felírt  $\mathbf{v}' = [v'_1 \ v'_2 \ v'_3]^T$  vektor és az eredeti  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$  vektor között a forgatásnak megfelelő a matematikai kapcsolat. Egy ilyen forgatási transzformációt a 6.5. fejezetben mutatunk be. ♣

Azonos támadáspontú koncentrált erők összege vagy különbsége a koordináták segítségével is számítható:

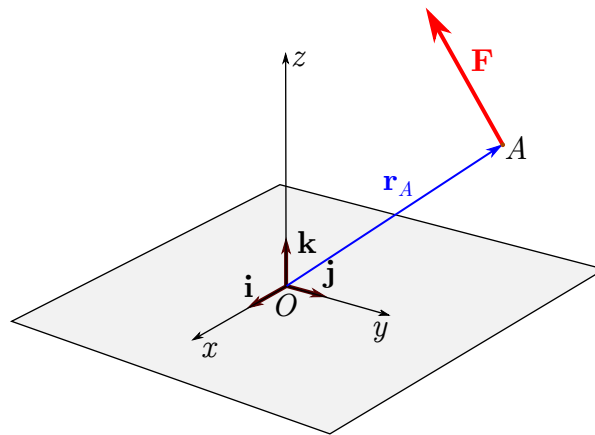
$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \\ F_{1z} + F_{2z} \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Vektorokkal az összeadáson és kivonáson kívül szorzási műveleteket is végezhetünk, melyeket a 8.1. függelékben ismertetünk [4].

Egy koncentrált erő hatásának jellemzéséhez az  $\mathbf{F}$  vektor koordinátáin kívül még az erő támadáspontját (ezt jelölje most  $A$ ) is meg kell adni. Ehhez egy  $\mathbf{r}_A$  helyvektort használhatunk, ami a koordináta-rendszer origójából az  $A$  pontba mutat, az 1.34. ábra szerint:

$$\mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Tehát az erő megadásához a térben hat skalár koordinátára van szükség. Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ezek  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ , valamint  $r_x$ ,  $r_y$ ,  $r_z$ .

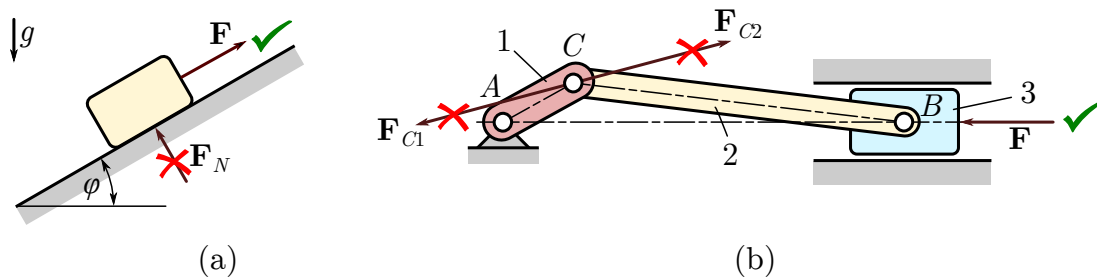


1.34. ábra. Egy  $\mathbf{F}$  vektor támadáspontjának megadása

Bár bizonyos feladatok elvileg megoldhatók lehetnek csak a koordináták felírásával, a gyakorlatban leginkább alkalmazott, ajánlott eljárás során kombinálják a szerkesztést és a koordinátákkal végzett műveleteket, de a szerkesztés pontos végrehajtása helyett csak egy vázlatot rajzolnak, ami segíti a számításokat.<sup>11</sup>

### 1.5.3. Szabadtest-ábrák

A feladatok megoldását megkönnyíti, ha világosan látható az ábrákon, hogy a berajzolt erővektorok melyik testről melyikre hatnak. Ha ugyanis két test érintkezik, akkor mindkettőről erő adódik át a másikra. Ha e két erő bármelyikét is berajzoljuk az ábrába, akkor arról nem biztos, hogy eldönthető, melyik testre hat.



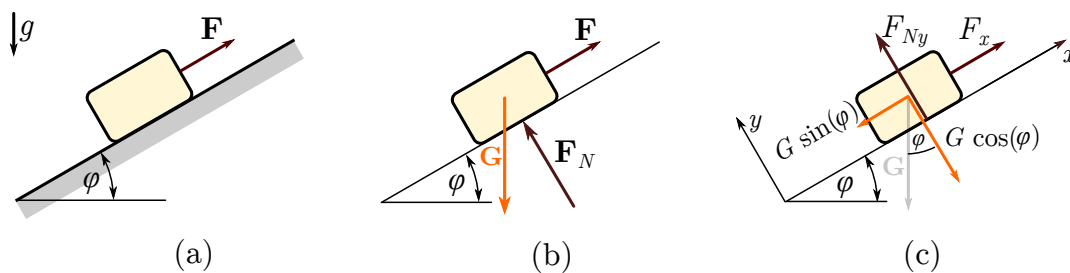
1.35. ábra. Példák a mechanikai rendszer elemei között ható erő félreérthető jelölésére. Az (a) ábra alapján nem egyértelmű, hogy az  $\mathbf{F}_N$  erő a lejtőre vagy a hasábra hat-e. (b) Az  $\mathbf{F}_{C1}$  és  $\mathbf{F}_{C2}$  erőkről nem derül ki az ábra alapján, hogy egy nem ábrázolt külső test hatásaként jelennek meg, vagy a két rúd kölcsönhatását jellemzik, azaz belső erők. Az sem világos az ábra alapján, hogy melyik erő melyik testre (az (1)-es testre, a (2)-es testre, esetleg a C csuklóra) hat. Ezért szerkezeti ábrákon csak külső aktív erőket tüntetünk fel – ilyen a lejtőre helyezett hasábra, illetve a (b) ábrán szereplő (3)-as testre ható  $\mathbf{F}$  erő [A33]

A félreértések elkerülése érdekében ún. *szabadtest-ábrákat* szoktak rajzolni. Ennek során

<sup>11</sup>Ezt grafoanalitikus módszernek nevezik.

a feladatban szereplő összes vizsgált testet a környezetéből kiragadva rajzoljuk le, és ezekbe a különálló, egy-egy testet ábrázoló ábrákba rajzoljuk be az arra a testre ható erőket.

A szabadtest-ábrák rajzolása során alkalmunk adódik annak végiggondolására, hogy a vizsgált test mely más testekkel van kölcsönhatásban. Minden kölcsönhatást megfelelő erőként vagy erőrendszerként kell feltüntetni az ábrán. Például az 1.36/a ábrán egy lejtőre helyezett, egyensúlyban lévő hasáb látható, melyre  $\mathbf{F}$  külső erő hat. Emellett be van rajzolva a lejtő, és a nehézségi erőteret jelképező, lefelé mutató nyíl is. Mivel a hasáb kölcsönhatásban van a lejtővel is és a Föld nehézségi erőterével is, az 1.36/b szabadtest-ábrán fel kell tüntetni az  $\mathbf{F}$  erő mellett a lejtőről átadódó  $\mathbf{F}_N$  erőt és a  $\mathbf{G}$  nehézségi erőt. Ha a hasáb és a lejtő között figyelembe vesszük a súrlódási erőt is, akkor azt külön kell jelölni a szerkezeti ábrán,  $\mu$  vagy  $\mu_0$  szimbólummal (lásd 7.7. ábra). Ebben az esetben a súrlódási erőt is fel kell venni a szabadtest-ábrán.



**1.36. ábra.** (a) Lejtőre helyezett hasáb. (b) A hasáb szabadtest-ábrája. (c) Az erők komponensekre bontásakor csak a koordináta-rendszerhez képest pozitív irányban berajzolt vektorokat jelölhetjük a megfelelő  $x$  vagy  $y$  koordinátájukkal (például  $F_x$  illetve  $F_{Ny}$ )

Többféle elfogadható módja is van a szabadtest-ábrák rajzolásának, ezzel kapcsolatban az 1.56. ábrán láthatunk két példát. Egyszerűbb esetekben – például amikor az erők iránya ismert – magukat az erővektorokat tüntetjük fel, bonyolultabb feladatok megoldása során viszont célszerű az erővektorok *komponenseit* ábrázolni a szabadtest-ábrákon. A számítások könnyebb áttekinthetősége érdekében a komponenseket  $F_x$ ,  $F_y$ , stb. koordinátákkal jelöljük, az irányokat megadó nyilakat pedig a koordináta-rendszer pozitív irányításainak megfelelően vesszük fel az ábrákon. *Úgy tekinthetjük, hogy a szabadtest-ábrára rajzolt nyíl egy bázisvektor, amit a mellé írt skalár számmal kell szorozni.* Egy pozitív  $x$  irányban felvett nyíl mellé írt  $F_x$  skalár koordináta előjele mutatja meg, hogy valójában milyen irányú a vektor adott komponense. Ha egy ismert vektor valamelyik komponensének értelme negatív, akkor berajzolhatjuk ezzel az irányítással – ilyenek a nehézségi erő komponensei az 1.36/c ábrán –, de ezeket a komponenseket nem  $G_x$ -szel vagy  $G_y$ -nal jelöljük, hanem a komponensek abszolút értékét ( $G \sin(\varphi)$  illetve  $G \cos(\varphi)$ ) írjuk a nyíl mellé.

Az erőkkel végzett számítások során mindig a szabadtest-ábrákon felvett iránynak és értelemnek megfelelően vesszük figyelembe az egyes erőkomponenseket az egyenletekben. Ennek az az előnye, hogy így a pozitív értékű eredmények annak felelnek meg, hogy az adott erőkomponens az ábrán felvetttel egyező értelmű, míg a negatív értékek azzal ellentétes irányítást jeleznek.

**1.9. megjegyzés:** Az 1.36. ábra kapcsán tárgyalható két egyszerű gép – a lejtő és a csavar – működése. Ha jó közelítéssel egyenes vonalú egyenletes mozgással halad a test a lejtőn felfelé,

akkor úgy tekinthetjük, hogy végig egyensúlyban van. Egyensúlyban az erők vektori eredője nulla, amit külön-külön vizsgálhatunk a lejtővel párhuzamos és arra merőleges irányban (lásd 1.6. fejezet). Ennek megfelelően az alábbi két egyenletet írhatjuk fel  $x$  illetve  $y$  irányban:

$$x: F_x - G \sin(\varphi) = 0, \quad (1.12)$$

$$y: F_{Ny} - G \cos(\varphi) = 0. \quad (1.13)$$

Itt a nehézségi erő nagysága  $G = mg$ , ahol  $g$  a nehézségi gyorsulás. Az egyenletek megoldása  $F_x = mg \sin(\varphi)$  és  $F_{Ny} = mg \cos(\varphi)$ . Tehát a lejtő működésének az az alapja, hogy a testre  $G = mg$  helyett csak annál kisebb,  $F_x$  erőt kell kifejteni ahhoz, hogy feljebb juttassuk a lejtőn. Minél kisebb a lejtő hajlásszöge, annál kisebb ez az erő, de annál hosszabb lejtőre van szükség ugyanakkora magasságkülönbség leküzdéséhez.

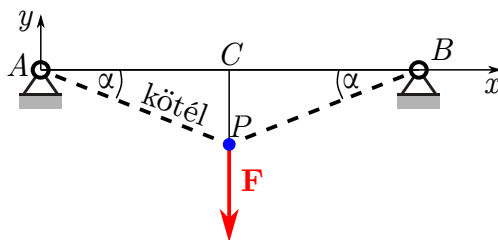
A csavar ugyanezen az elven működik, hiszen az úgy tekinthető, mint egy hengeres felületre feltekert lejtő. ♣

A számítások során gyakran van szükség trigonometrikus függvények használatára, például amikor egy ismeretlen  $\mathbf{F}$  erő hatásvonalának irányát megadó  $\varphi$  szög ismert, és az erő előjeles nagyságát ( $F$ ) keressük. Ilyenkor az (1.6) egyenletek szerint a szabadtest-ábrán pozitív irányban felvett komponensek koordinátái  $F_x = F \cos(\varphi)$  illetve  $F_y = F \sin(\varphi)$ . Célszerű lehet a levezetések során megtartani a trigonometrikus kifejezéseket, és csak a végeredménybe behelyettesíteni  $\varphi$  értékét, mert ez egyszerűsítésekre adhat lehetőséget. Nevezetes szögek szinuszának-koszínuszának-tangensének értékeit ugyanezen okból érdemes ismerni. Az eredmények gyakran kifejezhetők irracionális számok (pl.  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\pi$ , stb.) segítségével, de azokat a feladat megoldásának végén mindig tizedes törtben kell megadni.

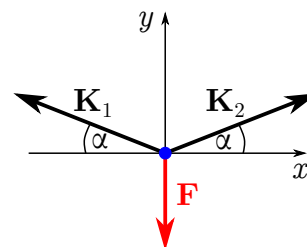
A szabadtest-ábrák áttekinthető megrajzolása szinte garantálja a megfelelő egyenletrendszer felírását, tehát érdemes gyakorlatot szerezni ezek felrajzolásában. Ebben segít, ha jó stratégiát alkalmazunk az erők jelölésére. Az ajánlott módszereket példákon keresztül fogjuk ismertetni (lásd az 1.2., 2.4., 4.2. és 4.4. feladatokat, valamint a 4.2.1. fejezetben leírt példát).

**1.2. példa:** *Oldjuk meg az 1.1. feladatot számítással! Az egymástól 2 m távolságban lévő A és B pontok közé egy kötelet rögzítünk, melynek P felezőpontjába egy anyagi pontként modellezhető karikát rögzítettek. Erre a kisméretű testre ismert  $F = 200$  N nagyságú erő hat. A kötél belógása  $\overline{PC} = 40$  cm. Határozzuk meg a kötélagakban ébredő erőket!*

Szerkezeti ábra:



A karika szabadtest-ábrája:



1.37. ábra. Ábrák az 1.2. példa megoldásához

**Megoldás:**

A megoldás első lépésében lerajzoljuk a szerkezeti ábrát, melyen az  $\mathbf{F}$  erőt ábrázolhatjuk, de a kötelerőket nem, mert nem lenne világos, hogy a kötélről a karikára vagy a karikáról a kötéltre ható erőket rajzoltuk-e be. Hogy világos legyen az erők szerepe, azokat a  $P$  anyagi pont szabadtest-ábráján tüntetjük fel, de azon maga a kötélmár természetesen nem szerepel: a kötélmhatását a két kötélágban ébredő erőkkel jellemezzük. A kötélágak szabadtest-ábráit már megrajzoltuk az 1.30. ábrán. Ott látható, hogy az  $AP$  és  $PB$  kötélágak végeire  $\mathbf{K}_1$ -gyel és  $\mathbf{K}_2$ -vel megegyező, illetve azokkal ellentétes erővektorok hatnak, tehát azok kiszámításához elegendő a  $P$  pontban lévő karikára ható erők meghatározása.

A szerkezet és az  $\mathbf{F}$  erő kijelöl egy síkot, ezért célszerű ebben a síkban felvenni a koordináta-rendszer  $x$  és  $y$  tengelyeit. A megadott geometriai adatok alapján kifejezzük a szabadtest-ábrába berajzolt erők  $x$  és  $y$  koordinátáit a felvett koordináta-rendszerben:

$$F_x = 0, \quad F_y = -F, \quad (1.14)$$

$$K_{1x} = -K_1 \cos(\alpha), \quad K_{1y} = K_1 \sin(\alpha), \quad (1.15)$$

$$K_{2x} = K_2 \cos(\alpha), \quad K_{2y} = K_2 \sin(\alpha). \quad (1.16)$$

Az egyensúly feltétele, hogy az erők összege nulla legyen. Ennek a feltételnek az  $x$  és  $y$  irányú komponensekre is teljesülnie kell, tehát a vektorok koordinátaival két skalár egyenletet kapunk:

$$F_x + K_{1x} + K_{2x} = 0, \quad (1.17)$$

$$F_y + K_{1y} + K_{2y} = 0. \quad (1.18)$$

Behelyettesítve az egyes skalárkomponensek (koordináták) kifejezéseit:

$$-K_1 \cos(\alpha) + K_2 \cos(\alpha) = 0, \quad (1.19)$$

$$-F + K_1 \sin(\alpha) + K_2 \sin(\alpha) = 0. \quad (1.20)$$

Az első egyenletből  $K_1 = K_2$ , amit felhasználva a második egyenletben

$$2K_1 \sin(\alpha) = F \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{F}{2 \sin(\alpha)}. \quad (1.21)$$

A feladat adatai szerint

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{CP}}{\overline{CB}} = \frac{0,4 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 0,4, \quad (1.22)$$

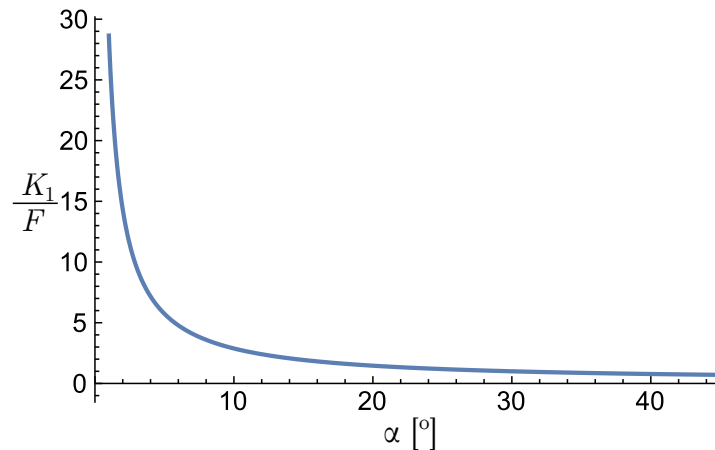
amiből  $\sin(\alpha) \approx 0,3714$ , tehát a kötélágakban ébredő erő  $K_1 = K_2 \approx 269,258 \text{ N}$ . Ez jól egybevágh az 1.1. feladat grafikus megoldásával kapott értékkel.

Érdeemes megjegyezni, hogy az (1.21) képlet szerint kis  $\alpha$  szögeknél (tehát kis belógás mellett) nagyon nagy erő ébredhet a kötélágakban, ahogy az 1.38. ábra is mutatja.

Ez az oka annak, hogy a kötélből készült korlátokat nem szabad túlságosan feszesre készíteni, mert akkor még viszonylag kicsi keresztirányú erő hatására is elszakadhatnak. ♠

## 1.6. A statika alapelvei

Minden logikai úton felépülő természettudományra igaz, hogy megfigyelések, kísérleti tapasztalatok, mérések elemzése alapján található néhány olyan állítás – az alapelvek –, melyek igazságtartalmát bizonyítás nélkül elfogadjuk, és ezekből levezethetjük az adott tudományterület eredményeit. Mivel ez az elemzés többféleképpen is megtehető, több különböző módon is kiválaszthatók az alapelvek a számos tapasztalati törvény közül.



**1.38. ábra.** A kötélagakban ébredő erő és az  $F$  terhelő erő aránya az  $\alpha$  szög függvényében

**1.10. megjegyzés:** Gyakran axiómáknak vagy alaptételeknek nevezik ezeket az alapvető állításokat. Az axióma szót leginkább a matematikában szokták használni. Mivel a statikai állításaink mögé mindig a valóságot kell elképzelnünk, az ezekből felépített elmélet nem érheti el a matematikai gondolatmenetek logikai szigorúságát, ezért mi nem nevezzük állításainkat axiómáknak. A 3.5. fejezetben látni fogjuk, hogy a bevezetendő alapelvek egy része következik egy matematikailag tömören megfogalmazható tételből, amit a statika alaptételének nevezünk. A félreértések elkerülése végett az alaptétel szót csak arra az egy tételre fogjuk használni a statikában.

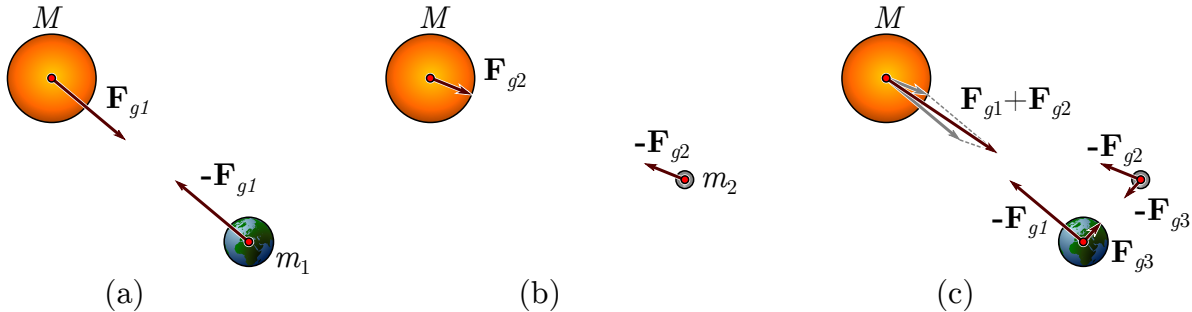
Mi a statika felépítése során hét alapelvből indulunk ki, melyek mindegyike az erők vagy erőrendszerek tulajdonságaival foglalkozik. Ezek egy részét már fel is használtuk az előző fejezetekben, hogy egyszerűbb legyen az erő fogalmának bevezetése, de az erőről eddig elmondottakat is az alapelvek alapján kell értelmezni. Az első hat alapelvhez szükséges alapismereteket már tisztáztuk a korábbi fejezetekben. Az utolsó, 7. alapelv megértéséhez új fogalmakat – az *erőpár* és a *nyomaték* fogalmát – is be kell vezetni, de ezeket egyelőre csak röviden tárgyaljuk. Részletesebb tisztázásukra sor fog kerülni a 2. fejezetben.

### 1.6.1. Közös támadáspontú erők eredője (szuperpozíció elv, erőhatások függetlenségének elve)

**1. alapelv: Szuperpozíció elv.** Egy test adott  $A$  pontjában támadó  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők közül álló erőrendszer egyenértékűen helyettesíthető egy ugyanazon támadáspontú  $\mathbf{F}_e$  eredő erővel, mely az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők vektori összege. ♠

Itt egyenértékűség alatt azt értjük, hogy a két erőből álló erőrendszer hatása megegyezik az eredő erő hatásával, azt minden tekintetben helyettesíti. Az erővektorok összegzését az 1.24. ábrával illusztrált paralelogrammaszabály vagy a háromszögszabály alapján tehetjük meg. Mindkét módszer használható, de érdemes megemlíteni, hogy a paralelogrammaszabály segítségével végzett szerkesztés jól kiemeli, hogy a vektorok közös támadáspontúak, míg a háromszögszabállyal végzett szerkesztésből ez nem látszik.

A fenti alapelvből következik, hogy tetszőleges számú, közös támadáspontú koncentrált erő is helyettesíthető egyetlen eredővel, hiszen az erőket párosával helyettesíthetjük az eredőjükkel, majd az eredőket is összegezzük. Az 1. alapelvet *szuperpozíció elvnek* is nevezik. Ez az elv teszi lehetővé azt is, hogy a vektorokat komponensekre bontsuk.



**1.39. ábra.** A szuperpozíció elv szemléltetése. (a) Az  $M$  tömegű Napra az  $m_1$  tömegű Föld  $\mathbf{F}_{g1}$  gravitációs erőt fejtene ki, ha semmilyen más test nem lenne a közelben. (b) Az  $m_2$  tömegű Hold egymagában  $\mathbf{F}_{g2}$  gravitációs erővel hatna a Napra. (c) A Föld és a Hold együttes hatása egyenértékű az  $\mathbf{F}_{g1} + \mathbf{F}_{g2}$  eredő erő hatásával, azaz a Napra gyakorolt hatásukat nem befolyásolja, hogy közöttük is van kölcsönhatás, amit az  $\mathbf{F}_{g3}$  és  $-\mathbf{F}_{g3}$  erővektorok jelölnek [A34]

**1.11. megjegyzés:** A szuperpozíció elvből következik, hogy az erő vektorként kezelhető, hiszen egy vektornak nemcsak iránya és nagysága kell legyen, hanem az 1.8. definíció szerint teljesítenie kell a paralelogrammaszabályt is. Fizikailag a következőképpen értelmezhetjük ezt az elvet: egy vizsgált testre ható erő mindig egy másik test vagy mező hatására alakul ki. Ha több testről is adódik át erő, akkor ezek a testek egymással is kölcsönhatásba kerülhetnek, ezért logikailag nem zárható ki, hogy más nagyságú vagy irányú hatást okoznak, ha nemcsak „egyedül” vannak a vizsgált test közelében, hanem a többi testtel együtt. A szuperpozíció elv azt fejezi ki, hogy ha egymás után több test is kölcsönhatásba kerül a vizsgált testtel, ezek a testek *egymás hatását nem befolyásolják* (1.39. ábra). Ezért a szuperpozíció elvet az *erőhatások függetlenségének elvéként* is szokták emlegetni. ♣

A szuperpozíció elvből következik, hogy azonos támadáspontú, ellentétes erők eredője nullvektor. Tehát ha egy test egy pontjában ilyen erők hatnak, azoknak összességében semmilyen hatásuk nincs a testre.<sup>12</sup> Ha a test egyensúlyban volt a két azonos nagyságú és támadáspontú, de ellentétes erő hatása előtt, akkor azok hatása mellett is tartós nyugalomban marad.

**1.10. definíció.** Az olyan erőrendszert, aminek elvétele során nem változik meg a test mozgásállapota, azaz a test egyensúlyban marad, egyensúlyi erőrendszernek nevezzük. ♠

Az eddig elmondottak szerint egy *test egyensúlyának* vizsgálatához elegendő azt megvizsgálni, hogy egyensúlyi erőrendszer hat-e rá. Ebben az értelemben beszélhetünk egy adott erőrendszerben szereplő *erők egyensúlyáról* is.

<sup>12</sup>A valóságos erők nem egy pontban ható (azaz koncentrált) erők, ezért csak az fordulhat elő, hogy a két ellentétes erő a test egymáshoz közeli felületein vagy térfogatrészein fejt ki hatását, melyek környezetében a test anyaga deformálódik.

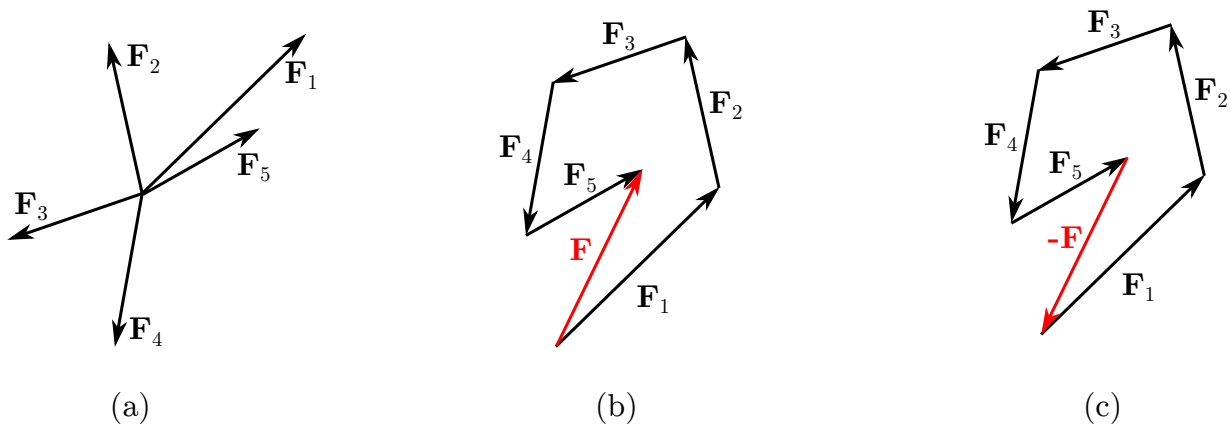
Egyetlen, nem nulla nagyságú erő nyilvánvalóan nem alkothat egyensúlyi erőrendszert, hiszen az 1.4. fejezetben leírtak szerint gyorsító hatása van, az (1.3) összefüggés alapján. Ennek a megfordítása is igaz: ha egyetlen, nulla nagyságú erővel helyettesíthető egy erőrendszer, akkor az egyensúlyi erőrendszert alkot. A szuperpozíció elv alapján tehát az alábbi állítást fogalmazhatjuk meg:

**1.1. következmény.** *Tetszőleges  $n$  számú, azonos támadáspontú erő akkor alkot egyensúlyi erőrendszert (röviden: akkor van egyensúlyban), ha vektori eredőjük nullvektor:*

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (1.23) \quad \spadesuit$$

Nagyon fontos kiemelni, hogy ez a feltétel nem elegendő, ha az erők támadáspontjai nem esnek egybe (lásd 2.1. következmény)!

Az egyensúly feltételeit kifejező egyenleteket *egyensúlyi egyenleteknek* nevezzük. A háromszögszabály (lásd 1.26. ábra) az (1.23) egyensúlyi egyenlettel kifejezett esetre is általánosítható: az  $n$  darab erővektor eredőjét úgy szerkeszthetjük meg, hogy felmérjük az  $\mathbf{F}_1$  vektort, annak végpontjából az  $\mathbf{F}_2$  vektort, majd annak a végpontjából az  $\mathbf{F}_3$  vektort, stb. Egyensúly esetén az egymás után rajzolt vektoroknak egy záródó alakzatot kell alkotniuk, melyen a nyilak irányát követve körbe lehet menni. Ezt úgy nevezik, hogy *a nyílfolyam záródik*. Abban a speciális esetben, mikor az erők nemcsak közös támadáspontúak, hanem azonos síkba is esnek, nyílfolyamuk egy sokszöget alkot.



**1.40. ábra.** (a) Azonos támadáspontú, egy síkba eső hatásvonalú erők (b) Az erők  $\mathbf{F}$  eredője (c) Ha az erőrendszerhez az eredő ellentettjét vesszük hozzá, akkor egyensúlyi erőrendszert kapunk, a nyílfolyam záródik

Ha egy közös támadáspontú erőrendszer eredője egy nem nulla nagyságú erő, akkor az egyensúly biztosításához éppen az eredő ellentettjét kell hozzávenni az erőrendszerhez, ugyanabban a támadáspontban (lásd 1.40. ábra). Tehát az eredő erő számításához, illetve az egyensúlyhoz szükséges erő meghatározásához gyakorlatilag ugyanazokat a lépéseket kell megtenni.

Egy elhanyagolható méretű – azaz anyagi pontnak tekinthető – testre ható erők jó közelítéssel közös támadáspontúak, tehát az (1.23) képlet *az anyagi pontok egyensúlyának* feltételeként is felfogható. A mérnöki gyakorlatban azonban többnyire kiterjedt, véges méretű

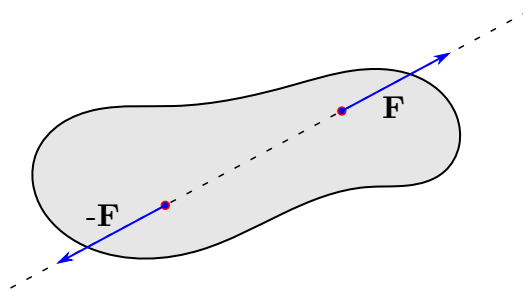


testekkel foglalkozunk, melyekre általában különböző támadáspontú erők hatnak. Mivel a statikai vizsgálatokban merevnek tekintjük a testeket, a következő három alapelv a merev testek egyensúlyával kapcsolatos.

### 1.6.2. Két, ugyanarra a merev testre ható erő egyensúlya

Két erő egyensúlyának feltételét általánosítja a statika következő alapelve arra az esetre, amikor a támadáspontjaik különbözőek is lehetnek (lásd 1.41. ábra):

**2. alapelv:** *Két, ugyanarra a merev testre ható erő akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha a két erő közös hatásvonalú, egyenlő nagyságú és ellentétes értelmű.* ♠



1.41. ábra. Két erő egyensúlya

### 1.6.3. Egyensúlyi erőrendszer hozzáadása vagy elvétele

Ha nem azonos pontban támadnak az egyensúlyi erőrendszert alkotó erők, akkor azok a test deformációját okozzák. Merev testek esetében ezt a deformációt elhanyagoljuk, ezért kimondható a következő állítás:

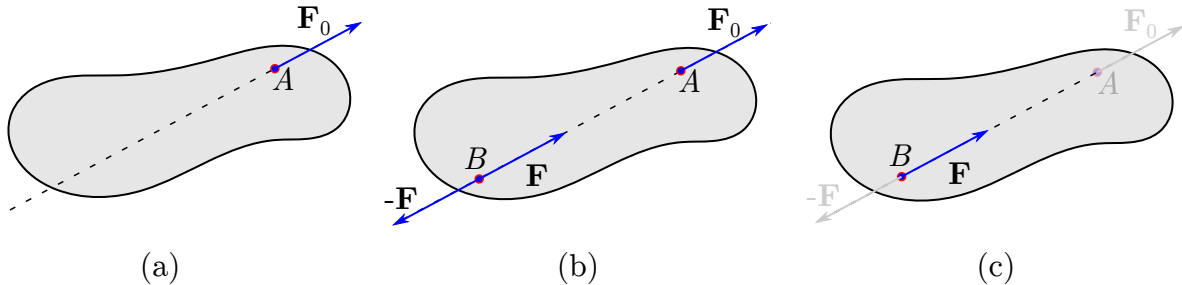
**3. alapelv:** *Merev testen támadó erőrendszer hatása nem változik, ha az adott erőrendszerhez egy másik, önmagában egyensúlyban lévő erőrendszert adunk, vagy az erőrendszerből önmaguk között egyensúlyt tartó erőket eltávolítunk.* ♠

Ennek az alapelvnek az a jelentősége, hogy egy merev testen támadó erőrendszer az 1. és a 3. alapelvek alapján helyettesíthető másik – ugyanolyan hatású, de valamilyen szempontból egyszerűbb, vagy a feladat megoldásához alkalmasabb – erőrendszerrel.

**1.2. következmény.** *Az előző tételekből következik, hogy a merev testre ható erő a hatásvonalán bárhová eltolható.* ♠

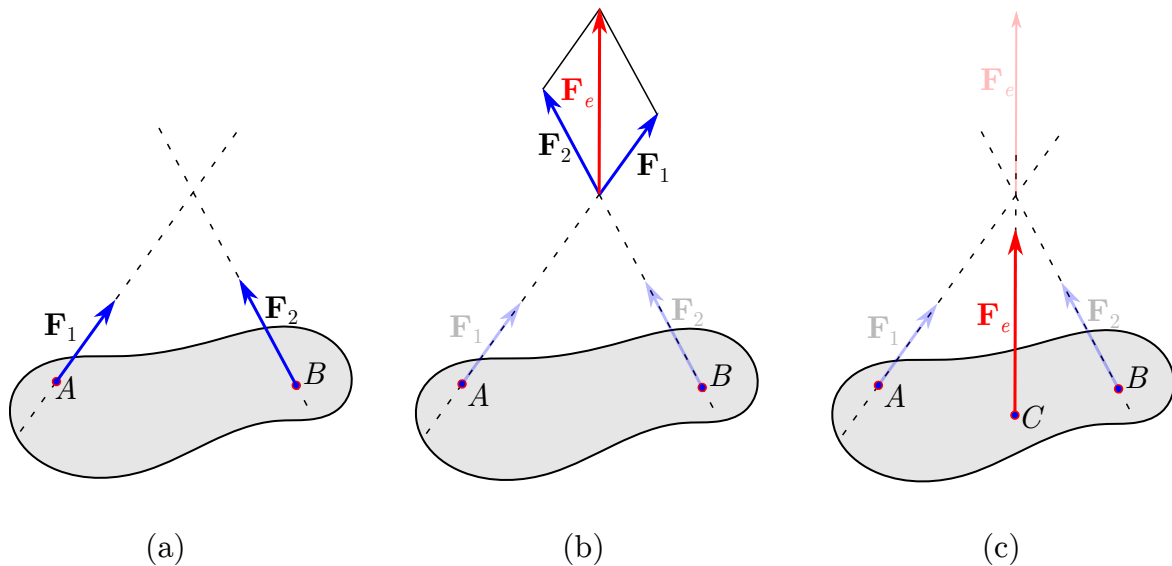
Képzeld el ugyanis, hogy a test  $A$  pontjában  $F_0$  erő hat, ahogy az 1.42/a ábra mutatja! A 3. alapelv szerint ennek az erőnek a hatása nem változik, ha a test bármely pontjában támadó, önmagával egyensúlyban lévő erőrendszert adunk hozzá. Álljon ez az erőrendszer egy  $F = F_0$  és egy  $-F = -F_0$  erővektorból, melyek közös támadáspontja az eredeti,  $F_0$  erő hatásvonalán lévő, de egyébként tetszőleges  $B$  pontban helyezkedik el (1.42/b ábra)! A 2. alapelv szerint az  $F_0$  és  $-F$  erők egyensúlyt tartanak, ezért eltávolíthatók (1.42/c ábra).

Tehát a  $B$  pontban támadó  $\mathbf{F}$  erő hatása egyenértékű az eredeti  $\mathbf{F}_0$  erő hatásával. E két erő csak a támadáspontjában különbözik, ezért úgy tekinthetjük, hogy az  $\mathbf{F}$  erőt az  $\mathbf{F}_0$  erő hatásvonal menti eltolásával kaptuk. Merev testek esetében tehát nem a támadáspontnak, hanem a hatásvonalnak van jelentősége. Ezért azt szokták mondani, hogy a merev testre ható erő *hatásvonalához kötött* vektor.



1.42. ábra. Merev testre ható erő eltolható a hatásvonala mentén

**1.3. példa:** Határozzuk meg az eredő erőt abban az esetben, amikor a merev testre két nem párhuzamos, egy síkba eső erő hat!



1.43. ábra. Merev testre ható, egy síkba eső hatásvonalú erők eredője

#### Megoldás:

A nem párhuzamos, de egy síkba eső erők hatásvonalainak kell hogy legyen egy metszéspontja, ahogy az 1.43/a ábra mutatja. Az 1.2. következmény szerint mindkét erővektort eltolhatjuk ebbe a metszéspontba. Előfordulhat, hogy a metszéspont a test körvonalain kívül esik. Ebben az esetben képzeletben kiterjesztjük a testet úgy, mintha hozzátartozna a metszéspont is. Ezután alkalmazható a szuperpozíció elv, tehát megszerkeszthető az eredő a paralelogramma szabály vagy a háromszög szabály alapján (1.43/b ábra). A kapott vektor bárhová eltolható a hatásvonalára mentén, például a  $C$  támadáspontba (1.43/c ábra). ♠

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a 2. és 3. alapelvek csak merev testekre érvényesek. Deformálható testek esetében már egészen más hatású erőrendszert kaphatunk az erők hatásvonal menti eltolásával. Például ha egy kötél két végére ugyanakkora nagyságú, de ellentétes értelmű húzóerők hatnak, akkor a kötél megfeszül, a két azonos hatásvonalú erő egyensúlyt tart. Viszont ha mindkét erőt eltoljuk a kötél másik végébe, akkor a támadáspontok felcserélődnek és nyomóerő éri a kötelet, ami ennek hatására elveszíti eredeti alakját. Ettől kezdve a kötél már nem teremt kapcsolatot a két erő között, tehát egyensúlyról nem beszélhetünk.

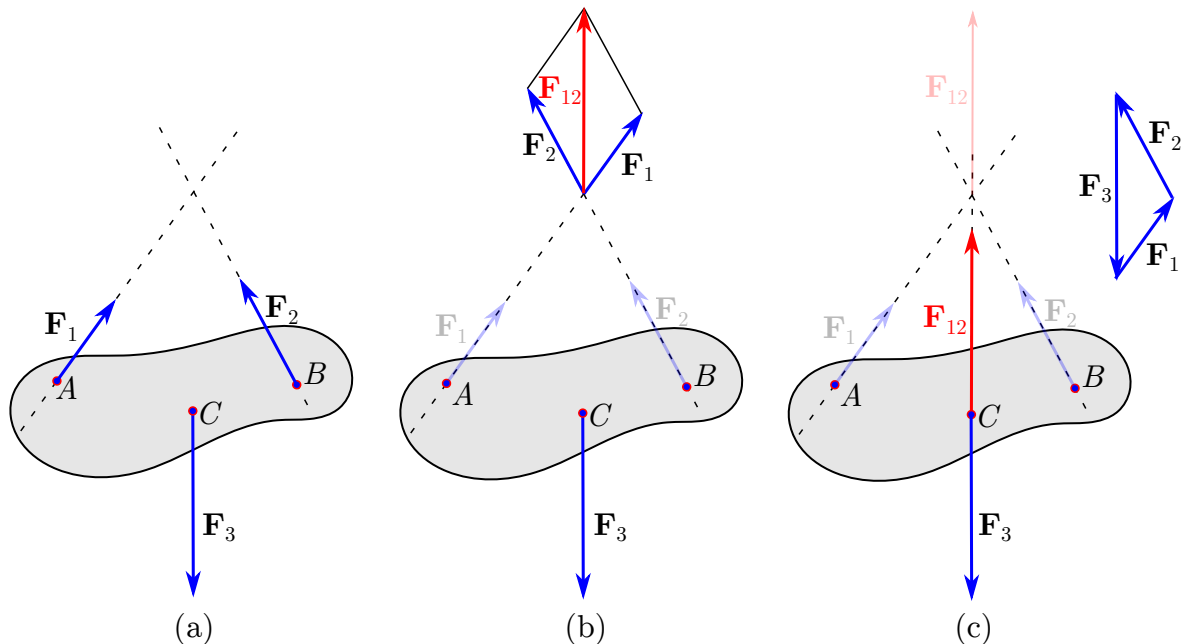
#### 1.6.4. Három, ugyanarra a merev testre ható erő egyensúlya

A 2. fejezetben látni fogjuk, hogy egy adott merev testre ható erőrendszer sok esetben helyettesíthető egy vagy két koncentrált erővel. Egy darab nem nulla nagyságú erő önmagában nem alkothat egyensúlyi erőrendszert, két erő esetében pedig a 2. alapelv alapján dönthető el, hogy az erőrendszer egyensúlyi-e vagy sem.

Azonban vannak olyan esetek is (lásd 3. fejezet), amikor az erőrendszer csak legalább *három* erővel helyettesíthető. Erre az esetre is ki kell mondani az egyensúly feltételét; ez a negyedik alapelv:

**4. alapelv:** *Ugyanarra a merev testre ható három erő csak akkor lehet egyensúlyban, ha hatásvonalaik közös síkba esnek.* ♠

Ebből az alapelvből közvetlenül levezethető, hogy három nem párhuzamos, de közös síkba eső hatásvonalú  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$  és  $\mathbf{F}_3$  erő mikor lehet egyensúlyban. Ebben az esetben ugyanis lesz legalább két olyan erő – például  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  –, melyek hatásvonalai metszik egymást, az 1.44/a ábrán látható módon.



1.44. ábra. Egy merev testre ható három erő egyensúlya

Ez azt jelenti, hogy az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők  $\mathbf{F}_{12}$  eredője megszerkeszthető, ezért vissza lehet vezetni a problémát két erő eredőjére. Tehát a 2. alapelv szerint csak akkor teljesülhet az

egyensúly, ha  $\mathbf{F}_3$  és  $\mathbf{F}_{12}$  azonos hatásvonalú, megegyező irányú és ellentétes értelmű. Mivel  $\mathbf{F}_{12}$  hatásvonala áthalad a másik két erő hatásvonalainak metszéspontján,  $\mathbf{F}_3$  hatásvonalának is át kell haladnia ezen a ponton, ahogy az 1.44/c ábra mutatja. Másképp megfogalmazva: az egyensúlyhoz szükséges, hogy a három erő hatásvonalai egy pontban messék egymást. Ekkor mindhárom erővektor eltolható a közös metszéspontba. Három közös támadáspontú erő egyensúlyának a feltétele pedig az (1.23) egyenlet szerint az, hogy a vektorháromszögük záródjon, mégpedig úgy, hogy egy tetszőleges kezdőponttól a vektorok által kijelölt irányban haladva visszajussunk ugyanabba a pontba. Ezt úgy fejezik ki, hogy *a vektorháromszög folytonos nyílfolyammal záródik*.

A fenti gondolatmenetet tehát az alábbi módon foglalhatjuk össze:

**1.3. következmény.** *Három, ugyanarra a merev testre ható, nem párhuzamos hatásvonalú erő egyensúlyának feltételei:*

- *Hatásvonalaik közös síkba esnek.*
- *Hatásvonalaiknak legyen egy közös metszéspontja.*
- *Vektorháromszögük folytonos nyílfolyammal záródjon.* ♠

Megjegyezzük, hogy a záródó vektorháromszög létezéséből nem következik, hogy a hatásvonalak közös síkba esnek: a vektorháromszög semmit sem mond az erők hatásvonalainak térbeli elhelyezkedéséről, csupán azok irányáról és irányításáról tartalmaz információt. Úgy is mondhatjuk, hogy a vektorháromszögben *matematikai értelemben vett* vektorokat ábrázolunk, melyek – a hatásvonalukhoz kötött mechanikai erővektorokkal ellentétben – önmagukkal párhuzamosan bárhová eltolhatók.

A fenti gondolatmenet nem vonatkozik arra az esetre, amikor három párhuzamos hatásvonalú erő egyensúlyát vizsgáljuk. Erre vonatkozóan csupán annyi derül ki a 4. alapelvből, hogy egy síkba kell esnie a három erő hatásvonalának az egyensúlyhoz. Látni fogjuk a 2. fejezetben, hogy a három párhuzamos erő esete is visszavezethető az 1.3. tételre, mert egy önmagában egyensúlyban lévő erőrendszert hozzávéve a három erőhöz, azok metsződő hatásvonalú erőkkel helyettesíthetők.

**1.12. megjegyzés:** Számos könyvben az 1.3. következményben megfogalmazott állítást tekintik a statika egyik alapelvének. ♣

### 1.6.5. A hatás-ellenhatás törvénye

Az erők nemcsak egyirányú hatást fejeznek ki, hanem *kölcsönhatást* jellemeznek – úgy is mondhatjuk, hogy mindig „párosával” lépnek fel. Ezzel kapcsolatos a következő statikai alapelv:

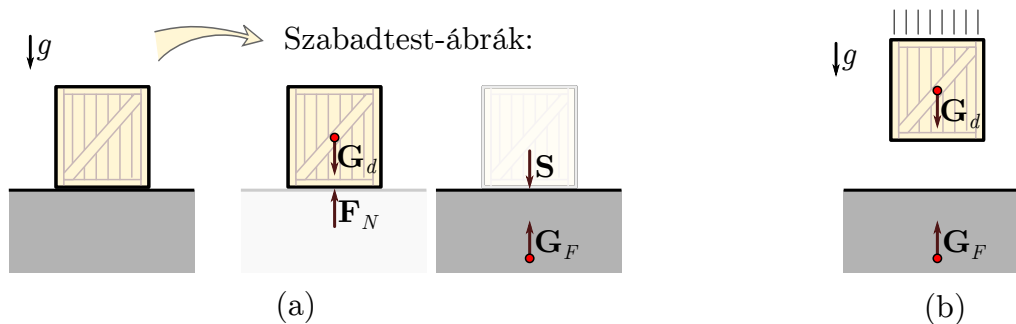
**5. alapelv: Newton III. törvénye** (*hatás-ellenhatás, akció-reakció törvénye*). *Két anyagi pont kölcsönhatása során a két testre egymásról átadódó erők azonos nagyságúak és irányúak, de ellentétes értelműek.* ♠

Mivel a véges méretű (nem pontszerű) testeket anyagi pontok összességének tekinthetjük, a hatás-ellenhatás törvénye azokra is érvényes. Ezt többek között az ún. igénybevételek tárgyalásánál fogjuk felhasználni (lásd 5.9. ábra).

**1.13. megjegyzés:** Newton harmadik törvényéhez gyakran hozzátesszük azt is, hogy a két erőnek azonos hatásvonalúnak is kell lennie. Két pontszerű test érintkezésekor maga az érintkezés is pontszerű, tehát a két test egymásra kifejtett erővektorai ugyanabban a geometriai pontban (de két különböző testen) támadnak. Mivel az erővektorok azonos irányúak, ebből következően a hatásvonalaknak is meg kell egyezniük. Térfogaton megoszló elektromágneses erők esetében előfordulhat, hogy az erő és az ellenerő különböző hatásvonalúak, de ekkor mindig megjelenik egy olyan hatás is, ami a hatásvonalak eltérését kompenzálja. Mi a továbbiakban feltételezzük, hogy az erő és az ellenerő hatásvonala azonos. ♣

Nagyon fontos megjegyezni, hogy a Newton harmadik törvényében szereplő erők *két különböző testre hatnak*. Nem szabad ezt a szituációt összekeverni két, ugyanazon testre ható erő egyensúlyával!

**1.4. példa:** Az 1.45. ábrákon egy talajon nyugvó és egy szabadon eső doboz látható. Mire hat a dobozra ható  $\mathbf{G}_d$  nehézségi erő ellenereje e két esetben?



**1.45. ábra.** (a) Talajra tett dobozra és a Földre (talajra) ható erők, két külön szabadtest-ábrán ábrázolva. (b) Szabadon eső dobozra és a Földre ható erők [A35]

### Megoldás:

A  $\mathbf{G}_d$  nehézségi erő a Földnek a *dobozra* kifejtett vonzó hatását jellemzi. Tehát Newton III. törvénye értelmében a dobozra ható nehézségi erő ellenereje a *Földre* ható, ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú  $\mathbf{G}_F$  erő (1.45/a ábra).

Ebben a feladatban gyakran az okoz félreértést, hogy a dobozra – mivel egyensúlyban van – a nehézségi erővel megegyező nagyságú, de ellentétes irányú  $\mathbf{F}_N$  normálerő (vagy tartóerő) adódik át a talajról. Azonban a normálerő és a nehézségi erő egyaránt a dobozra hat, ezért ezek nem alkothatnak erő-ellenerő párt. Természetesen a normálerőnek is megvan az ellenereje: a *talajra* ható  $\mathbf{S}$  súlyerő<sup>13</sup>.

Szabadon eső test esetében (1.45/b ábra) még világosabban látszik, hogy a  $\mathbf{G}_d$  nehézségi erő ellenereje csak a Földre hathat. Mivel ebben az esetben a doboz nincs kölcsönhatásban a talajjal, mind a normálerő, mind a súlyerő nulla. Tehát a szabadon eső test a *súlytalanság állapotában* van.

Ez a feladat is mutatja, hogy a megfelelő szabadtest-ábrák rajzolása – külön a dobozra, külön a Földre – megkönnyíti még az ilyen egyszerűnek tűnő feladatok átgondolását is. Mivel az erő és az ellenerő különböző testekre hatnak, azok ugyanazon a szabadtest-ábrán nem szerepelhetnek. ♠

<sup>13</sup>A súly az az erő, amivel egy test az alátámasztására vagy a felfüggesztésére hat. Kicsit általánosabban: egy test súlya az az erőrendszer, amivel az adott feladatban helyettesíthetjük a szóban forgó test hatásait. A nehézségi erő, a súly és a gravitációs erő közötti különbségeket a 3.7.2. fejezetben tárgyaljuk.

**1.5. példa:** *Otto von Guericke német természettudós egyik leghíresebb kísérlete (1.46. ábra) „Magdeburgi féltekék” néven vonult be a tudománytörténetbe. Guericke két üreges félgömböt összeillesztett, majd kiszivattyúzta a köztük lévő levegőt. A külső légnyomás olyan erősen összeszorította a félgömböket, hogy azokat két oldalról 8-8 lóval húzva sem lehetett szétválasztani. Tegyük fel, hogy 9-9 ló már elegendő erőt tudott volna kifejteni a szétválasztáshoz! Hogyan lehetett volna úgy módosítani a kísérletet, hogy a meglévő 16 ló felhasználásával is elváljanak a félgömbök, továbbra is ugyanolyan irányú erőt kifejtve?*



**1.46. ábra.** *Otto von Guericke kísérlete a Magdeburgi féltekékkel [A36]*

**Megoldás:**

A megoldást az erő-ellenelő elv alapján találhatjuk meg. Ha az egyik félgömböt kikötjük egy szilárd ponthoz – mondjuk egy fához –, akkor a másik félgömböt elegendő 9 lónak húznia, hiszen a fáról is pontosan 9 ló ereje fog átadódni. ♠

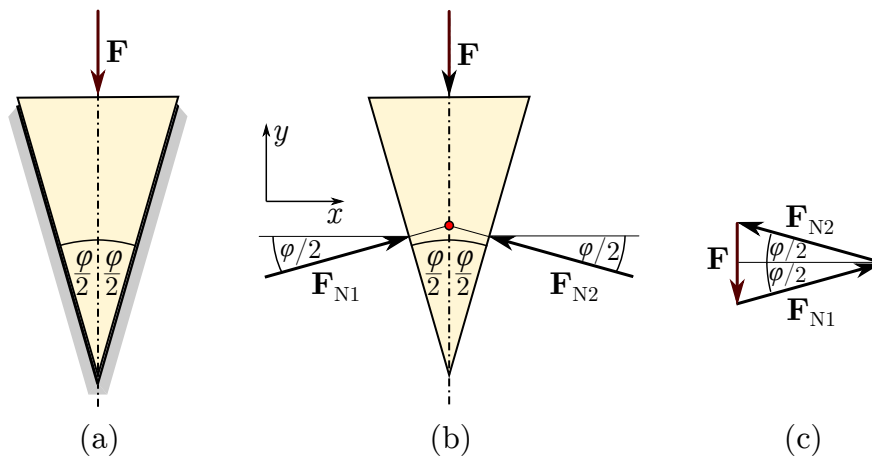
Az eddigiek alapján tárgyalható az egyik egyszerű gép, az *ék* elve is:

**1.6. példa:** *Az 1.47/a ábrával illusztrált ék szimmetriatengelyében  $F$  nagyságú erő hat. Állapítsuk meg, hogy mekkora erővel feszíti szét az ék azt a részt, amibe ez az erő belenyomja!*

**Megoldás:**

Az egyszerűség kedvéért elhanyagoljuk a súrlódási erő hatását, feltesszük, hogy a  $\varphi$  szögű ék tökéletesen beillik a szétfeszíteni kívánt testen lévő részbe, és az ék oldalaira ható nyomóerőket egy-egy koncentrált erővel helyettesíthetjük, melyeket az ábrán  $\mathbf{F}_{N1}$  és  $\mathbf{F}_{N2}$  jelöl. A hatás-ellenhatás elve miatt a szétfeszítendő testre  $-\mathbf{F}_{N1}$  illetve  $-\mathbf{F}_{N2}$  erő hat. Ezek nagyságának megállapításához megrajzoltuk az ék szabadtest-ábráját (1.47/b). A szimmetria miatt  $|\mathbf{F}_{N1}| = |\mathbf{F}_{N2}| \equiv F_N$ ,<sup>14</sup> és a súrlódásmentesség miatt mindkét nyomóerő  $90^\circ$ -os szöget zár be az ék oldalával, azaz  $\varphi/2$  szöget az  $x$  tengely irányával. Az ékre ható három erő csak akkor lehet egyensúlyban, ha van közös támadáspontjuk. Egyensúlyi erőrendszer esetében e három erő vektora záródó vektorháromszöget alkot, folytonos nyílfolyammal (1.47/c ábra).

<sup>14</sup>Ez a jelölés azt jelenti, hogy a két normálerő nagysága egyenlő, ezért ezeket ugyanazzal az  $F_N$  szimbólummal jelölhetjük.



**1.47. ábra.** (a)  $\varphi$  szögű résbe tett ék. (b) Az ék szabadtest-ábrája. (c) Az erők egyensúlyát mutató vektorábra

A vektorháromszög alapján

$$F = |\mathbf{F}_{N1}| \sin(\varphi/2) + |\mathbf{F}_{N2}| \sin(\varphi/2) \equiv 2F_N \sin(\varphi/2). \quad (1.24)$$

A rés oldalfalaira ható erők nagysága megegyezik  $\mathbf{F}_{N1}$  és  $\mathbf{F}_{N2}$  nagyságával, azaz

$$F_N = \frac{F}{2 \sin(\varphi/2)}, \quad (1.25)$$

tehát ha  $\varphi/2 < 30^\circ$ , akkor a rés falára  $F$ -nél nagyobb erő hat. ♠

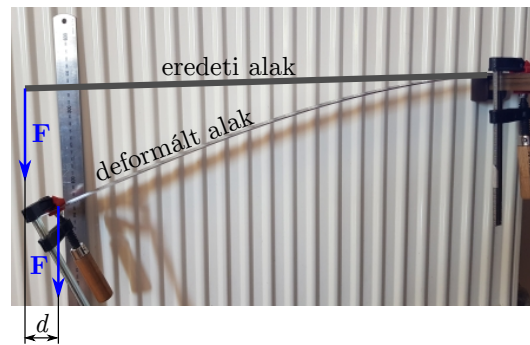
### 1.6.6. A helyettesíthetőség (megmerevítés) elve

A statika tárgykörében vizsgált testek merevek, ezért a rájuk ható erők nem okoznak alakváltozást. A statikai számítási módszerek ennek ellenére használhatók deformálható testek vizsgálatára is, a *helyettesíthetőség elvének* nevezett statikai alapelv alapján:

**6. alapelv:** *Ha egy szilárd deformálható test a rá ható erők által előidézett alakváltozás után egyensúlyba kerül, akkor ebben az egyensúlyi állapotban egy vele egyező alakú merev testtel helyettesíthető az egyensúlyi erőrendszer és a deformált alak meghatározása során.* ♠

Például ha egy egyik végén befalazott (befogott) rúd másik, szabad végére  $F$  nagyságú erő hat, akkor a rúd eldeformálódik. Ennek során az  $F$  erő támadáspontja elmozdul (lásd 1.48. ábra), tehát az alakváltozás következtében megváltozik a terhelés is. Egyensúlyi helyzetben az erő támadáspontja is tartós nyugalomba kerül, ezért annak helyzete alapján lehet meghatározni a rúd befalazott végére ható erőket.

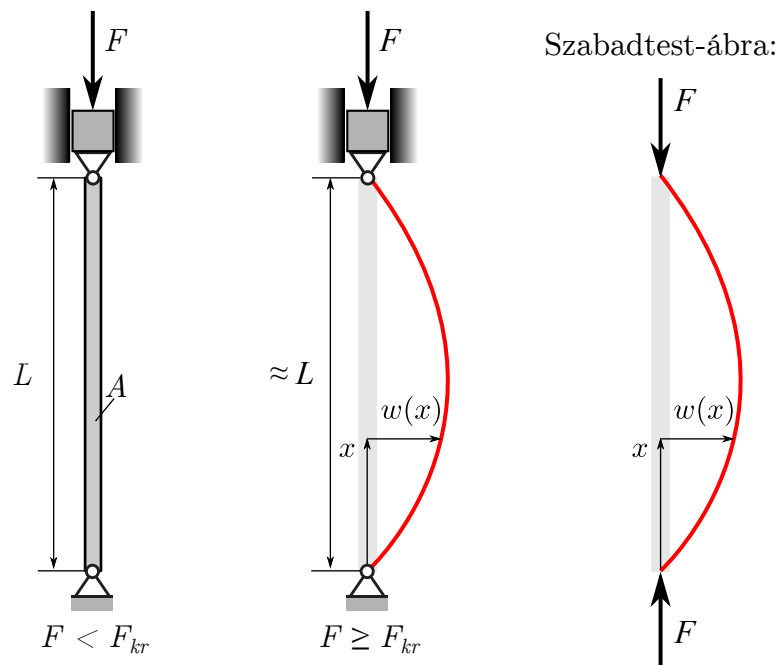
**1.14. megjegyzés:** A keletkező alakváltozások meghatározása során sok esetben olyan kis elmozdulások következnek be a terhelő erő támadáspontjában, hogy azt elhanyagolják, és az eredeti, deformálatlan geometriai adatokkal számolnak. A mérnöki számítások túlnyomó részében helytálló ez a megközelítés, de érvényességét ellenőrizni kell a modell felállítása (lásd 1.3.1. fejezet) során.



**1.48. ábra.** A vékony rúdra ható erő olyan alakváltozást okoz, aminek következtében az erő hatásvonala  $d$  távolsággal közelebb kerül a rúd rögzített (befogott) végéhez

Előfordulhat az is, hogy az alakváltozás következtében úgy mozdul el az erő támadáspontja, hogy az eredeti terhelésnél nagyobb alakváltozást okoz. Egy lehetséges megoldási módszer az, amikor az eredeti méretekkel kiszámítják az elmozdulásokat, majd a kapott deformált alaknak megfelelően veszik fel a terheléseket, és az alapján újra kiszámítják az alakváltozás értékét. Ez egy iteratív folyamat. Ha az alakváltozás minden lépésben nő, akkor ún. *stabilitásvesztés* következhet be, amit el kell kerülni, mert tönkremenetelhez vezethet [5].

Az egyik jellegzetes stabilitásvesztési eset a hosszú, nyomott rudak *kihajlása*. Ha egy rúdra egy bizonyos  $F_{kr}$  kritikus értéknél nagyobb nyomóerő hat, akkor a rúd már a legkisebb zavarás hatására is az 1.49. ábrán látható módon hirtelen elgörbül, és így a végpontjában ható erőnek hajlító hatása is lesz. Minél nagyobb mértékű a kihajlás, annál nagyobb lesz ez a hajlító hatás is, ezért a kritikus erő átlépése általában a rúd töréséhez vezet.



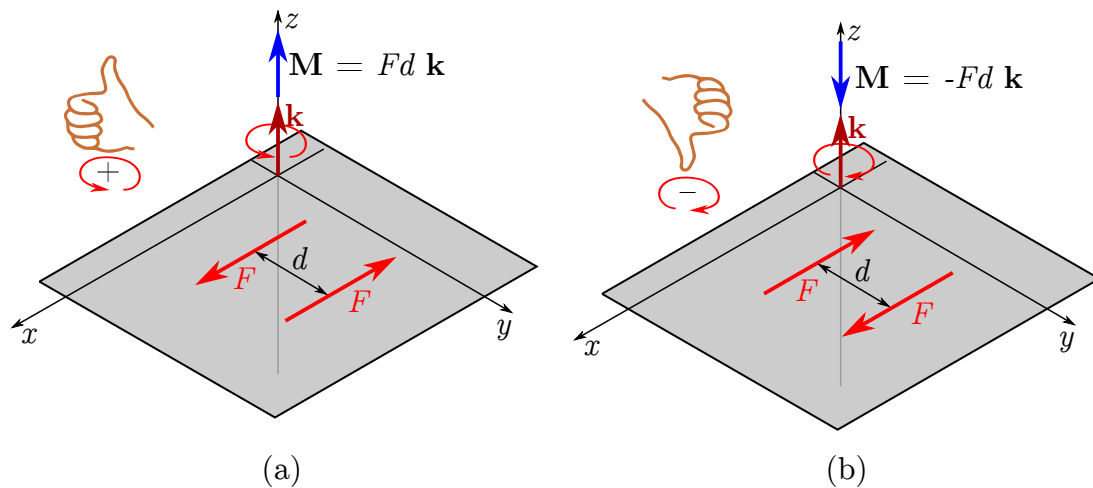
**1.49. ábra.** A kihajlás alapmodellje



### 1.6.7. Az erőpárak egyenértékűségének elve

A 2. fejezetben részletesen tárgyaljuk majd az *erőpár* fogalmát. A 2.1. definíció szerint az erőpár két olyan koncentrált erőből áll, melyek párhuzamos hatásvonalúak, azonos nagyságúak, de ellentétes értelműek (lásd 1.50. ábra).

Minden erőpárhoz hozzárendelhető egy *nyomaték*nak nevezett fizikai mennyiség. Ha az erőpárt alkotó erők  $F$  nagyságúak és hatásvonalaik távolsága  $d$ , akkor az erőpár nyomatékának nagysága  $M = Fd$ , azaz az erőpár mértékegysége Nm (newtonméter). A nyomaték vektormennyiség: iránya merőleges az erőpárt alkotó erők által kijelölt síkra, irányítását pedig a jobbkez-szabály szerint állapíthatjuk meg, ahogy az 1.50. ábra mutatja.



1.50. ábra. Erőpár nyomatéka;  $\mathbf{k}$  a  $z$  tengellyel párhuzamos bázisvektort jelöli

Hétköznapi tapasztalataink szerint egy merev testre ható erőpárnak *forgató* hatása van. Az alábbi, hetedik alapelv szerint ez a forgató hatás egyértelműen jellemezhető az erőpár nyomatékával:

**7. alapelv:** *Erőpárok egyenértékűsége.* Két, ugyanarra a merev testre ható erőpár egyenértékű, ha egyenlő a nyomatékvektoruk. ♠

Ezt az alapelvet felhasználva egy új terhelés típus is definiálható az erő mellett, amit *koncentrált erőpárnak* nevezünk (lásd 2. fejezet).

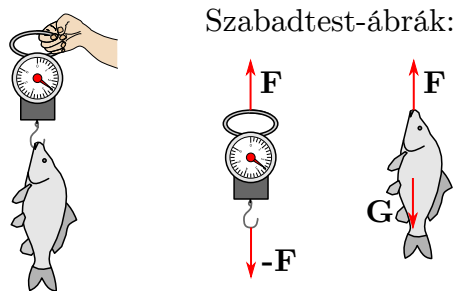
## 1.7. Kényszerek

### 1.7.1. A kényszer fogalma

Az 1.3. fejezetben már említettük, hogy a mechanika feladatok megoldásához modellezni kell a testek többi testhez való kapcsolódását.

A testek közötti mechanikai kölcsönhatást jellemző erő tulajdonságait már nagyrészt megismertük. Sok feladatban ismert a vizsgált testre ható erő. Például ha a test egy adott módon megnyújtott rugóval (például rugós erőmérővel) és a Föld nehézségi erőterével van kölcsönhatásban, akkor a rugó megnyúlásából számítható a rugóerő, a test  $m$  tömegéből és a

$g$  nehézségi gyorsulásból pedig a nehézségi erő, tehát azok ismertek. Ilyen esetekben elegendő, ha a vizsgált testre ható erőt okozó testek (rugó, Föld) helyett csak az általuk kifejtett erővel foglalkozunk. Sokszor nem is részletezik, hogy az erőrendszer egyes elemei milyen testekről adódnak át, csak megadják az erővektor tulajdonságait. Az ilyen ismert, vagy a feladatban szereplő testek állapotából, tulajdonságaiból közvetlenül kiszámítható erőket *aktív erőknek* vagy *terheléseknek* nevezzük. Az aktív erők nagyságára és irányára vonatkozóan általában nincsenek szigorú megkötések a feladatokban – elnevezésük is azt tükrözi, hogy ezek közvetlenül megváltoztathatók – például az 1.49. ábrán szereplő erő felvehet a kritikus erőnél kisebb vagy nagyobb értéket is.



**1.51. ábra.** A halra ható  $G = mg$  nehézségi erő számítható a hal tömegéből és a nehézségi gyorsulásból. Az erőmérőt terhelő erő nagysága számítható a rugó megnyúlásából és a rugó tulajdonságaiból [A37]

Ebben a fejezetben azokkal az esetekkel foglalkozunk, amikor nem ismert a két test között ható erő, de van valamilyen információnk arról, hogy a vizsgált test hogyan mozoghat, milyen módon korlátozott a mozgása – ezeket a korlátozásokat *kényszereknek* nevezzük.

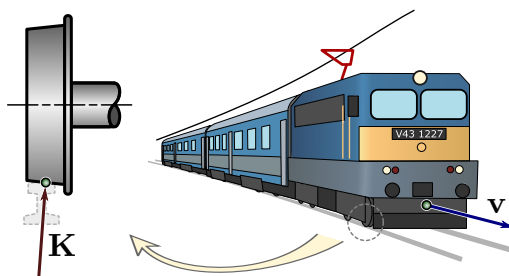
**1.11. definíció.** A kényszerek előírt feltételek, melyek korlátozásokat jelentenek a mozgásokra nézve. ♠

Például egy vonat kerekére a sínről átadódó erő elvileg kiszámolható lenne a sín és a kerék deformációja alapján, de bonyolultsága miatt a gyakorlatban nem célravezető ez a megközelítés (1.52. ábra). Ehelyett azt használják ki az ilyen jellegű feladatokban, hogy a sín bizonyos korlátozásokat ad a mozgásra vonatkozóan, tehát kényszernek tekinthető. Természetesen akkor is mechanikai kölcsönhatás jön létre, ha az egyik test korlátozza a másik mozgását, ezért a kényszerek is jellemezhetők megfelelő (kényszer)erőkkel. Ez azt jelenti, hogy ha a kényszereket gondolatban eltávolítjuk, akkor hatásukat a kényszererők segítségével lehet figyelembe venni.

**1.12. definíció.** A kényszererők vagy más néven reakciók azok az erők, melyek a kényszerfeltételek teljesülését biztosítják. Ezek az erők függenek a testre ható aktív erőktől és nem határozhatók meg csupán a vizsgált test állapota (pontjainak helye, sebességállapota, stb.) alapján. ♠

Statikai feladatokban a kényszererők mindig olyanok és akkorák, hogy a vizsgált test egyensúlyban maradjon.

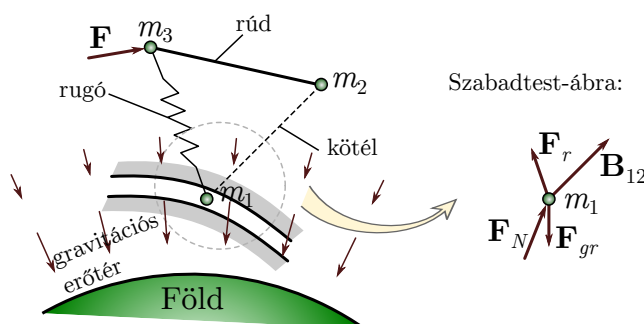
Az aktív erők és kényszererők megkülönböztetése alapvető fontosságú a statikában. A különbség megvilágítása érdekében vizsgáljuk meg, hogy az 1.53. ábrán látható erők melyik



1.52. ábra. A vonat kerekeinek sínen tartását a **K** kényszererő biztosítja [A38]

csoportba tartoznak! A vizsgált mechanikai rendszer a Föld közelében elhelyezkedő anyagi pontrendszer. Ennek  $m_1$  tömegű tagjára ható  $\mathbf{F}_{gr}$  gravitációs erő aktív erő, mert számítható a test tömegéből és a Földtől mért távolságából. A test szürkével jelzett kényszerpályán tartásához szükséges  $\mathbf{F}_N$  normálerő kényszererő, ugyanúgy, mint az  $m_2$  testről a feszes kötélen keresztül átadódó  $\mathbf{B}_{12}$  erő, mely azt a kényszert biztosítja, hogy a két test távolsága állandó. Az  $m_3$  testről a rugón keresztül átadódó  $\mathbf{F}_r$  rugóerő aktív erő, mert a testek helyzete és a rugó tulajdonságai alapján határozható meg nagysága és iránya. Az  $m_3$  testre ható  $\mathbf{F}$  erő aktív erő, melynek forrását (azt a testet, amiről átadódik az  $m_3$  tömegű testre) nem tüntettük fel az ábrán.

**1.13. definíció.** A statika alapfeladata, hogy az egyensúly feltételei és az aktív erők alapján meghatározzuk a kényszererőket. ♠



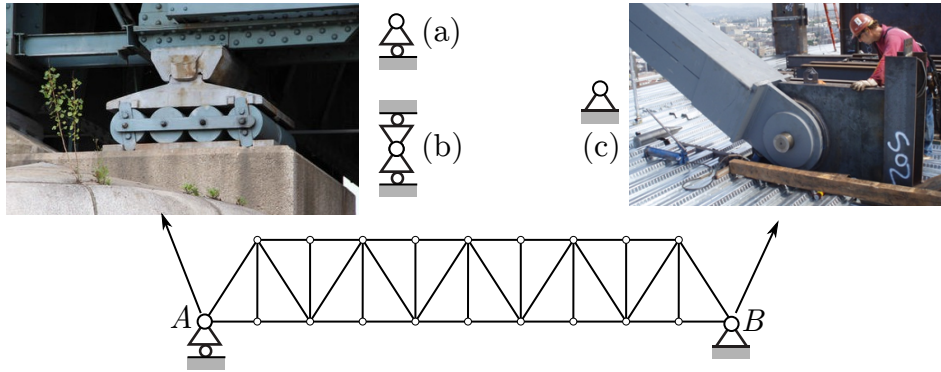
1.53. ábra. Példa az erők csoportosítására [A39]

Mivel a kényszererők meghatározása elengedhetetlen az egyensúly vizsgálatához, ezért tudnunk kell, hogy az egyes kényszerfeltételeket milyen erők tudják biztosítani. A kényszerek és a kényszererők jelentőségét példákon keresztül lehet jól megérteni. A továbbiakban felsorolunk néhány jellegzetes kényszer típust. Mivel a tananyag felépítése során célszerű a tárgyalást a könnyebben szemléltethető esetekkel kezdeni, ezért elsősorban azokat az eseteket tárgyaljuk, amikor a testre ható összes erő (akár aktív, akár kényszererő) hatásvonala ugyanabba a síkba esik. A mérnöki szerkezetek nagy részénél ez elfogadható közelítést jelent.

## 1.7.2. Támasztás, görgős támasz

Két test érintkezésekor mindenképpen fellép olyan kényszererő komponens, ami meggátolja az érintkező felületek egymásba hatolását. Ez az erő *merőleges a felületek érintősíkjára*. A

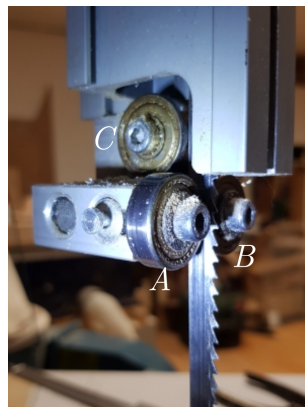
valóságban mindig fellép a felületekkel párhuzamos irányú súrlódási erő is (lásd 7.2. fejezet), de azt a támasznál elhanyagoljuk. Ezt az elhanyagolást kihangsúlyozza a támasz szokásos rajzjele is (lásd 1.54. ábra, (a)), mely egy görgőhöz hasonlít, ezért ezt a kényszert *görgős támasznak* is nevezik.



**1.54. ábra.** Hídszerkezet egy görgős (A) és egy csuklós (B) támasszal [A40, A41]

**1.15. megjegyzés:** Gyakran sima támasznak nevezik azt a kényszert, aminek az esetében elhanyagolják a súrlódási erőt. Ez az elnevezés tévesen azt sugallja, hogy két tökéletesen sima felület között nem lép fel súrlódási erő. A súrlódási erő azonban csak csekély mértékben függ a felületi érdességtől, és a nagyon sima felületek esetében éppenséggel nagy értékeket vehet fel az atomok, molekulák között ébredő erők miatt. ♣

Általában úgy tekintik, hogy a görgős támasz a felületre merőlegesen mindkét értelemben megakadályozza a megtámasztott pont elmozdulását, azaz ún. kétoldalú (bilaterális) kényszer. Ezt a valóságban legalább két görgővel érik el, mint az 1.55. ábrán. Ezt néha rajzban is mutatják (1.54. ábra, (b)). Az elmozdulást megakadályozó kényszererő szintén merőleges az érintkező felületre, és az aktív erőktől függően mindkét lehetséges irányítást felveheti.

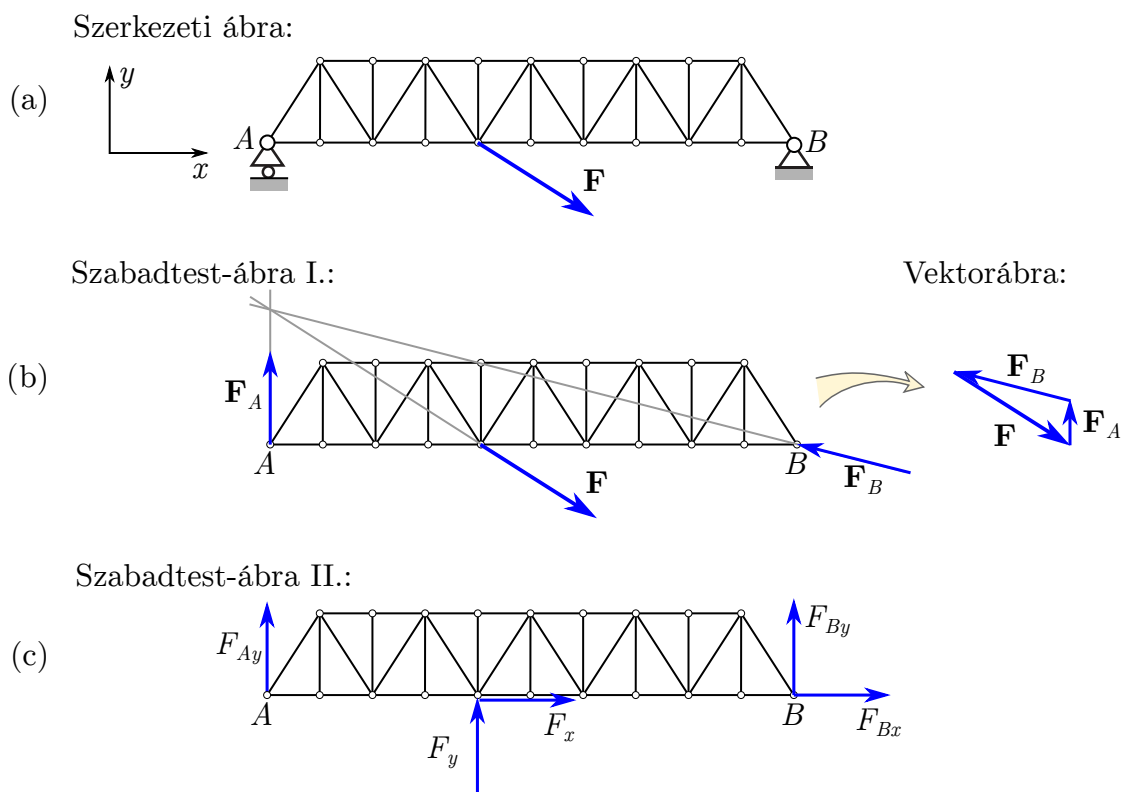


**1.55. ábra.** Három támasztógörgő egy szalagfűrészből. Az A és B görgők megakadályozzák a szalag oldalirányú elmozdulását – ezek együtt kétoldalú kényszernek tekinthetők –, a harmadik, C görgő pedig a szalag hátoldalát támasztja meg, de ez csak egyoldalú kényszer [A42]

Más esetekben azt tételezik fel, hogy a támasz nem akadályozza meg a két test eltávolodását, azaz egyoldalú (unilaterális) kényszerként kezelendő. Ha ez az eset áll fenn, az általában kiderül a feladat szövegéből. Unilaterális kényszer esetében – mint például az 1.45/a ábrán illusztrált, talajra helyezett doboz, vagy az 1.55. ábrán látható szalagfűrész  $C$  görgője esetében – a kényszererő csak a vizsgált test felé hathat a kényszerfelület felől.

A fentieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a támasztóerő nagysága nem, iránya viszont ismert, tehát egy ismeretlen skalármennyiséget jelent.

Az 1.56/a ábrán látható hídmodell esetében az  $A$  pontban görgős támasszal modellezzük a híd megtámasztását, ezért az ott ébredő  $\mathbf{F}_A$  erő iránya ismert: merőleges a talajra. Az  $\mathbf{F}_A$  erővektort ennek megfelelően tüntettük fel az 1.56/b szabadtest-ábrán. Érdeemes megjegyezni, hogy ez a szabadtest-ábrán felvett kényszererő ismeretlen, tehát irányítása (értelme) csak a megoldás későbbi lépései során derül ki.

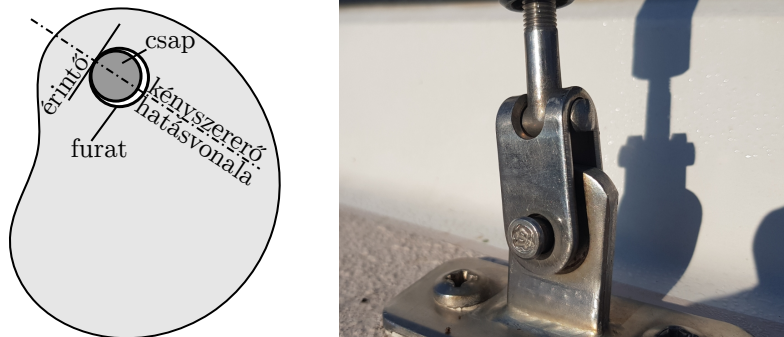


**1.56. ábra.** Hídra ható reakcióerők felvétele a szabadtest-ábrán, a kényszerek tulajdonságainak figyelembevételével

### 1.7.3. Síkcukló

A síkcukló (vagy egyszerűen csak csukló) is egyfajta súrlódásmentes támasztásnak tekinthető, ahol a támasztó test egy furatba helyezett hengeres csap, ahogy az 1.57. ábra mutatja. A támaszkodás a csap bármelyik alkotója mentén történhet, ahol – a súrlódás hatását elhanyagolva – az érintősíkra merőleges irányú, felületen megoszló erő ébred. A csap tengelye egy adott iránnyal párhuzamos marad és nem mozdulhat el a rá merőleges irányokban, de maga a csap elfordulhat a tengelye körül és el is mozdulhat a tengely irányában. A síkcuklót

az 1.54/c ábrán látható szimbólummal jelöljük. Síkcuklók találhatóak az 1.56. ábrán látható hídmodell csomópontjaiban, és a  $B$  pontban is. Sok esetben több csuklót is egybeépítenek, hogy több irányú elfordulást is lehetővé tegyenek (1.57. ábra).



**1.57. ábra.** Bal oldalon: a síkcuklóban ébredő kényszererő hatásvonalá átmegey a csap geometriai középpontján. Jobbra: Két síkcukló is látható a képen, melyek egymásra merőleges tengelyek menti elfordulásokat tesznek lehetővé [A43]

Síkfeladatokban nem foglalkozunk azokkal a kényszererőkkel, melyek megakadályozzák a csap tengelyének elfordulását, és a csap tengelyirányú elmozdulásától is eltekintünk. Ezekkel az egyszerűsítésekkel az alkotó mentén ébredő megoszló erőrendszer síkbeli feladatok esetében helyettesítő egy koncentrált erővel, ami az adott, a csapra merőleges síkban ébred. A fentiekből következően a csap tengelyére merőleges síkban bármilyen irányú és nagyságú lehet a reakcióerő, de *hatásvonalának át kell mennie a csap tengelyének középvonalán.* Tehát síkfeladatokban a síkcuklóban ébredő reakcióerő két ismeretlen skalármennyiséggel adható meg: az erő nagyságával és a hatásvonal adott irányával bezárt szögével, vagy az erővektor két koordinátájával.

Az 1.56/a ábrán látható hídmodell esetében a  $B$  pontban síkcuklóval modelleztük a híd megtámasztását. A fentiekből következően az  $\mathbf{F}_B$  kényszererő hatásvonalának át kell mennie a  $B$  ponton, iránya csak a többi erő ismeretében határozható meg. Az 1.56/b szabadtest-ábrán feltüntettük a hídra ható összes erőt. Feltéve, hogy a híd merev testként modellezhető, a reakcióerők meghatározása visszavezethető három erő egyensúlyára. Az 1.3. következmény miatt az egyensúlyhoz a három erő hatásvonalainak kell legyen egy közös metszéspontja és vektorháromszögüknek záródnak kell. Ezeket a feltételeket figyelembe véve, az  $\mathbf{F}$  erő ismeretében mindkét ismeretlen reakcióerő meghatározható.

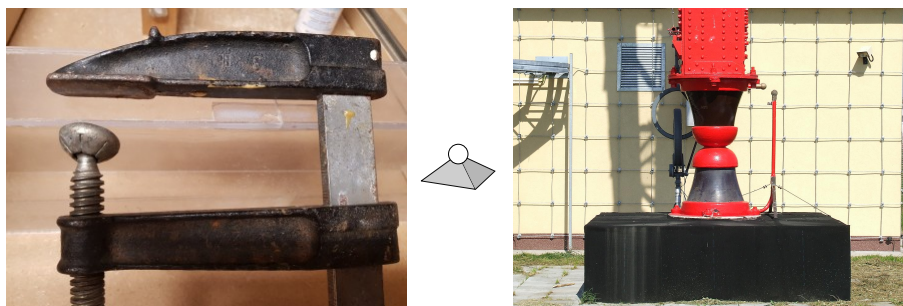
A szabadtest-ábrák többféleképpen is megrajzolhatók. Az 1.56/b ábrán az erővektorokat tüntettük fel. Ebben az esetben a nyilakat a feltételezett irányban rajzoltuk be, de az erők tényleges irányítása csak a szerkesztés elvégzése után derül ki. Az ilyen jellegű szabadtest-ábra elsősorban a szerkesztéses megoldást segíti.

Az 1.56/c ábrán az erők koordinátáit (skalárkomponenseit) tüntettük fel, ami a számításos megoldáshoz előnyös. Itt nagyon fontos, hogy az összes nyilat a koordináta-rendszer *pozitív* irányának megfelelően rajzoltuk be. Ez első pillantásra ellentmond annak, hogy az ismert  $\mathbf{F}$  erőnek láthatóan negatív az  $y$  koordinátája. Az a megfontolás áll emögött, hogy az ábrán feltüntetett skalárkomponensek pozitívak és negatívak is lehetnek, és úgy tekintjük, mintha ezekkel a skalárokkal szoroznánk meg a nyilakkal szimbolizált bázisvektorokat. Ennek megfelelően úgy tekintjük, hogy ha egy erő koordináta (pl.  $F_y$ ) negatív, az azt jelenti,

hogy a megfelelő komponens a nyíllal ellenkező irányba mutat. Pozitív érték mellett a nyíl értelmét nem kell megfordítani. Ezen a szabadtest-ábrán látható, hogy az  $A$  támasznál csak egy, míg a  $B$  csuklónál két ismeretlen kényszererő komponens vehető fel.

#### 1.7.4. Gömbcsukló

A gömbcsukló már térbeli kényszer: a test egy pontjának elmozdulását gátolja, de bármilyen irányú elfordulást megenged. A kényszererő hatásvonala a gömbcsukló középpontján halad át. Mivel sem iránya, sem nagysága nem ismert, három reakciókomponenssel adható meg.



**1.58. ábra.** Példák gömbcsuklóra. Balra: a pillanatszorító egyik befogópofája gömbcsuklóval kapcsolódik a menetes szárhoz [A44]. Jobbra: A Lakihegyi adótorony talpcsuklója [A45]. Középen: a gömbcsukló egy lehetséges rajzjele

#### 1.7.5. Kötél

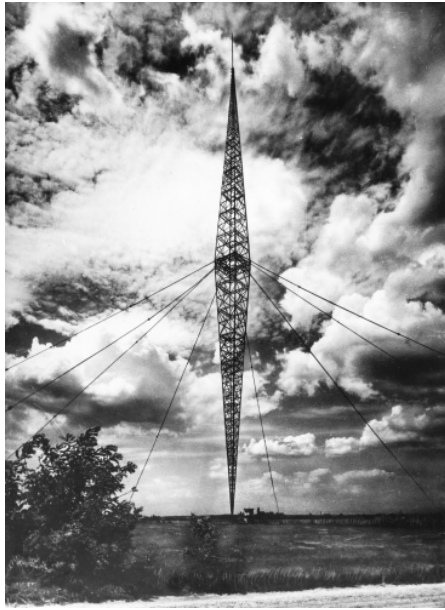
Köteleket számos területen használnak a műszaki gyakorlatban. Az egyik leggyakoribb felhasználási terület különféle szerkezetek, építmények rögzítése, de emellett bowdenként is használják (1.59. ábra).

Ha két test egy-egy pontját kötéllal összekötjük, azzal megakadályozzuk a pontok eltávolodását, de a közeledésük lehetséges marad. Ennek megfelelően a kötelet olyan testként modellezzük, ami nyújthatatlan, de sem hosszirányú nyomásnak, sem hajlításnak nem tud ellenállni, ezért csak húzóerőt képes felvenni. A kötélet két végén ható húzóerők csak akkor lehetnek egyensúlyban, ha egyenlő nagyságúak, ellentétes értelműek és hatásvonaluk a kötélet vonalába esik. Tehát egyetlen skalármennyiséggel megadható a kötélterő, ugyanúgy, mint a támasz esetében. A kötelet a rajzokon szaggatott vonal jelöli (lásd 1.60. ábra).

#### 1.7.6. Befogás

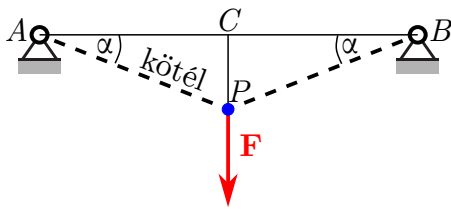
Sok esetben olyan módon kell rögzíteni egy testet, hogy az se elmozdulni, se elfordulni ne legyen képes. Ilyen esetekre láthatunk példákat az 1.61. ábrán, de az 1.64. ábrán mutatott fűrőgép tokmányába is úgy kell befogni a fűrőszárat, hogy az a tokmányhoz képest ne tudjon elmozdulni. Az ilyen rögzítést befogásként modellezzük. A befogást az 1.62. ábrán látható módon jelöljük.

A befogás minden irányú elmozdulást és elfordulást megakadályoz. Az elmozdulás megakadályozásához koncentrált reakcióerők szükségesek – például az 1.62. ábrán látható, síkbeli pél-

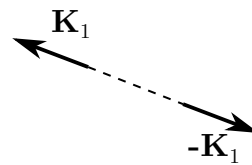


1.59. ábra. Balra: a Lakihegyi adótorony [A46]. Jobbra: kerékpár váltójának bowdeni [A47]

Szerkezeti ábra:



Az egyik kötélág szabadtest-ábrája:



1.60. ábra. Kötél jelölése szerkezeti ábrán, és a kötél szabadtest-ábrája

dában ezek az  $F_{Bx}$  és  $F_{By}$  skalárkomponensekkel megadható erők. Az elfordulás megakadályozásához szükséges erőrendszer modellezéséhez az 1.6.7. fejezetben említett terhelés típust kell bevezetnünk, amit *koncentrált erőpárnak* nevezünk, és a *nyomatékával* fogjuk jellemezni. Ezeket a fogalmakat a 2. fejezetben fogjuk részletesebben tárgyalni. A kényszer által kifejtett nyomatékot  $M$  jelöli. Általában egy alsó indexbe tett betű mutatja a kényszerkapcsolat helyét, például az 1.62. ábrán  $M_B$  jelöli a rúd befogott  $B$  keresztmetszeténél ébredő nyomatékot.

### 1.7.7. Csúszka

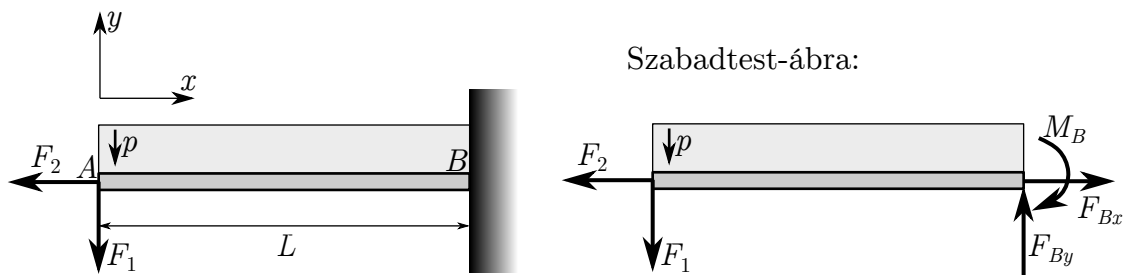
A csúszka olyan kényszer, ami egy adott irányú elmozdulást tesz lehetővé, de a másik két irányban megakadályozza az elmozdulást, továbbá minden irányú elfordulást is kizár.

A csúszkánál ébredő kényszererő-rendszer térben két reakcióerővel és három nyomatékkal adható meg, síkbeli feladatokban egy erő és egy nyomaték kell a megadásához, mint az 1.63. ábrán látható példában. Csúszkát számos gépben használnak; néhány példát az 1.64. ábra mutat. A csúszka az 1.53. ábrán látható módon is jelölhető.





1.61. ábra. Példák befogással modellezhető kapcsolatokra [A48, A49]

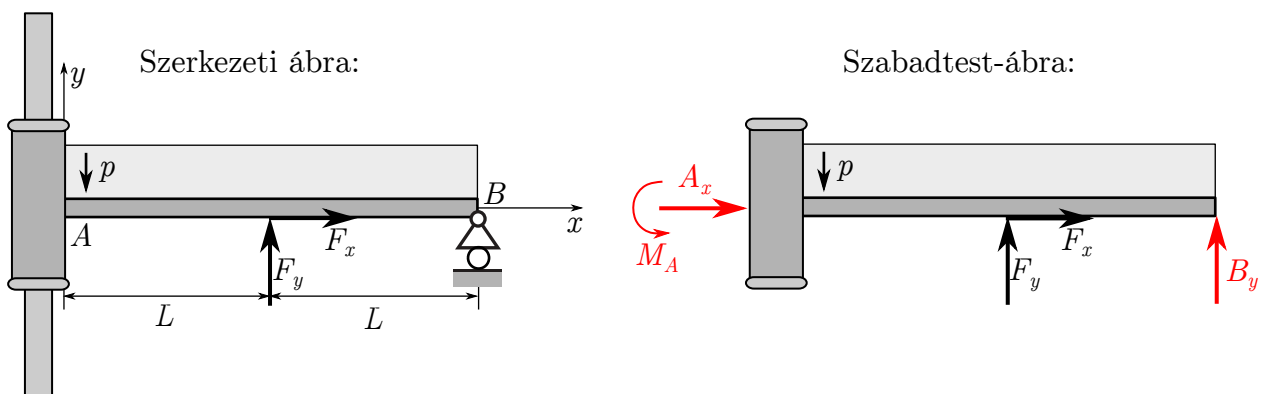


1.62. ábra. Koncentrált és megoszló erővel is terhelt, a B keresztmetszetben befogott rúd

### 1.7.8. Kétcsuklós kényszer

A kötéltől hasonló, de a húzás mellett nyomásnak is ellenálló kényszert kapunk, ha egy tetszőleges alakú test

- két darab csuklóval kapcsolódik a környezetéhez,
- nem éri más terhelés, csak ami a csuklókról átadódik,
- egyensúlyban van.



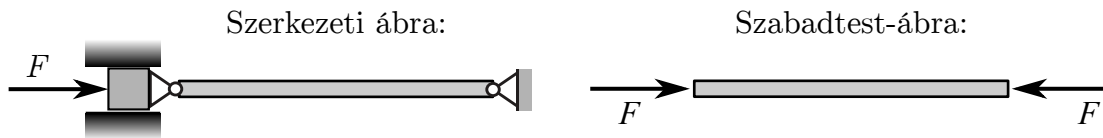
1.63. ábra. Egyik végén csúszkával, másik végén görgővel megtámasztott, megoszló erőrendszerrel terhelt rúd



**1.64. ábra.** Csúszkával modellezhető kapcsolatok: kerékpár teleszkópos első vilája, oszlopos fűrőgép, gérvágó készülék megvezetése körfűrészben [A50]

Ez esetben a két erő egyensúlyával foglalkozó 2. alapelv szerint a csuklókban ébredő erők hatásvonala átmegy mindkét csukló középpontján (térbeli feladatnál gömb-, síkfeladatnál síkcsuklóra kell gondolni).

A leggyakoribb esetben egy egyenes rúdként modellezhető test két végén helyezkednek el a csuklók, melyekben rúdírányú erők ébrednek, mint az 1.65. ábrán. A két végén csuklóval kapcsolódó, más terhelésnek nem kitett, egyensúlyban lévő rudat *statikai rúd* nevezük.



**1.65. ábra.** Statikai rúd

Statikai rúdként modellezhető az 1.56. ábrán látható hídmodell azon rúdjai is, melyeket *csak a csuklókban ér terhelés*. A statikai rudakról, és az ilyen rudakból összeállítható ún. rácsos szerkezetekről a 4.2. fejezetben lesz szó.

## 2. fejezet

# Síkbeli erőrendszerek

A statika alapelvei alapján már vizsgálható egy merev testre ható tetszőleges erőrendszer egyensúlya, illetve meghatározható az erőrendszer eredője, *feltéve, hogy az erők hatásvonalai egy pontban metszik egymást*. Ebben a fejezetben azokat az eseteket vizsgáljuk meg, amikor nem teljesül ez a feltétel. Egyelőre azzal a gyakorlat számára fontos esettel foglalkozunk, amikor az erőrendszert alkotó vektorok hatásvonalai ugyanabba a síkba esnek.

Az 1.6. fejezetben láttuk, hogy az egy síkba eső, nem párhuzamos erővektorok hatásvonalai metszik egymást, ezért az erőket azonos támadáspontba tolhatjuk, és így meghatározhatjuk az eredőjüket (1.43. ábra). Ezt használtuk ki az 1.3. következmény tárgyalása során is, ahol három, egy síkba eső erő egyensúlyát vizsgáltuk. Ha több erő is van az adott síkban, akkor ezzel a módszerrel párosával meg lehet határozni az erők részeredőit míg végül egyetlen erő marad, tehát ez az eset is kezelhető az eddig bevezetett módszerek segítségével. Ahogy az eddigiekben is tettük, a szerkezeti ábrán a részeredők támadáspontjait, a vektorábrákon pedig a részeredők vektorait szerkesztjük meg (2.1. ábra). Előre bocsátjuk, hogy a 2.4. és 2.5. fejezetekben megismerkedünk majd egy olyan módszerrel, amivel ennél hatékonyabban lehet kiváltani az eredeti erőrendszert egy egyszerűbb erőrendszerrel.

### 2.1. Két párhuzamos erő eredője

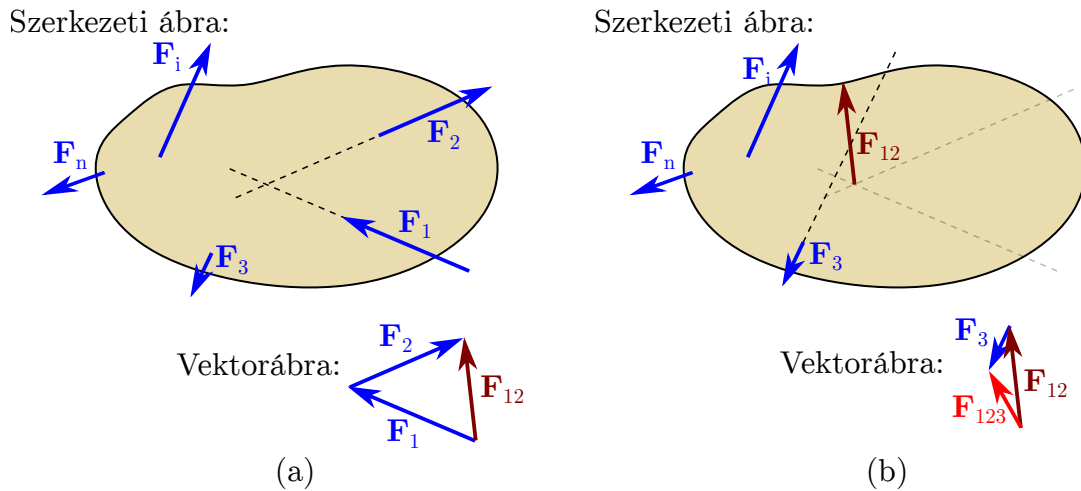
Az előző fejezetben az erővektorok párosával történő összegzésére leírt módszer nem használható abban az esetben, ha két (vagy több) *párhuzamos*, de különböző hatásvonalú erővektor eredőjét szeretnénk meghatározni. Ennek az esetnek a kezeléséhez elegendő két párhuzamos erő esetét megvizsgálni, mert ha azok helyettesíthetők egy eredő erővel, akkor a következő lépésben ezt a részeredőt kell megfelelően hozzáadni az esetleges harmadik erőhöz.

#### 2.1.1. Azonos értelmű erők

Ha a vizsgált  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erő nemcsak párhuzamos, hanem azonos értelmű is, akkor a 2.2. ábra szerint szerkeszthető meg az  $\mathbf{F}_e$  eredőjük.

A szerkesztés lépései a következők:

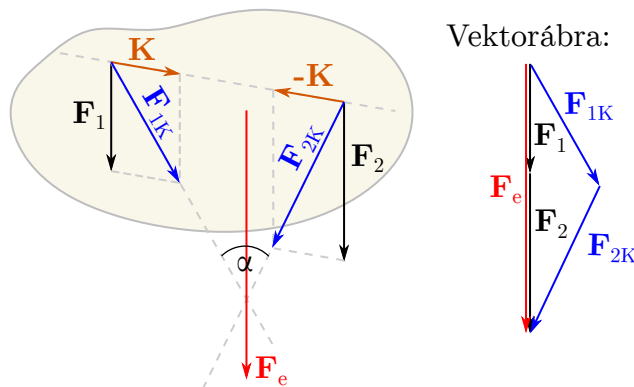
1. A 3. alapelv szerint az erőrendszer hatását nem változtatja meg, ha hozzáadunk egy tetszőleges  $\mathbf{K}$  erőből és egy vele azonos hatásvonalú  $-\mathbf{K}$  erőből álló, önmagában egyen-



**2.1. ábra.** (a): A merev testre ható  $F_1$  és  $F_2$  erők helyettesíthetők a két vektor hatásvonalának metszéspontjában támadó  $F_{12}$  erővel. (b): Az  $F_{12}$  és  $F_3$  erők helyettesíthetők a hatásvonalaik metszéspontjában támadó  $F_{123}$  erővel. Ehhez hasonló lépésekkel addig csökkenthető a síkbeli erőrendszert alkotó vektorok száma, amíg találunk metsződő hatásvonalú vektorokat

súlyban lévő erőrendszert. Ezeknek az erőknek a hatásvonalát úgy választjuk meg, hogy az illeszkedjen mind az  $F_1$ , mind az  $F_2$  erő támadáspontjára.

2. A  $K$  erő támadáspontját eltolhatjuk az  $F_1$  támadáspontjába, a  $-K$  erő támadáspontját pedig  $F_2$  támadáspontjába. Ezt a helyzetet ábrázoltuk a 2.2. ábrán.
3. Azonos támadáspontú erők eredője megszerkeszthető a paralelogramma-szabály alapján. Így kapjuk az  $F_{1K} = F_1 + K$  és  $F_{2K} = F_2 - K$  erővektorokat.
4.  $F_{1K}$  és  $F_{2K}$  hatásvonalai metszik egymást,  $F_e$  eredőjük hatásvonalja tehát ezen a metszésponton fog áthaladni. A  $K$  és  $-K$  erők nagyságát érdemes úgy megválasztani, hogy  $F_{1K}$  és  $F_{2K}$  hatásvonalai által bezárt kisebbik szög (amit az ábrán  $\alpha$  jelöl) lehetőleg a  $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  tartományba essen, hogy a metszéspont könnyen leolvasható



**2.2. ábra.** Két párhuzamos és azonos értelmű erő eredőjének szerkesztése. A bal oldali szerkezeti ábrán halványan jelöltük azt a merev testet, amire az erők hatnak

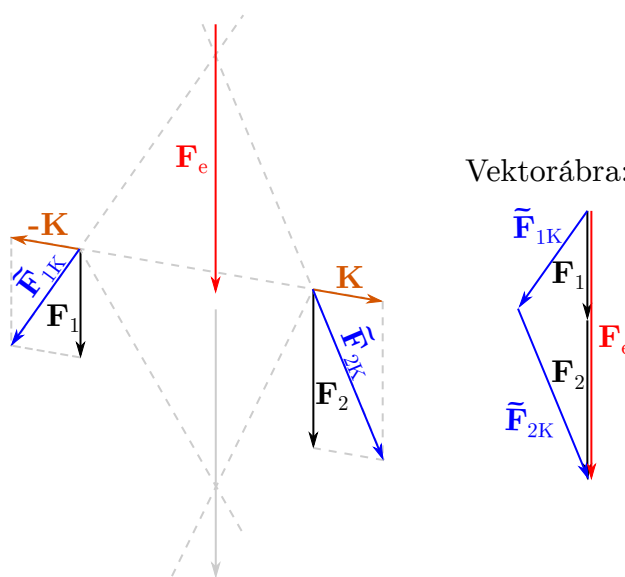
legyen.

5. Az eredő erő  $\mathbf{F}_e$  vektora a 2.2. vektorábra szerint szerkeszthető meg. Az

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_{1K} + \mathbf{F}_{2K} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{K} + \mathbf{F}_2 - \mathbf{K} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \quad (2.1)$$

összefüggésből következik, hogy az eredőnek párhuzamosnak kell lennie az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erőkkel.

Természetesen ugyanezt az eredőt kapjuk akkor is, ha  $\mathbf{F}_1$ -hez adjuk hozzá  $(-\mathbf{K})$ -t és  $\mathbf{F}_2$ -höz a  $\mathbf{K}$  vektort. Az ennek megfelelő szerkesztést a 2.3. ábra mutatja, ahol a jobb áttekinthetőség kedvéért a merev testet már nem ábrázoltuk a szerkezeti ábrán, és így járunk el a fejezet hátralévő részében is. A vázolt módszer akkor is használható, ha az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$



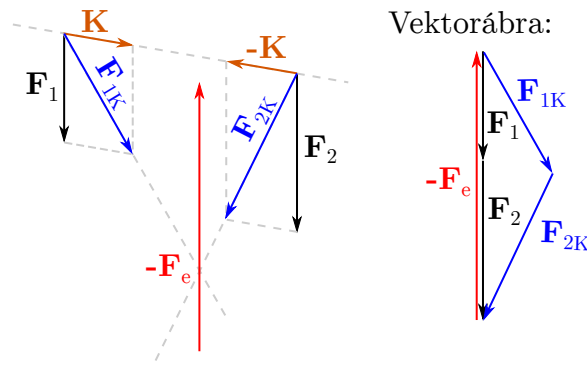
**2.3. ábra.** Két párhuzamos és azonos értelmű erő eredőjének szerkesztése (az előzőleg kapott eredmény is fel van tüntetve az ábrán halvány vonalakkal)

erők nem párhuzamosak, de hatásvonalaik metszéspontja nagyon távoli pontban található. A  $\mathbf{K}$  vektor nagysága tetszőleges lehet; úgy célszerű megválasztani, hogy segítse az eredő megszerkesztését.

**2.16. megjegyzés:** A fenti szerkesztésből még egy fontos eredmény következik: ha három párhuzamos hatásvonalú erő *egyensúlyának* feltételét akarjuk meghatározni, akkor a  $\mathbf{K}$  és  $-\mathbf{K}$  erők felvételével három *nem párhuzamos* hatásvonalú erővel helyettesíthetjük az erőrendszert, így alkalmazhatjuk az 1.3. következményt. Például ha adottak az egymással párhuzamos  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők, és meg kell keresni azt az erőt, ami ezekkel egyensúlyt tart, akkor az előzőekben ismertetett módon megszerkesztett  $\mathbf{F}_e$  eredő erő *ellentettjét* kell hozzávenni az erőrendszerhez, hogy teljesüljön az egyensúly, a 2.4. ábrának megfelelően.

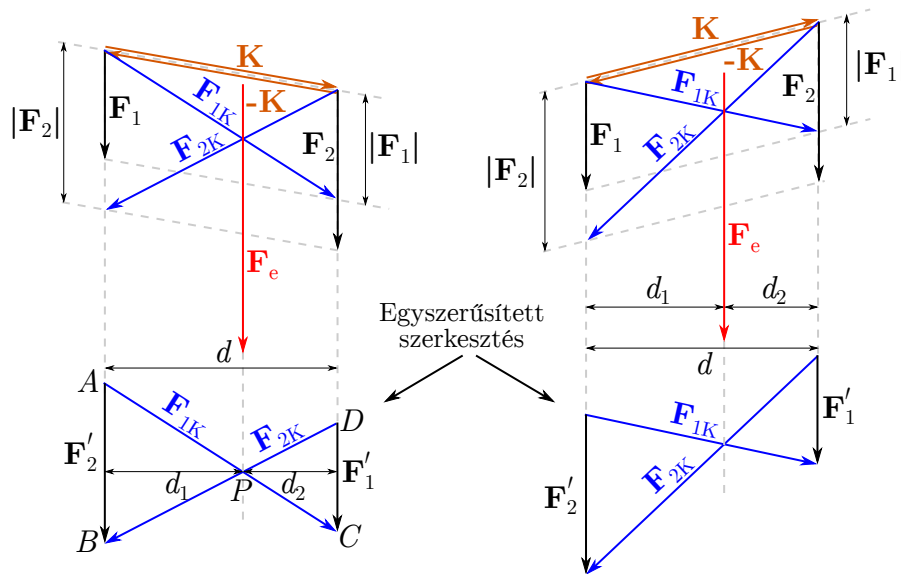
A 2.5. ábrán olyan esetek szerkezeti ábráit vázoltuk, mikor a  $\mathbf{K}$  erő nagyságát úgy választottuk meg, hogy az adott lépték szerint éppen összekösse  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  támadáspontját.<sup>1</sup> Mivel

<sup>1</sup>Ehhez a szerkesztéshez a szerkezeti ábrán is léptékhelyesen kell ábrázolni az erővektorokat. A léptéknek nem feltétlenül kell megegyeznie a vektorábrán felvett erőléptékkel, csak az a fontos, hogy az erőket jelképező nyilak hossza arányos legyen az erők nagyságával.



**2.4. ábra.** Ha adott két párhuzamos és azonos értelmű erő, akkor az eredőjük ellentettjét, a  $(-\mathbf{F}_e)$  vektort hozzávéve az erőrendszerhez, egyensúlyi erőrendszert kapunk

$\mathbf{F}_1$  is és  $\mathbf{F}_2$  is eltolható a hatásvonala mentén, a különböző eltolásokhoz különböző irányú  $\mathbf{K}$  vektorok adódnak, de az  $\mathbf{F}_e$  eredő vektort ez nem befolyásolja: amint a 2.5. ábrán is látható, az eredő hatásvonala az  $\mathbf{F}_{1K} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{K}$  és  $\mathbf{F}_{2K} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{K}$  vektorok metszéspontján halad át mindkét esetben.



**2.5. ábra.** Az eredő hatásvonalának szerkesztése, mikor a  $\mathbf{K}$  erő nagyságát úgy választjuk meg, hogy az adott erőlépték szerint éppen összekösse  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  támaszpontját

Megfigyelhető, hogy ezek a vektorok úgy metszik egymást, hogy  $\mathbf{F}_{1K}$  kezdőpontja és  $\mathbf{F}_{2K}$  végpontja között éppen  $\mathbf{F}_2$  nagyságának megfelelő,  $\mathbf{F}_{2K}$  kezdőpontja és  $\mathbf{F}_{1K}$  végpontja között pedig  $\mathbf{F}_1$  nagyságának megfelelő a távolság. Ez azt jelenti, hogy a szerkesztés egyszerűbben is elvégezhető:

1. Mindkét erőt átmásoljuk a *másik erő* hatásvonalára, hogy kijelöljük azokat a pontokat, ahová az  $\mathbf{F}_{1K}$  és  $\mathbf{F}_{2K}$  vektorok kezdő- és végpontjai kerülnek. Mivel az erők hatásvonal

menti eltolása nem befolyásolja az eredőt, az adott hatásvonalon bárhová felrajzolhatók ezek az átmásolt,  $\mathbf{F}'_1$ -vel és  $\mathbf{F}'_2$ -vel jelölt erők.

2.  $\mathbf{F}'_1$  és  $\mathbf{F}'_2$  kezdő- és végpontjait összekötjük, azaz megszerkesztjük  $\mathbf{F}_{1K}$  és  $\mathbf{F}_{2K}$  hatásvonalát. Ezek metszéspontján kell áthaladnia az eredő hatásvonalának.
3. Az eredő nagyságának meghatározásához megszerkesztjük  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  eredőjét a háromszögszabály alapján, a 2.2. ábrán vázolt módon.
4. Az  $\mathbf{F}_e$  eredőt a szerkesztésből kapott hatásvonalra helyezzük, tetszőleges helyre.

Az erővektorok átmásolása után kiadódó hasonló háromszögek ( $ABP$  és  $CDP$  a 2.5. ábrán) mutatják, hogy az eredő hatásvonala a két erő hatásvonala között helyezkedik el, és a *nagyobbik erő hatásvonalához van közelebb*. Az ezen az elven végzett szerkesztés során a  $\mathbf{K}$  és  $-\mathbf{K}$  erők berajzolása el is hagyható. Elegendő, ha az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők hatásvonalán tetszőleges helyen felvesszük a másik erő vektorát, és az így kapott vektorok kezdő- és végpontjait keresztben összekötjük. Ez az egyszerűsített szerkesztés is látható a 2.5. ábrán.

A hatásvonal helyét számítással is meghatározhatjuk. Jelölje az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők hatásvonalainak távolságát  $d$ , az eredő hatásvonalának távolsága e két hatásvonaltól pedig legyen  $d_1$  illetve  $d_2$ ! A 2.5. ábrán látható  $ABP$  és  $CDP$  háromszögek hasonlósága alapján

$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_2|} = \frac{d_2}{d_1}, \quad (2.2)$$

tehát

$$|\mathbf{F}_1|d_1 = |\mathbf{F}_2|d_2. \quad (2.3)$$

Ez azt jelenti, hogy az erő nagysága és az eredő hatásvonalától mért távolsága között *fordított arányosság* áll fenn. Figyelembe véve, hogy  $d = d_1 + d_2$ , a fenti egyenlet átírható:

$$|\mathbf{F}_1|d_1 = |\mathbf{F}_2|(d - d_1) \equiv |\mathbf{F}_2|d - |\mathbf{F}_2|d_1, \quad (2.4)$$

amiből meghatározható az  $\mathbf{F}_e$  eredő hatásvonalának  $\mathbf{F}_1$  hatásvonalától (és egyúttal az átmásolt,  $\mathbf{F}'_2$  hatásvonalától) mért távolsága:

$$(|\mathbf{F}_1| + |\mathbf{F}_2|)d_1 = |\mathbf{F}_2|d \Rightarrow d_1 = \frac{|\mathbf{F}_2|}{|\mathbf{F}_1| + |\mathbf{F}_2|}d. \quad (2.5)$$

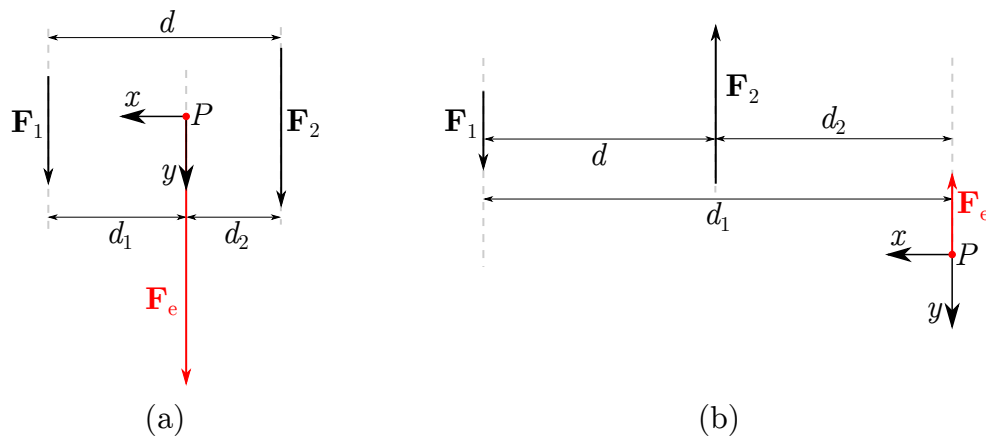
A fordított arányosságra vonatkozó (2.3) feltételt érdemes kifejezni az erővektorok koordinátáinak segítségével is. A 2.6/a ábrán felvettünk egy  $(x, y)$  koordináta-rendszert az eredő hatásvonalának  $P$  pontjában. Bár szokatlan lehet a tengelyek irányítása, a koordináta-rendszer felvételénél elsősorban azt kell figyelembe vennünk, hogy egyszerűsítse a feladat megoldását. Ebben az esetben az erők irányításához igazítottuk az  $y$  tengelyt, mert így  $F_{1y} = |\mathbf{F}_1| > 0$  és  $F_{2y} = |\mathbf{F}_2| > 0$ . A (2.3) egyenletet átírhatjuk az alábbi alakba:

$$|\mathbf{F}_1|d_1 - |\mathbf{F}_2|d_2 = 0 \Rightarrow F_{1y}d_1 - F_{2y}d_2 = 0. \quad (2.6)$$

A felvett koordináta-rendszerben  $d_1 \equiv x_1$  az  $\mathbf{F}_1$  erő hatásvonalának,  $-d_2 \equiv x_2$  pedig  $\mathbf{F}_2$  hatásvonalának  $x$  koordinátája. Ezekkel az új jelölésekkel

$$F_{1y}x_1 + F_{2y}x_2 = 0. \quad (2.7)$$

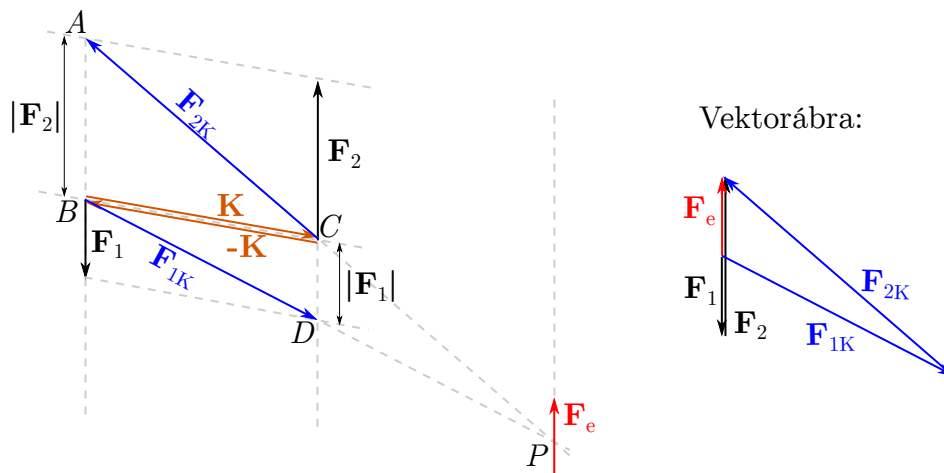
Tehát az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők  $y$  koordinátáinak *súlyozott összege* zérus, ha a súlyok az erők hatásvonalainak az eredő hatásvonalától mért előjeles távolság koordinátái.



**2.6. ábra.** Párhuzamos erők és az eredő hatásvonalának kapcsolata egyező irányítású (a) és ellentétes (b) erők esetében

### 2.1.2. Ellentétes értelmű erők eredője

Az előző fejezetben bemutatotthoz hasonló a szerkesztés menete akkor is, ha ellentétes értelműek az erők. Ebben az esetben is felvehetünk egy azonos hatásvonalú  $\mathbf{K}$  és  $-\mathbf{K}$  erőkből



**2.7. ábra.** Két párhuzamos és ellentétes értelmű erő eredőjének szerkesztése, mikor a  $\mathbf{K}$  erő nagyságát úgy választjuk meg, hogy az adott erőlépték szerint éppen összekösse  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  támadáspontját

álló erőrendszert, és képezhetjük az  $\mathbf{F}_{1K} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{K}$  és  $\mathbf{F}_{2K} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{K}$  erővektorokat, ahogy a 2.7. ábrán látható. Ezeknek a vektoroknak már nem párhuzamos a hatásvonalja, ezért a két hatásvonal  $P$  metszéspontja megszerkeszthető. Ezen a ponton kell áthaladnia az eredő hatásvonalának. Az eredő vektorának szerkesztése a háromszögszabály szerint tehető meg:  $\mathbf{F}_1$  kezdőpontjából felmérjük  $\mathbf{F}_1$ -et, majd annak végpontjából  $\mathbf{F}_2$ -t. Az eredő  $\mathbf{F}_1$  kezdőpontjából  $\mathbf{F}_2$  végpontjába mutat. Ugyanazt az eredőt kapjuk  $\mathbf{F}_{1K}$  és  $\mathbf{F}_{2K}$  összegzésével is:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_{1K} + \mathbf{F}_{2K}. \quad (2.8)$$

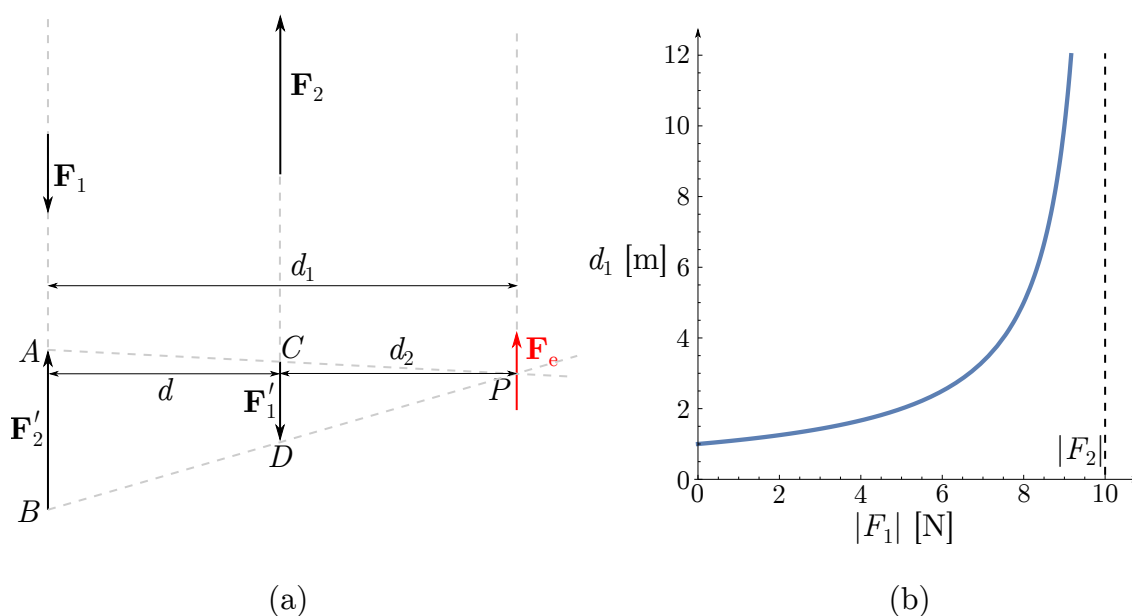
Az eredő ebben az esetben is párhuzamos az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erőkkel.



Ezúttal is találhatunk hasonló háromszögeket a 2.7. ábrán: az  $ABP$  és  $CDP$  háromszögeket. Az  $ABP$  háromszög  $\mathbf{F}_1$  hatásvonalára eső oldala  $|\mathbf{F}_2|$  hosszúságú, míg a  $CDP$  háromszög  $\mathbf{F}_2$  hatásvonalára eső oldala  $|\mathbf{F}_1|$  hosszúságú.

Ebből következően, most is követhetjük az azonos értelmű vektorok esetére kidolgozott szerkesztési eljárást, amit a 2.8. ábrán szemléltetünk:

1. Mindkét erőt átmásoljuk a másik erő hatásvonalára. Mivel az erők hatásvonal menti eltolása nem befolyásolja az eredőt, az adott hatásvonalon bárhová helyezhetők az erők. Jelölje az átmásolt erőket  $\mathbf{F}'_1$  és  $\mathbf{F}'_2$ !
2.  $\mathbf{F}'_1$  és  $\mathbf{F}'_2$  kezdő- és végpontjait összekötjük, amivel megkapjuk  $\mathbf{F}_{1K}$  és  $\mathbf{F}_{2K}$  hatásvonalát. Ezeket a vektorokat külön nem jelöltük a 2.8/a ábrán, csak a hatásvonalait, amiknek a metszéspontján kell áthaladnia az  $\mathbf{F}_e$  eredő hatásvonalának.
3.  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  eredőjét megszerkesztjük a háromszögszabály alapján, a 2.7. ábrán vázolt módon.
4. Az  $\mathbf{F}_e$  eredőt a szerkesztésből kapott hatásvonalra helyezük, tetszőleges helyre.



**2.8. ábra.** (a) Az eredő hatásvonalának szerkesztése az erővektoroknak a másik erő hatásvonalára történő felvételével, két párhuzamos és ellentétes értelmű erő esetében. (b) Az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_e$  erők hatásvonalainak  $d_1$  távolsága  $F_1$  nagyságának függvényében ( $d = 1$  m,  $|F_2| = 10$  N)

A szerkesztés alapján látszik, hogy az eredő hatásvonala a két erő hatásvonala által határolt tartományon kívülre esik, a *nagyobb erő oldalára*.

Az eredő helyének számításal történő meghatározása is az előző esethez hasonlóan végezhető el: a 2.8. ábrán látható  $ABP$  és  $CDP$  háromszögek hasonlósága alapján

$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{|\mathbf{F}_2|} = \frac{d_2}{d_1}, \quad (2.9)$$

tehát most is fordított arányosságot kapunk:

$$|\mathbf{F}_1|d_1 = |\mathbf{F}_2|d_2. \quad (2.10)$$

Figyelembe véve, hogy  $d_2 = d_1 - d$ , a fenti egyenlet átírható:

$$|\mathbf{F}_1|d_1 = |\mathbf{F}_2|(d_1 - d) \equiv |\mathbf{F}_2|d_1 - |\mathbf{F}_2|d, \quad (2.11)$$

amiből kifejezhető az eredő  $d_1$  távolsága  $\mathbf{F}_1$  hatásvonalától:

$$(|\mathbf{F}_1| - |\mathbf{F}_2|)d_1 = -|\mathbf{F}_2|d \Rightarrow d_1 = \frac{|\mathbf{F}_2|}{|\mathbf{F}_2| - |\mathbf{F}_1|}d. \quad (2.12)$$

Ebben az esetben is teljesül, hogy az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők  $y$  koordinátáinak súlyozott összege zérus, ha a súlyok az erők hatásvonalainak az eredő hatásvonalától mért előjeles távolság koordinátái. A 2.6/b ábra szerint  $F_{1y} = |\mathbf{F}_1| > 0$ ,  $F_{2y} = -|\mathbf{F}_2| < 0$ ,  $d_1 \equiv x_1 > 0$ , és  $d_2 \equiv x_2 > 0$ . Ezeket az előjeleket figyelembe véve a (2.10) egyenletben, arra jutunk, hogy

$$F_{1y}x_1 + F_{2y}x_2 = 0, \quad (2.13)$$

ugyanúgy, mint azonos értelmű erők esetében. A 2.2. fejezetben be fogjuk látni, hogy ez annak felel meg, hogy az eredő hatásvonalának pontjaira az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők összegzett nyomatéka nulla.

**2.17. megjegyzés:** A (2.5) és (2.12) egyenletek alapján a fordított feladat is megoldható, amikor hatásvonalával és vektorával adott az  $\mathbf{F}_e$  erő, az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erőknek viszont csak a hatásvonala ismert, és ezeknek az erőknek a nagyságát keressük. A hatásvonalak elhelyezkedése megadja, hogy azonos vagy ellentétes értelműek-e az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők, és szintén a hatásvonalak elhelyezkedése alapján határozható meg a  $d_1$ ,  $d_2$  és  $d$  távolságok. Például ha  $\mathbf{F}_e$  hatásvonalának két eltérő oldalán van a másik két hatásvonal, akkor két azonos értelmű erőre bonthatjuk fel az  $\mathbf{F}_e$  erőt. Ezek nagyságának meghatározásához két egyenletet használhatunk fel: az egyik (2.5), a másik pedig  $|\mathbf{F}_e| = |\mathbf{F}_1| + |\mathbf{F}_2|$ . Ellentétes értelmű erők esetében ezeket a képleteket értelemszerűen kell módosítani. ♣

### 2.1.3. Az erőpár

Fontos speciális eset, amikor a két párhuzamos és ellentétes értelmű erő nagysága megegyezik.

**2.1. definíció.** *A két egyenlő nagyságú, azonos irányú, de ellentétes értelmű és különböző hatásvonalú erővektorból álló erőrendszert erőpárnak nevezzük (2.9. ábra).* ♠

A (2.12) képlet szerint minél kisebb a különbség  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  nagysága között, annál távolabb kerül az eredő hatásvonala  $\mathbf{F}_1$  hatásvonalától (2.8/b ábra). Abban a speciális esetben, amikor erőpárral állunk szemben, azaz  $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| \equiv F$ , a két erő eredője nullvektor:  $\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$ , aminek a hatásvonala a képlet alapján a végtelenben van:  $d_1 \rightarrow \infty$ . Ezt az eredményt a következőképpen értelmezhetjük:

**2.1. következmény.** *Két egyenlő nagyságú, azonos irányú, de ellentétes értelmű és különböző hatásvonalú erővektor – azaz erőpár – nem helyettesíthető egyetlen erővel.* ♠



2.9. ábra. Gépkocsi kormánykerékére ható erőpár [A51]

Bár az erőpárt alkotó két erő vektori összege zérus, a 2. alapelv szerint nem lehetnek egyensúlyban, mert nem azonos a hatásvonaluk – tehát az erőpárnak mindenképpen van valamilyen hatása, de ez más jellegű, mint amit egy erő fejt ki. A hétköznapi tapasztalat szerint egy merev testre ható erőpárnak *forgató* hatása van. Ezt a forgató hatást a 7. alapelv alapján az erőpár  $M = Fd$  nyomatékával jellemezhetjük.

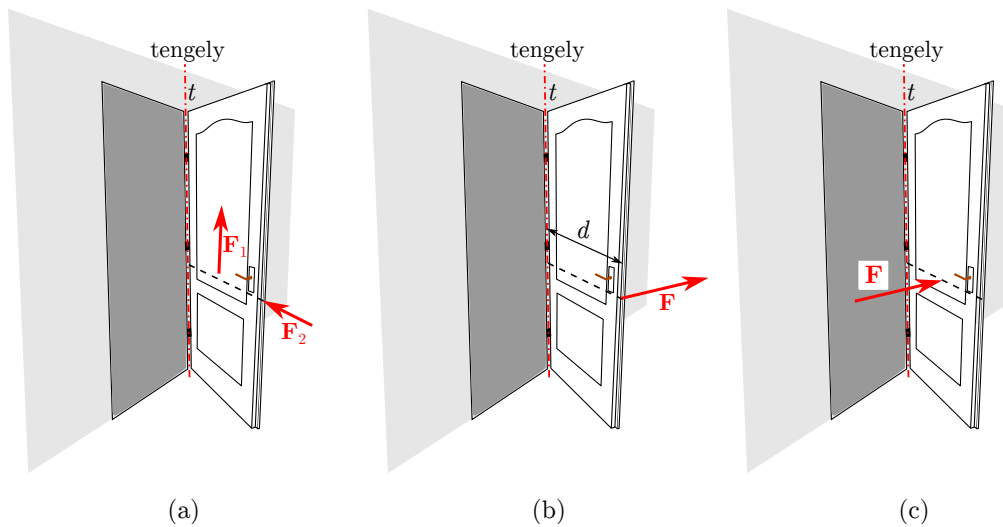
**2.18. megjegyzés:** Az erőpár forgató hatását hangsúlyozva a fizika tudomány szakirodalmában általában *forgatónyomatékról* beszélnek nyomaték helyett. A mérnöki szóhasználatban ez ritkábban használatos, ebben a jegyzetben is többnyire nyomatéknak fogjuk nevezni az erőrendszerek forgató hatását jellemző mennyiséget. Azonban szilárdságtani számításokhoz kapcsolódóan be fogjuk vezetni a 6. fejezetben rudak keresztmetszeteinek ún. első és másodrendű nyomatékait, melyek definíciója formailag hasonlít a forgatónyomaték definíciójához. A keresztmetszet és az erőrendszer nyomatékának világos megkülönböztetése érdekében néhány esetben mi is használni fogjuk a forgatónyomaték elnevezést. ♣

Nemcsak az erőpárokhoz, hanem az erőkhöz is rendelhetünk nyomaték értéket. A következő fejezetben az erő tengelyre számított nyomatékát vezetjük be, mert ez alapján részletesebben tárgyalhatjuk majd az erőpárok tulajdonságait a 2.3. fejezetben.

## 2.2. Erő tengelyre számított nyomatéka

A 2.10. ábrán egy ajtó látható, amire különféle irányú erők hatnak. Mindennapi tapasztalat, hogy az ajtót nem tudjuk kinyitni olyan  $\mathbf{F}_1$  erővel, ami a pántok által kijelölt  $t$  forgástengellyel párhuzamos, azaz ebben a példában függőleges. Forgató hatást tehát csak a tengelyre merőleges erőkomponenssel érhetünk el. Azonban az ilyen, tengelyre merőleges erőknek sincs forgató hatásuk, ha hatásvonaluk áthalad a tengelyen. Ilyen az  $\mathbf{F}_2$  erő a 2.10/a ábrán. Ebből arra következtethetünk, hogy az  $\mathbf{F}$  erő forgató hatása függ attól, hogy mekkora a hatásvonalának távolsága a tengelytől. Ezt a távolságot – amit  $d$  jelöl a 2.10/b és 2.11. ábrákon – *erőkarnak* nevezzük.

Természetesen nemcsak az erőkar, hanem a kifejtett  $\mathbf{F}$  erő nagyságát növelve is nagyobb forgató hatást érhetünk el. A tapasztalatok szerint tehát a forgató hatás az erő és az erőkar szorzatával jellemezhető.



**2.10. ábra.** (a) Az ajtó nem nyitható ki vagy csukható be a  $t$  tengellyel párhuzamos  $\mathbf{F}_1$ , vagy a tengelyen áthaladó hatásvonalú  $\mathbf{F}_2$  erővel. (b) Forgató hatást a tengelyre merőleges síkba eső  $\mathbf{F}$  erővel tudunk elérni, aminek a hatásvonala  $d > 0$  távolságra van a tengelytől. (c) Ha az erőkarot csökkentjük, a forgató hatás arányosan csökken

**2.2. definíció.** Egy erő  $t$  tengely körüli forgató hatását az erő tengelyre számított  $\mathbf{M}_t$  nyomatékával jellemezzük. A nyomaték nagysága

$$|\mathbf{M}_t| = Fd, \quad (2.14)$$

ahol  $F$  az erő tengelyre merőleges komponensének nagysága,  $d$  pedig az erő hatásvonalának tengelytől mért távolsága, az erőkar.

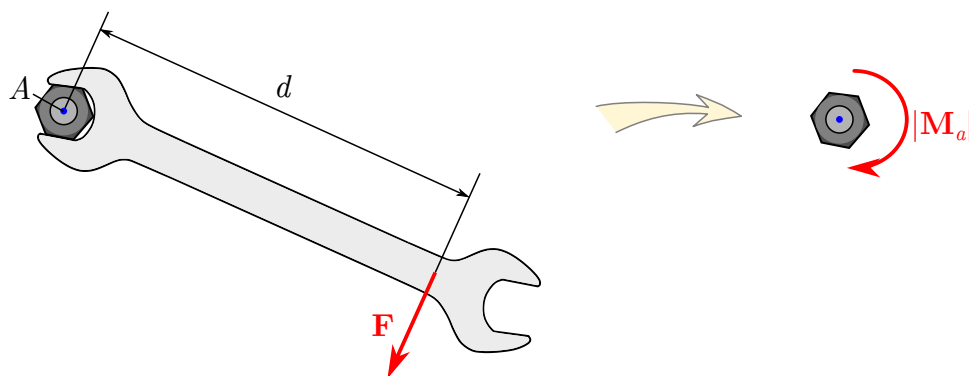
A nyomatékot nemcsak nagysága, hanem iránya is jellemzi: a tengely iránya. A nyomaték irányítását megállapodás szerint a 2.12. és 2.13. ábrákkal illusztrált jobbkéz-szabály szerint értelmezzük, és így bevezethető a nyomatékvektor fogalma. A  $t$  tengelyre számított nyomaték vektorát vastag betűvel ( $\mathbf{M}_t$ ) jelöljük, hogy megkülönböztessük a skalár értékű  $M_t$  nyomatéktól. A nyomaték mértékegysége Nm (newtonméter). ♠

A fenti definíció szerint tehát a tengelyre számított nyomaték nulla, ha

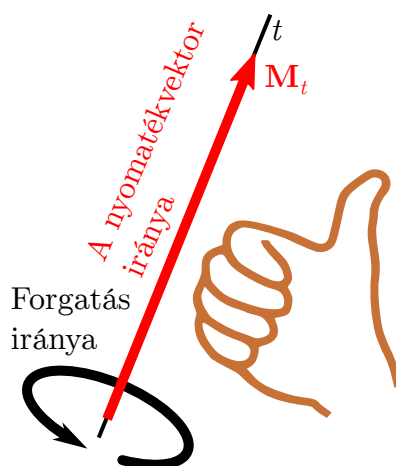
- az erő nulla vagy
- az erőkar nulla vagy
- az erő párhuzamos a tengellyel.

Bizonyos esetekben – elsősorban síkfeladatokban – a tengelyt egy  $A$  pontjával adják meg, mint a 2.11. ábrán. Ekkor magát a tengelyt kis  $a$  betűvel, a megfelelő nyomatékot pedig  $\mathbf{M}_a$ -val szokás jelölni.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Megállapodás szerint a geometriai pontokat nagy betűkkel, az egyeneseket – például tengelyeket – kis betűkkel jelölik. A tengely és pontja természetesen tetszőleges betűvel jelölhető, nem csak  $a$ -val illetve  $A$ -val.



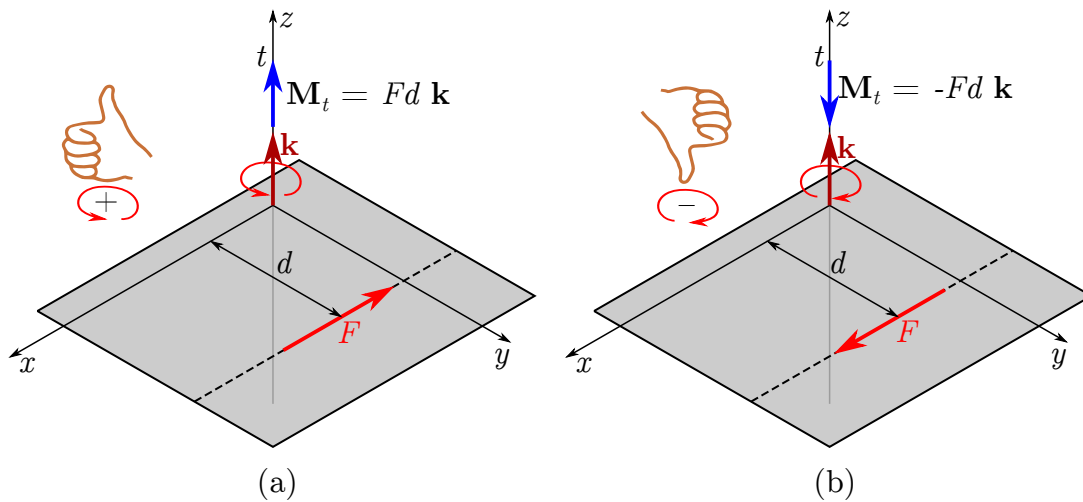
**2.11. ábra.** Csavaranya meghúzása villáskulccsal. A tengely most a csavarnak az ábra síkjára merőleges irányú,  $A$  ponton áthaladó a szimmetriatengelye. A villáskulccsal kifejtett forgató hatást kétféleképpen tudjuk növelni: vagy az  $F$  erő nagyságát növeljük, vagy a  $d$  erőkart



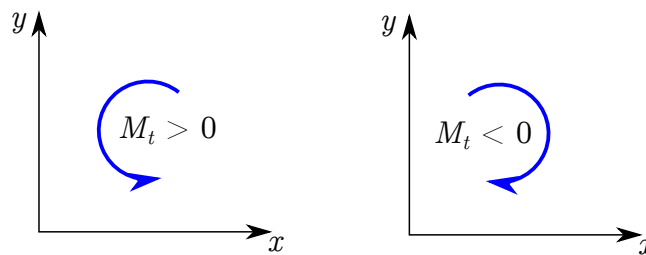
**2.12. ábra.** A nyomaték irányításának értelmezése a jobbkéz-szabály alapján

Érdeemes megjegyezni, hogy ún. *pontra számított nyomatékot* is értelmezünk (lásd 3.1. fejezet), ami az ebben a fejezetben tárgyalt, tengelyre számított nyomaték fogalmának általánosítása. A pontra számított nyomaték nagyságát és irányát egy vektoriális szorzat (8.4. definíció) segítségével számíthatjuk ki.

Sok feladatban azonos síkba eső erők hatását vizsgáljuk (lásd 2.4. fejezet). Ezekben az esetekben célszerű az erők által kijelölt síkban felvenni a koordináta-rendszer  $x$  és  $y$  tengelyeit, és csak ebben az  $xy$  síkban lerajzolni a szerkezetet és az erőket. A nyomaték tengelye és vektora ekkor a  $z$  tengellyel párhuzamos, tehát a  $z$  koordinátája – mint előjeles skalármennyiség – tökéletesen jellemzi a kifejtett forgató hatást. Ekkor a nyomaték *pozitív irányítását* az óramutató járásával *ellentétes* irányú íves nyíl, míg a *negatív nyomatékot* az óramutató járásával *egyező* irányú nyíl jelöli, a 2.14. ábrán látható módon. Síkfeladatokban mindig előjeles skalárnak fogjuk tekinteni a tengelyre számított nyomatékot. Például a 2.13/a ábrán látható esetben  $M_t = Fd$ , a 2.13/b ábrán pedig  $M_t = -Fd$ . Az így értelmezett skaláris nyomatékból a tengely irányát megadó egységvektor segítségével kifejezhetjük a nyomaték



**2.13. ábra.** A nyomaték irányításának értelmezése: az (a) esetben a nyomatékvektor  $z$  koordinátája pozitív, a (b) esetben negatív. Az ábrán látható esetben a nyomaték  $t$  tengelye egybeesik a koordináta-rendszer  $z$  tengelyével



**2.14. ábra.** A nyomaték irányításának megadása a  $t$  tengelyre merőleges síkon

vektorát, például

$$\mathbf{M}_t = M_t \mathbf{k} \quad (2.15)$$

alakban.

**2.19. megjegyzés:** Ahogy az 1.4.2. fejezetben már említettük, ahhoz, hogy vektornak tekinthessük a nyomatéket, nem elég, hogy nagysága, iránya és értelme legyen: ehhez még azt is be kell látni, hogy a paralelogrammaszabály szerint adhatók össze.

Azonos síkban ébredő erők esetében a nyomatékek azonos irányúak, tehát az eredő számítása a nyomatékek előjeles összegzésének feleltethető meg. Párhuzamos erők esetében már láttunk erre példát: a 2.5. ábrán látható esetben az  $\mathbf{F}_1$  erőnek a  $P$  ponton áthaladó, az ábra síkjára merőleges  $p$  tengelyre számított nyomatéka

$$M_{p1} = |\mathbf{F}_1|d_1, \quad (2.16)$$

az  $\mathbf{F}_2$  erő nyomatéka pedig ugyanerre a tengelyre

$$M_{p2} = -|\mathbf{F}_2|d_2. \quad (2.17)$$

A  $p$  tengelyre számított összes nyomaték tehát

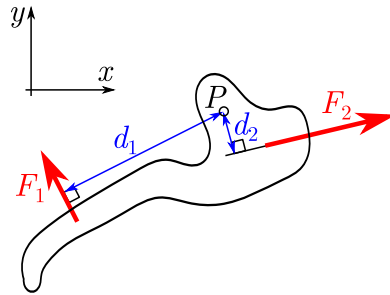
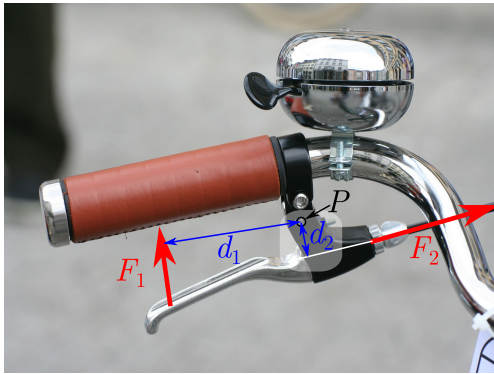
$$M_p = |\mathbf{F}_1|d_1 - |\mathbf{F}_2|d_2, \quad (2.18)$$

ami a (2.3) egyenlet miatt nulla.

Ugyanezt az eredményt kapjuk a 2.8. ábrán látható esetben is, a (2.10) egyenlet alapján. Tehát a párhuzamos erők az eredő hatásvonalának  $P$  pontján átmenő tengelyre ugyanakkora nagyságú, de ellentétes irányú forgató hatást fejtenek ki, amik kiejtik egymást. Pontosan azért lehet oda helyezni az eredőt, mert annak is nulla a nyomatéka a  $P$  ponton átmenő tengelyre. Ezt fejezi ki a (2.13) egyenlet is. Következésképpen párhuzamos erők nyomatékvektorai előjelesen összegezhetők, azaz ebben az esetben nem sérül a vektori összeadás szabálya. ♣

**2.1. példa:** A 2.15. ábrán egy kerékpár fékkarja látható, mely a  $P$  ponton áthaladó tengely körül tud elfordulni. A fékkar működési elve az egyik egyszerű gép, az emelő elvén alapul. A kerékpáros a tengelytől  $d_1$  távolságban  $F_1$  erőt fejt ki. Mekkora legyen az  $F_1$  erő, ha ismert, hogy a hatékony fékezéshez a bowdent  $F_2$  nagyságú erővel kell megfeszíteni, és a bowden által a fékkarra kifejtett erő hatásvonala  $d_2$  távolságra van a tengelytől?

Adatok:  $d_1 = 6$  cm,  $d_2 = 2$  cm,  $F_2 = 150$  N.



**2.15. ábra.** Az emelő elve: kerékpár fékkarja [A52], és a rá ható erők

### Megoldás:

A fékkar egyensúlyi helyzetében a két erő  $P$  ponton áthaladó tengelyre kifejtett nyomatékai kiegyenlítik egymás hatását. Az ábrán felvett koordináta-rendszerben mindkét nyomaték  $z$  irányú, és a 2.14. ábrán látható előjelszabály szerint az  $F_1$  erő  $M_{p1}$  nyomatéka negatív, az  $F_2$  erő által kifejtett  $M_{p2}$  nyomaték pedig pozitív. A  $z$  irányú  $\mathbf{k}$  egységvektorral felírva az eredő nyomatékvektort:

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{M}_{p1} + \mathbf{M}_{p2} = -F_1 d_1 \mathbf{k} + F_2 d_2 \mathbf{k} = (F_2 d_2 - F_1 d_1) \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (2.19)$$

Az előjeles skaláris nyomatékokkal számolva

$$M_p = M_{p2} + M_{p1} = F_2 d_2 - F_1 d_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2 \frac{d_2}{d_1} = 50 \text{ N}. \quad (2.20) \quad \spadesuit$$

## 2.3. Az erőpár tulajdonságai

### 2.3.1. Az erőpár nyomatéka

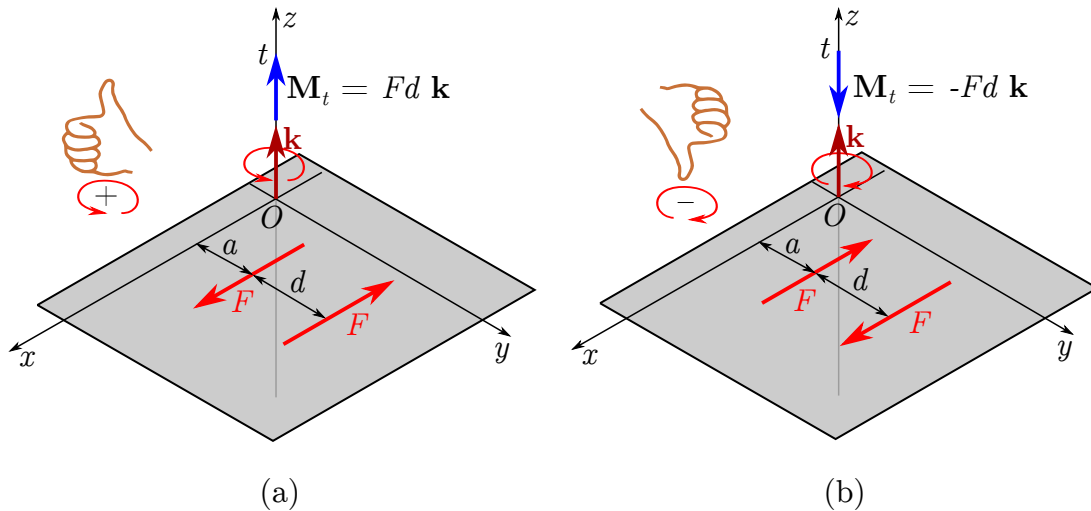
A vektorösszeadás szabályai szerint (lásd 2.19. és 3.22. megjegyzések) egy *erőpár* nyomatékát kiszámíthatjuk két erő nyomatékának összegzésével. A 2.16. ábrán az erőpárt alkotó két  $F$  nagyságú erő hatásvonalának távolsága  $d$ , és az  $x$  tengelytől  $a$  távolságban húzódik az egyik erő hatásvonalára. Az (a) ábrán látható esetben az  $O$  ponton áthaladó  $t$  tengelyre (egyúttal a  $z$  tengelyre) számított nyomaték

$$M_t = F(a + d) - Fa = Fd, \quad (2.21)$$

míg a (b) esetben

$$M_t = -F(a + d) + Fa = -Fd. \quad (2.22)$$

Látható, hogy az erőpár nyomatéka csak az erők nagyságától és hatásvonalaik távolságától



2.16. ábra. Erőpár nyomatéka

függ; nem függ az  $a$  mérettől és az  $O$  ponttól, azaz attól, hogy a két erő *hol* helyezkedik el a síkban. Ezért egy *erőpár nyomatékának* megadásakor elhagyható a pontra illetve tengelyre utaló index: jelölhetjük  $M$ -mel.

**2.2. következmény.** *Az erőpár nyomatéka nem változik, ha az erővektorokat a síkjukban eltoljuk.* ♠

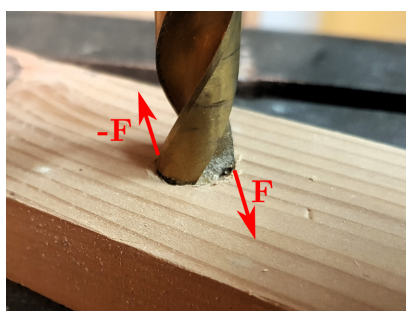
Mivel egy önmagában lévő erőpár tovább nem egyszerűsíthető (lásd 2.1. következmény), ezt külön terhelésnek fogjuk fel, és külön kell foglalkoznunk a tulajdonságaival. Ehhez felhasználjuk a statika 7. alapelvét, amit itt újra kimondunk:

**2.3. tétel.** *Erőpárok egyenértékűsége. Két, ugyanarra a merev testre ható erőpár egyenértékű, ha egyenlő a nyomatékvektoruk.* ♠



Ebből következik, hogy külön-külön sem az erőpárt alkotó erők nagysága, sem irányuk, sem hatásvonaluk távolsága nem számít, az erőpár hatását a nyomatéka tökéletesen jellemzi.<sup>3</sup> Tehát egy erőpár a síkjában eltolható, elforgatható, a síkjával párhuzamos másik síkba is áthelyezhető, és a hatása nem változik, hiszen a nyomatékvektora ugyanaz marad. Ez azt jelenti, hogy az erőpárt jellemző nyomaték *szabad vektor*: nem köthető egy adott tengelyhez, mint a hatásvonalához kötött erővektor (lásd 1.7. megjegyzés).

Az erőpár eltolhatóságát például fúrás során figyelhetjük meg. A fúrást úgy modellezzük, hogy a fúrószárra merőleges síkban a két élről közel azonos nagyságú, ellentétes erők adódnak át a munkadarabra, a 2.17. ábra szerint. Bárhol is fúrjuk meg a munkadarabot, az erőpár forgató hatása ugyanúgy jelentkezik, ezért is fontos a munkadarab megfelelő rögzítése.



2.17. ábra. Fúrószár által a munkadarabra kifejtett erőpár [A53]

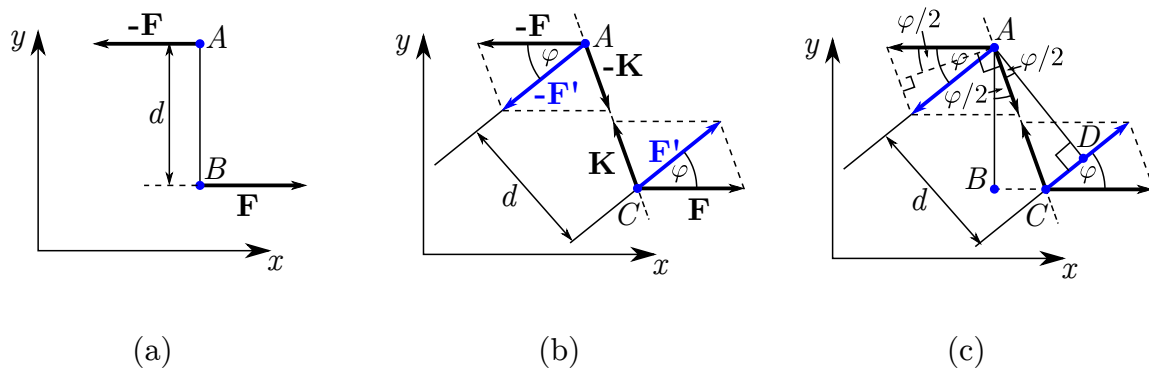
**2.3. következmény.** Mivel az erőpár nyomatékát az erők nyomatékainak összegeként állítottuk elő, két erőpár eredője is számítható, a nyomatékok összegzésével. ♠

**2.20. megjegyzés:** A korábban kimondott alapelvekből is levezethető, hogy az erőpár a síkjával párhuzamosan eltolható és síkjában elforgatható.

- Merev testen ható erők a hatásvonaluk mentén eltolhatók, és hatásuk nem változik meg. Ebből következik, hogy az erőpár hatása sem változik, ha a két erővektort eltoljuk a hatásvonalakkal párhuzamosan. Tehát például úgy is eltolhatók az erők, hogy az  $A$  illetve  $B$  támadáspontjaikat összekötő szakasz merőleges legyen az erővektorokra, mint a 2.18/a ábrán.
- Az erőpárról az is belátható a korábban kimondott elvek alapján, hogy a síkjában elforgatva hatása nem változik meg. Ha ugyanis az erőpárt alkotó  $\mathbf{F}$  és  $-\mathbf{F}$  vektorokat valamilyen  $\varphi$  szöggel elforgatott, de ugyanakkora nagyságú  $\mathbf{F}'$  és  $-\mathbf{F}'$  vektorokkal akarjuk helyettesíteni a 2.18/b ábrának megfelelően, akkor a következőképpen járhatunk el:
  1. Az első lépésben megkeressük azt a  $\mathbf{K}$  és  $-\mathbf{K}$  vektort, melyekkel  $\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \mathbf{K}$  és  $|\mathbf{F}'| = |\mathbf{F}|$  (következésképpen  $-\mathbf{F}' = -\mathbf{F} - \mathbf{K}$  és  $|\mathbf{F}'| = |-\mathbf{F}'|$ ). Ez a vektor a  $\mathbf{K} = \mathbf{F}' - \mathbf{F}$  összefüggés alapján megszerkeszthető, hiszen  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{F}'$  is ismert, és  $\mathbf{K}$  az  $\mathbf{F}$  végpontjából  $\mathbf{F}'$  végpontjába mutató vektorral egyező nagyságú és irányú.

<sup>3</sup>Korábban éppen a forgató hatás jellemzésére vezettük be a nyomaték fogalmát, de azt nem bizonyítottuk, hogy két erőpár fizikai hatása ténylegesen megegyezik, ha egyenlő a nyomatékuk. Ezt bizonyítani a statika keretein belül nem is tudjuk, ezért kell alapelveként kimondani a 2.3. tételt.

2. Az  $\mathbf{F}$  és  $-\mathbf{F}$  vektorokat úgy toljuk el a hatásvonalaik mentén, hogy támadáspontjaik egy  $\mathbf{K}$ -val párhuzamos egyenesre essenek – ezt a helyzetet mutatja a 2.18/b ábra.
3. Az eredeti vektorokhoz hozzáadva a  $\mathbf{K}$  illetve  $-\mathbf{K}$  erőket, azok nem befolyásolják az erőrendszer hatását, hiszen egyensúlyi erőrendszert alkotnak. Tehát az eredeti  $\mathbf{F}$  és  $-\mathbf{F}$  erők helyettesíthetők az elforgatott  $\mathbf{F}'$  és  $-\mathbf{F}'$  vektorokkal (2.18/b ábra).
4. Mivel  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{F}'$  (illetve  $-\mathbf{F}$  és  $-\mathbf{F}'$ ) azonos nagyságú, egy egyenlő szárú háromszöget alkotnak, aminek a szimmetriatengelyére merőleges a  $\mathbf{K}$  és a  $-\mathbf{K}$  hatásvonal. Ezért az  $AB$  és  $AC$  szakaszok szöge  $\varphi/2$ , tehát az  $AC$  távolság  $\overline{AC} = \overline{AB} / \cos(\varphi/2) \equiv d / \cos(\varphi/2)$ . Az  $\mathbf{F}'$  és  $-\mathbf{F}'$  vektorokra merőleges  $AD$  szakasz szintén  $\varphi/2$  szöget zár be  $AC$ -vel, ezért annak hossza  $\overline{AD} \cos(\varphi/2) = d$ . Tehát az erőpár vektorainak a távolsága az elforgatás során nem változik.



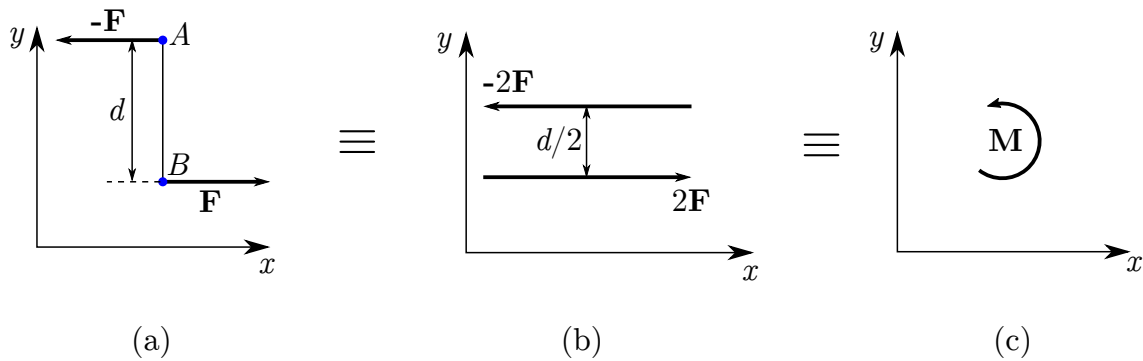
2.18. ábra. Erőpár elforgatása

A fenti gondolatmenet szerint az erőpár egyenértékűen helyettesíthető egy ugyanakkora nyomatékú, ugyanabba a síkba eső, de tetszőleges támadáspontú másik erőpárral. Az viszont nem következik a fentiekből, hogy az erőpár a síkjára merőlegesen is eltolható, ezért kellett kimondani a 7. (illetve 2.3.) alapelvet. ♣

### 2.3.2. Koncentrált erőpár

A 2.3. tétel szerint egy  $\mathbf{F}$  és  $-\mathbf{F}$  erőkből álló,  $d$  erőkarú erőpár helyettesíthető egy olyan erőpárral, melyben kétszer akkora nagyságú erők szerepelnek, fele akkora erőkarral, ahogy a 2.19. ábra mutatja. Az erők nagyságának növelése és hatásvonalaik közelítése elvileg minden határon túl folytatható, így a két erő támadáspontjai egymáshoz tetszőlegesen közeli pontokba helyezhetők. Mivel a merev testre ható erőpárok hatása egyértelműen jellemezhető  $\mathbf{M}$  nyomatékukkal, célszerű bevezetni a *koncentrált erőpár* fogalmát. A koncentrált erőpár esetében nem foglalkozunk azzal, hogy pontosan milyen erőrendszer fejt ki az  $\mathbf{M}$  nyomatékot. Úgy tekintjük, mintha az erőpár is egy önálló terhelés lenne, ami a merev test bármely pontjában támadhat.

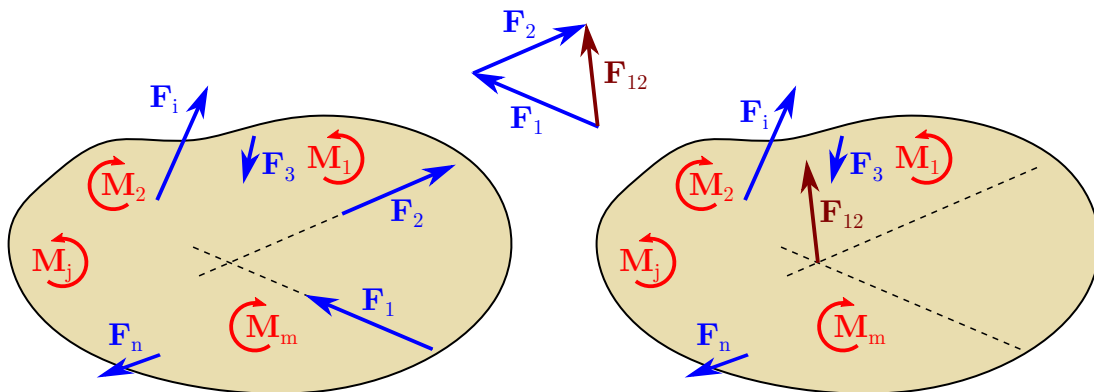
Erőpár nemcsak terhelésként fordulhat elő, hanem a kényszererő-rendszer részeként is, például a befogás (lásd 1.7.6. fejezet, 1.62. ábra, és 4.2. példa) esetében.



2.19. ábra. A koncentrált erőpár

## 2.4. Közös síkú erők és erőpárok eredője

Ha egy merev testre közös síkba eső  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  koncentrált erők és  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_m$  koncentrált erőpárok hatnak – mint ahogy a 2.20. ábra szemlélteti –, az erők és az erőpárok eredői az előzőekben leírtak szerint, vektori összegzéssel számíthatók (lásd 1. alapelv és 2.3. következmény).



2.20. ábra. Egy merev testre ható síkbeli erőrendszer, mely  $n$  darab koncentrált erőből és  $m$  darab koncentrált erőpárból áll. Külön vektorábra mutatja az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erővektorok összegzését

Az eredő erő vektora és a koncentrált erőpárok nyomatékainak vektori összege:

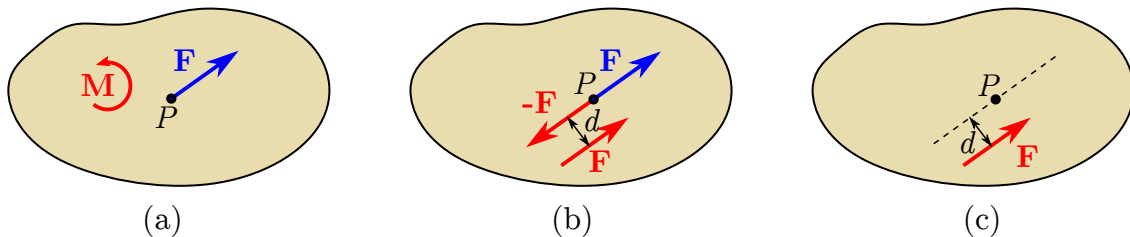
$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad (2.23)$$

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j. \quad (2.24)$$

Az  $\mathbf{M}$  nyomaték által jellemzett erőpár bárhol kifejtetheti hatását a merev testen, ezért a koncentrált erőpárok összegzéséhez nincs szükség további számításokra vagy szerkesztési lépésekre: az  $\mathbf{M}$  nyomatékú erőpárral egyenértékűen helyettesíthető az összes koncentrált erőpár.

Az  $\mathbf{F}$  eredő erő teljes megadásához azonban annak *hatásvonalát* is meg kell határozni. Például az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők 2.20. ábrán berajzolt hatásvonalainak metszéspontján halad át e két erő  $\mathbf{F}_{12}$  eredőjének hatásvonala, az 1.6. fejezetben leírtak szerint. Az  $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$  erő és az  $\mathbf{F}_3$  eredőjének hatásvonalának helye hasonlóan szerkeszthető meg, és ez az eljárás folytatható, amíg találunk metsződő hatásvonalú erőket (lásd 2.1. ábra). Ha csak párhuzamos hatásvonalú erők maradnak, akkor két eset van: ha ezek az erők azonos nagyságúak és ellentétes értelműek, akkor helyettesíthetők egy koncentrált erőpárral, amit hozzávehetünk az  $\mathbf{M}$  nyomatékban figyelembe vett erőpárokhoz. Ha a párhuzamos erők nem alkotnak erőpárt, akkor pedig a 2.1. fejezet alapján lehet a hatásvonalat meghatározni. Tehát a koncentrált erők is helyettesíthetők egyetlen, jól meghatározott hatásvonalú eredő erővel.

Így tehát egy  $\mathbf{F}$  erőből és egy  $\mathbf{M}$  nyomatékú erőpárból álló erőrendszert kapunk, ahogy a 2.21/a ábra mutatja. Lehetséges, hogy az egyik vektor nullvektor, azaz végeredményül csak egyetlen koncentrált erő vagy egyetlen koncentrált erőpár adódik. Síkbeli erőrendszer esetében azonban akkor is van mód további egyszerűsítésre, ha egyik vektor sem nulla nagyságú. Megmutatható, hogy ekkor az erőrendszer egyetlen koncentrált erővel helyettesíthető.



**2.21. ábra.** Egy koncentrált erőből és koncentrált erőpárból álló síkbeli erőrendszer helyettesítése egyetlen koncentrált erővel

**2.4. tétel.** Egy koncentrált erőből és koncentrált erőpárból álló síkbeli erőrendszer helyettesíthető egyetlen koncentrált erővel. Ennek az erőnek a hatásvonalát centrális egyenesnek nevezik.

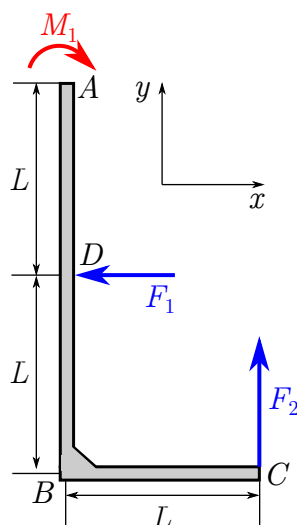
#### Bizonyítás:

A tétel belátásához helyettesítsük a koncentrált erőpárt egy olyan erőpárral, ami egy  $\mathbf{F}$  illetve egy  $-\mathbf{F}$  erőből áll! A két hatásvonal  $d$  távolsága akkora kell legyen, hogy a megfelelő nagyságú nyomaték adódjon, azaz  $M = Fd$  miatt  $d = M/F$ . Ezt az erőpárt bárhová helyezhetjük a merev testen, ezért eltolhatjuk úgy is, hogy az erőpárhoz tartozó  $-\mathbf{F}$  erő és az eredeti  $\mathbf{F}$  erő közös támadáspontba kerüljön (2.21/b ábra). Ezek a közös támadáspontú erők egyensúlyi erőrendszert alkotnak, így eltávolíthatók. Tehát egyetlen  $\mathbf{F}$  erő marad, aminek a hatásvonala  $d$  távolságra található az eredeti erő  $P$  támadáspontjától (2.21/c ábra). ♠

Általános, térbeli erőrendszerek esetében is értelmezhető a centrális egyenes fogalma; erről a témáról a 3.6. fejezetben lesz szó.

**2.2. példa:** Határozzuk meg a 2.22. ábrán látható törtvonalú rúdra ható erőrendszer centrális egyenesét!

Adatok:  $F_1 = 300$  N,  $F_2 = 400$  N,  $M_1 = 250$  Nm,  $L = 0,5$  m.



2.22. ábra. Törtvonalú rúdra ható erők vizsgálata

**Megoldás:**

Az eredő erő vektora az  $(x, y, z)$  koordináta-rendszerben:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -300 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N} + \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N} = \begin{bmatrix} -300 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N}. \quad (2.25)$$

Ennek az erőnek az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  vektorok hatásvonalainak  $P$  metszéspontjában van a támadáspontja, ahogy a 2.23. ábrán látható. Az eredő erő nagysága  $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 500 \text{ N}$ . Három vagy több koncentrált erő esetében ehhez az erőhöz kellene hozzáadni a harmadik, illetve további erőket, minden lépésben meghatározva a közös támadáspontot.

Koncentrált erópár csak egy hat a vizsgált testre, ami az  $xy$  síkra merőleges, és az előjelkonvenció szerint negatív, tehát

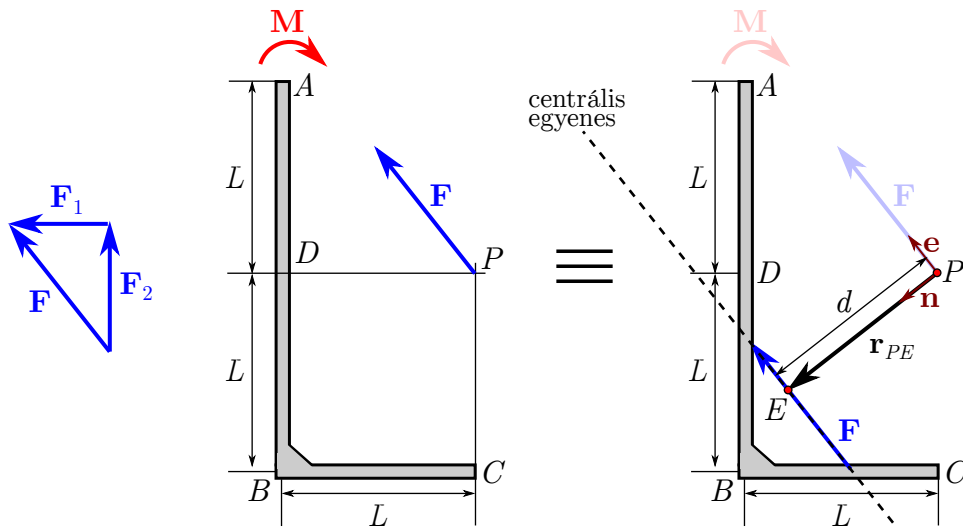
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{bmatrix} \text{ Nm}. \quad (2.26)$$

Az  $\mathbf{F}$  erőből és  $\mathbf{M}$  erópárból álló erőrendszer tovább egyszerűsíthető: az  $\mathbf{F}$  erő hatásvonalát  $d = M/F$  távolsággal eltolva, az új hatásvonalra – a *centrális egyenesre* – került erő hatása egyenértékű az eredeti hatásvonalon elhelyezkedő erő és az erópár együttes hatásával. A feladat adataival a centrális egyenes távolsága a  $P$  ponttól  $d = M/F = 250 \text{ Nm}/500 \text{ N} = 0,5 \text{ m}$ . A centrális egyenes az  $\mathbf{F}$  erővel párhuzamos, ezért irányvektora

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{F}}{F} = \begin{bmatrix} -0,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

A centrális egyenes egy  $E$  pontjának helyét megadja egy  $P$  pontból felvett  $d$  hosszúságú, az  $\mathbf{F}$  erőre – és az  $\mathbf{e}$  irányvektorra – merőleges helyvektor:

$$\mathbf{r}_{PE} = d \mathbf{n} = 0,5 \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m} = \begin{bmatrix} -0,4 \\ -0,3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad (2.28)$$

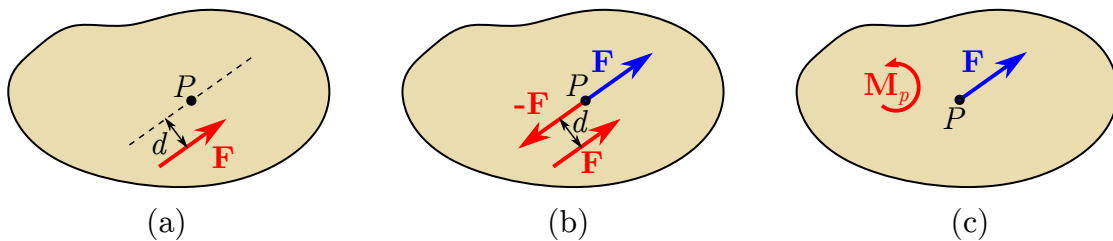


2.23. ábra. Törtvonalú rúdra ható erőrendszer centrális egyenesének meghatározása

ahol  $\mathbf{n}$  az  $\mathbf{e}$  irányvektorra merőleges, egységnyi hosszúságú normálvektor. Ennek koordinátáit az  $\mathbf{e}$  vektor koordinátáinak felcserélésével, és a megfelelő koordináta (itt az  $y$  koordináta) előjelének megváltoztatásával kaphatjuk meg. ♠

## 2.5. Koncentrált erő áthelyezése másik hatásvonalra, és az erőrendszer redukálása

Az előző fejezetben vázolt eljárás megfordításával át lehet helyezni egy erővektort másik hatásvonalra úgy, hogy az erő forgató hatásának megváltozását egy koncentrált erőpár felvételével kompenzáljuk. Ha az  $\mathbf{F}$  erőt egy  $d$  távolságban lévő hatásvonalra szeretnénk át-

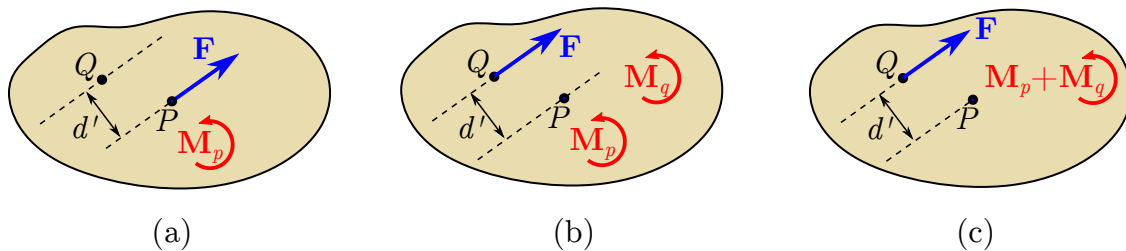


2.24. ábra. Koncentrált erő áthelyezése

helyezni, (2.24/a ábra), akkor felvehetünk az új hatásvonal valamely  $P$  pontjában egy  $\mathbf{F}$  és egy  $-\mathbf{F}$  erőt (2.24/b ábra). Ezek együtt egyensúlyi erőrendszert alkotnak, ezért ez a lépés nem befolyásolja az eredeti  $\mathbf{F}$  erő hatását. Most az eredeti hatásvonalon lévő  $\mathbf{F}$  erő és a felvett  $-\mathbf{F}$  erő egy erőpárt alkotnak, ami egyenértékűen helyettesíthető egy olyan koncentrált erőpárral, aminek a nagysága  $M = Fd$  (2.24/c ábra). Ez a nyomaték megegyezik az eredeti hatásvonalú  $\mathbf{F}$  erő  $P$  ponton átmenő  $p$  tengelyre számított  $M_p$  nyomatékával.

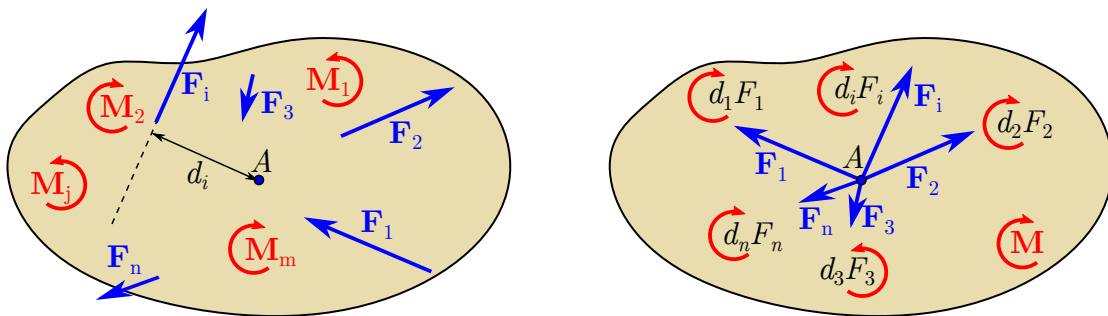
Az erópár nyomatékának nagysága és irányítása (térben az iránya is) függ attól, hogy hová helyezzük az erőt. A nyomaték indexe az áthelyezett erő hatásvonalának egy pontjára utal. A nyomatékkal tehát jellemezni tudjuk az erő hatásvonalának a helyét, ezért az eredő megadásához elég megadni az eredő erő vektorát (ami síkban két skalár koordinátával adható meg), és az erőrendszer egy adott tengelyre számított nyomatékát (ami síkban egy további skalár érték).

Ha adott a  $P$  pontban támadó  $\mathbf{F}$  erő és az  $\mathbf{M}_p$  nyomaték, akkor az  $\mathbf{F}$  erőt ismét el lehet tolni egy tetszőleges másik  $Q$  támadáspontba. Az újabb,  $d'$ -vel történő eltolás hatását egy megfelelő  $M_q = Fd'$  nyomatékú erópárral lehet kompenzálni, amihez hozzá kell adni a korábban kapott  $\mathbf{M}_p$  nyomatékot is, ahogy a 2.25. ábra mutatja.



2.25. ábra. Koncentrált erő áthelyezése

Az erő eltolásával megkönnyíthetjük az olyan erőrendszerek eredőjének számítását, amelyek sok koncentrált erőből állnak. Nem szükséges kettesével meghatározni a hatásvonalak metszéspontjait és részeredőket számítani: azt is megtehetjük, hogy az összes erővektort közös  $A$  támadáspontba toljuk, és ezeknek az eltolásoknak a hatását koncentrált erópárok felvételével kompenzáljuk, ahogy a 2.26. ábra mutatja. Az erővektorokat az  $A$  pontba tolva



2.26. ábra. Merev testre ható síkbeli erőrendszer redukálása.  $\mathbf{M}$  az erők eltolása előtt ható koncentrált erópárok vektori összege, a  $d_i F_i$  nyomatékú erópárok pedig az erők eltolásának hatását kompenzálják

megjelennek olyan erópárok, melyek az erők  $A$  ponton áthaladó tengelyre vonatkozó nyomatékaival jellemezhetők. Például az  $i$ -edik erő nyomatéka  $d_i F_i$  nagyságú. Az így kapott erők és nyomatékok már vektoriálisan összegezhethetők. Az eredő nyomatékvektor a koncentrált erópárok nyomatékai mellett az erők eltolásából származó nyomatékokat is tartalmazza.

A 2.4. és 2.5. fejezetekben bemutatott eljárások segítségével egy tetszőleges síkbeli erőrendszer helyettesíthető egy adott  $P$  pontban támadó  $\mathbf{F}$  erővektorral és egy  $\mathbf{M}_p$  nyomatékú erópárral. Ezt a műveletet az erőrendszer redukálásának nevezzük.

Ha adott egy  $n$  darab koncentrált erőből és  $m$  darab koncentrált erőpárból álló síkbeli erőrendszer, akkor annak adott  $A$  pontba történő redukálása a következőképpen tehető meg:

1. Kiszámítjuk a *koncentrált erőpárok* eredő nyomatékát (de ez még nem egyenlő az egész erőrendszer nyomatékával!):

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j. \quad (2.29)$$

2. Képzeltben eltoljuk a koncentrált erőket az  $A$  támadáspontba, és kiszámítjuk az eredő erőt:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (2.30)$$

3. Az erők eltolásának hatását további nyomatékok felvételével kompenzáljuk. Figyelembe véve a koncentrált erőpárok  $\mathbf{M}$  nyomatékát, az egész erőrendszer  $a$  tengelyre számított nyomatéka

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{M} + \sum_{i=1}^n e_i F_i d_i \mathbf{k}, \quad (2.31)$$

ahol  $d_i$  az a távolság, amivel az  $i$ -edik erővektor hatásvonalát eltoltuk,  $\mathbf{k}$  a síkra merőleges, a pozitív nyomaték irányát megadó egységvektor,  $e_i$  pedig az  $\mathbf{F}_i$  erő  $a$  tengelyre számított nyomatékának előjelét adja meg: ha az óramutató járásával ellenkező irányú forgató hatást fejt ki, akkor  $e_i = 1$ , ha azzal egyező a forgató hatása, akkor pedig  $e_i = -1$ . Mivel síkfeladatokban az összes nyomatékvektor párhuzamos egymással, a (2.31) egyenlet helyett skaláris egyenletet is írhatunk,

$$M_a = M + \sum_{i=1}^n e_i F_i d_i \quad (2.32)$$

alakban (lásd 2.4. példa).

Az előzőekből következik az alábbi fontos tétel:

**2.4. következmény.** *Két síkbeli erőrendszer akkor egyenértékű, ha azokat ugyanabba az  $A$  pontba redukálva, a kapott  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{M}_a$  vektoraik megegyeznek.*<sup>4</sup> ♠

**2.3. példa:** *Határozzuk meg a centrális egyenes helyzetét az erőrendszer redukálásával a 2.2. példában!*

*Adatok:*  $F_1 = 300$  N,  $F_2 = 400$  N,  $M_1 = 250$  Nm,  $L = 0,5$  m.

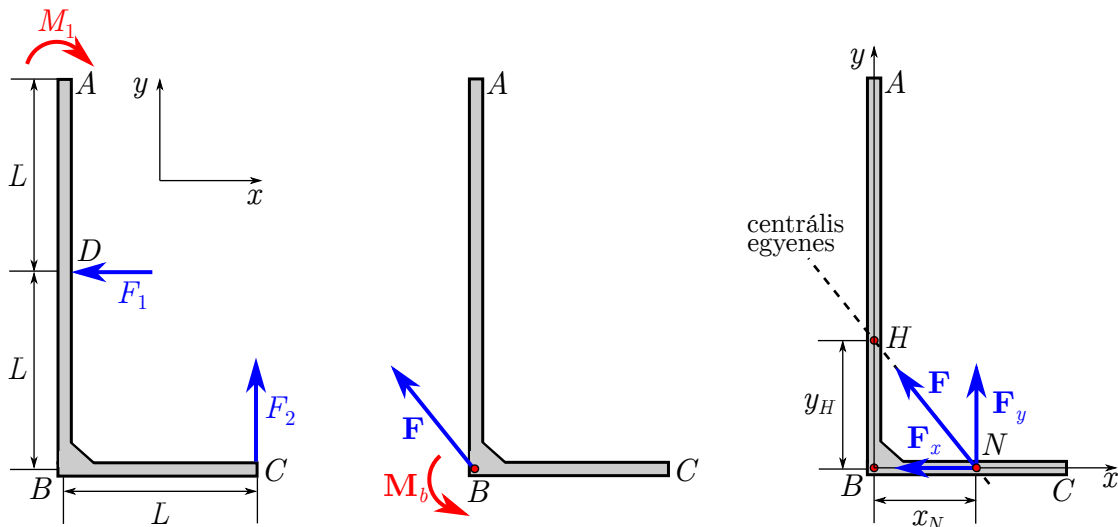
**Megoldás:**

Ebben az esetben is meg kell határoznunk az eredő erő vektorát és a koncentrált nyomatékok vektori összegét:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -300 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ N}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{bmatrix} \text{ Nm}. \quad (2.33)$$

<sup>4</sup>Természetesen mindegy, hogy hogyan jelöljük azt a pontot, ahova eltoljuk az erővektorok támadáspontjait; lehet  $B$  vagy  $C$  pont is.





2.27. ábra. Törtvonalú rúdra ható erőrendszer redukálása

Redukáljuk az erőrendszert a  $B$  pontba! Figyelembe véve, hogy mind az  $\mathbf{F}_1$ , mind az  $\mathbf{F}_2$  erő hatásvonala  $L$  távolságban van a  $B$  ponttól, és az ott áthaladó tengelyre pozitív nyomatékot fejtenek ki ezek az erők, a (2.31) képlet szerint

$$\mathbf{M}_b = \mathbf{M} + F_1 L \mathbf{k} + F_2 L \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -250 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} \text{ Nm.} \quad (2.34)$$

A  $B$  pontba redukált erőrendszert tovább egyszerűsíthetjük, ha az  $\mathbf{F}$  erőt a centrális egyenesre helyezzük át. A centrális egyenes helyét az alapján határozzuk meg, hogy az áthelyezett erőnek a  $B$  ponton átmenő  $b$  tengelyre számított nyomatéka  $M_b = M_{bz} = 100 \text{ Nm}$ .

Ha felbontjuk az eredő  $\mathbf{F}$  erő vektorát  $x$  és  $y$  tengellyel párhuzamos komponensekre, akkor a 2.27. ábra szerint láthatóvá válik, hogy az  $N$  pontba helyezett erőnek csak az  $\mathbf{F}_y$  komponense fejt ki nyomatékot a  $b$  tengelyre. Ehhez hasonlóan a  $H$  pontba helyezett erőnek csak az  $\mathbf{F}_x$  komponense járulna hozzá az erő nyomatékához. Ezzel a gondolatmenettel meghatározható a centrális egyenes két pontjának helye:

$$x_N = \frac{M_b}{F_y} = \frac{100 \text{ Nm}}{400 \text{ N}} = 0,25 \text{ m}, \quad y_N = 0, \quad x_H = 0, \quad y_H = \frac{M_b}{|F_x|} = \frac{100 \text{ Nm}}{300 \text{ N}} = 0,33\bar{3} \text{ m.} \quad (2.35)$$

A centrális egyenes az  $\mathbf{F}$  erővel párhuzamos. ♠

## 2.6. Síkbeli erőrendszer egyensúlya

Az előző fejezetek szerint egy síkbeli erőrendszer mindig helyettesíthető egy erővel vagy egy erópárral (azaz két erővel), tehát erre az esetre tudjuk értelmezni az egyensúly fogalmát a 2. alapelv alapján.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>A 3. fejezetben látni fogjuk, hogy általános, térbeli erőrendszert nem mindig tudunk helyettesíteni egyetlen erővel vagy egyetlen erópárral. A legáltalánosabb esetben legalább egy erő és egy erópár (azaz három erő) szükséges az erőrendszer hatásának megadásához. Ennek az esetnek a vizsgálata érdekében vezettük be a 4. alapelvet.

Ha az eredő egyetlen erő, annak nyilván nullának kell lennie az egyensúlyhoz, azaz teljesülnie kell, hogy  $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ . De ez a feltétel nem elegendő, mert az erők vektori összege akkor is zérus, ha az eredő egy nem nulla nyomatékú erőpár. Az erőpár két párhuzamos erőből áll, melyek a 2. alapelv szerint nincsenek egyensúlyban – forgató hatásuk van. Az egyensúlyhoz tehát azt is ki kell kötni, hogy a forgató hatás nulla legyen.

Síkbeli erőrendszer esetében úgy járhatunk el, hogy képezzük a koncentrált erők és koncentrált erőpárok eredőjét, az eredő  $\mathbf{F}$  erőt egy választott  $A$  támadáspontba toljuk, majd kiszámítjuk a hozzá tartozó  $\mathbf{M}_a$  nyomatékot a (2.31) egyenlet alapján. A fentiek szerint az egyensúly feltétele

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_a = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

ahol  $\mathbf{M}_a$  az erőrendszert alkotó erők és erőpárok eredő nyomatéka az  $A$  ponton átmenő tengelyre. Ezeket az egyenleteket *egyensúlyi egyenleteknek* nevezzük. Egyensúlyban tehát az erőrendszer eredője egy nulla nagyságú erő és egy nulla nagyságú erőpár. Ezeket eltolva ugyancsak nullvektorokat kapunk, tehát az  $A$  pont tetszőleges lehet: bármelyik tengelyre számíthatjuk a nyomatékot, annak egyensúlyban nullának kell lennie.

Síkfeladatokban (mondjuk az  $xy$  síkon) a (2.36) egyenletrendszer három skaláris egyenletet jelent, hiszen az erővektoroknak csak  $x$  és  $y$  irányú összetevői lehetnek, a nyomatékvektor pedig síkfeladatokban csak a síkra merőleges, azaz  $z$  irányú lehet. Tehát ebben az esetben az egyensúlyi egyenletekből három ismeretlen határozható meg. Gyakran célszerű jelölni, hogy az egyes egyenletek melyik egyensúlyi egyenletnek felelnek meg; ezt gyakran  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  és  $\sum M_a = 0$  alakban teszik meg, ahogy a 2.4. példában is bemutatjuk.

**2.4. példa:** A 2.28. ábrán egy egyik végén görgővel, másik végén csuklóval megtámasztott merev rúd – úgynevezett kéttámaszú tartó – látható, amit egy adott  $\mathbf{F}_0$  erő terhel. Meghatározandó a három ismeretlen reakciókomponens.

Adatok:  $L_1 = 0,4$  m,  $L_2 = 0,6$  m,  $F_{0x} = 100$  N,  $F_{0y} = -50$  N.

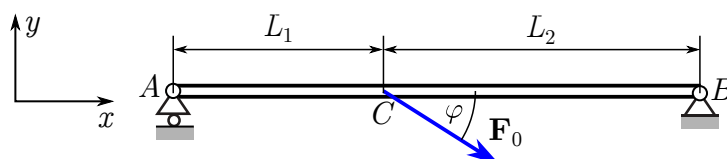
#### Megoldás:

A megoldás első lépésében szabadtest-ábrát rajzolunk a rúdról (2.28/a ábra). Figyelembe véve, hogy az  $A$  keresztmetszetben görgős támasz van, az ott ébredő kényszererőnek a támaszra merőlegesnek, azaz  $y$  irányúnak kell lennie (lásd 1.7. fejezet), ezért felvesszünk itt egy  $F_{Ay}$  erőt. A  $B$  keresztmetszetben található csukló esetében csak azt tudjuk, hogy az ott ébredő reakcióerő hatásvonala áthalad a csukló középpontján. Ezért itt két ismeretlen reakcióerő-komponenst kell felvenni, melyek előjeles nagyságai  $F_{Bx}$  és  $F_{By}$ . Fontos, hogy mindhárom ismeretlen reakcióerő-komponenst pozitív irányúként vettük fel az ábrán. Ennek az az előnye, hogy így a végeredményül kapott  $F_{Ay}$ ,  $F_{Bx}$  és  $F_{By}$  számok egyúttal az  $\mathbf{F}_A$  és  $\mathbf{F}_B$  erők koordinátái is lesznek a megadott  $(x, y)$  koordináta-rendszerben. Ez segíti a megoldás algoritmizálását, például így ugyanazzal a számítógépes programmal sokféle hasonló feladat is megoldható, és nem kell előre kitalálnunk, hogy milyen irányú reakcióerőket várunk.

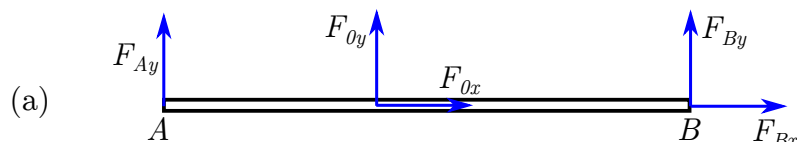
Mivel az  $\mathbf{F}_0$  terhelő erő két koordinátája adott, az  $F_{0x}$  és  $F_{0y}$  erőket is pozitív irányban vesszük fel a szabadtest-ábrán. Az ennek alapján felírható egyensúlyi egyenletekbe előjelhelyesen tudjuk behelyettesíteni  $F_{0x}$  és  $F_{0y}$  értékét, ami szintén segíti a számítógépes megoldást.

Az egyensúlyi egyenletek felírásához el kell dönteni, hogy melyik tengelyre írjuk fel a nyomatéki egyensúlyi egyenletet. Célszerű olyan tengelyt választani, amin több ismeretlen erőkomponens hatásvonala is áthalad, mert azok nyomatéka az adott tengelyre nulla. Ez alapján válasszuk a  $B$  ponton áthaladó  $b$  tengelyt, ugyanis erre mind az  $F_{Bx}$  és  $F_{By}$ , mind

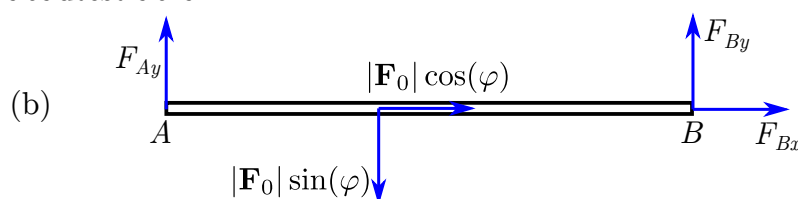
Szerkezeti ábra:



Szabadtest-ábra I.:



Szabadtest-ábra II.:



**2.28. ábra.** Kéttámaszú tartó egyensúlya

az  $F_{0x}$  erőnek nulla a nyomatéka. Az ennek megfelelő egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: \quad F_{0x} + F_{Bx} = 0, \quad (2.37)$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{0y} + F_{Ay} + F_{By} = 0, \quad (2.38)$$

$$\sum M_b = 0: \quad -F_{Ay}(L_1 + L_2) - F_{0y}L_2 = 0. \quad (2.39)$$

Mivel koncentrált erőpár nem hat a tartóra, a nyomatéki egyenletben (ami a (2.32) egyenletnek felel meg) csak az erők nyomatékai jelennek meg, a megfelelő előjelekkel.

A (2.37) és (2.39) egyenletekben egy-egy ismeretlen van, ezek könnyen megoldhatók:

$$F_{Bx} = -F_{0x} = -100 \text{ N}, \quad F_{Ay} = -\frac{F_{0y}}{L_1 + L_2}L_2 = 30 \text{ N}. \quad (2.40)$$

$F_{Ay}$  értékét visszahelyettesíthetjük a (2.38) egyenletbe, amiből

$$F_{By} = -F_{0y} - F_{Ay} = 50 \text{ N} - 30 \text{ N} = 20 \text{ N}. \quad (2.41)$$

A statika feladatok ellenőrzését megkönnyíti, hogy a nyomatéki egyensúlyi egyenletnek minden tengelyre teljesülnie kell, tehát választhatjuk a  $b$  tengely helyett az  $A$  ponton áthaladó  $a$  tengelyt is:

$$\sum M_a = 0: \quad F_{By}(L_1 + L_2) + F_{0y}L_1 = 0. \quad (2.42)$$

Innen azt kapjuk, hogy

$$F_{By} = \frac{-F_{0y}}{L_1 + L_2}L_1 = 20 \text{ N}, \quad (2.43)$$

ami megegyezik az előző eredménnyel. Ez a példa mutatja, hogy kéttámaszú tartóknál célszerű két nyomatéki egyenletet felírni a két támaszon áthaladó tengelyekre, mert azokban így

csak egy-egy ismeretlen marad, ezért megoldásuk könnyebb. Az így kapott eredményeket egy erő egyensúlyi egyenlettel (a példában (2.38)) vagy egy harmadik tengelyre felírt nyomatéki egyenlettel lehet ellenőrizni. Például az  $\mathbf{F}_0$  erő  $C$  támadáspontján áthaladó  $c$  tengelyre

$$\sum M_c = 0 : \quad -F_{Ay}L_1 + F_{By}L_2 = 30 \text{ N} \cdot 0,4 \text{ m} - 20 \text{ N} \cdot 0,6 \text{ m} = 0. \quad (2.44)$$

Ha egy erő irányítása ismert, akkor a komponenseinek értelmét is felvehetjük ennek megfelelően a szabadtest-ábrán, ahogy a 2.28/b. ábra szemlélteti. Ekkor az egyensúlyi egyenleteket is ennek megfelelően kell felírni, például

$$\sum F_x = 0 : \quad |\mathbf{F}_0| \cos(\varphi) + F_{Bx} = 0, \quad (2.45)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad -|\mathbf{F}_0| \sin(\varphi) + F_{Ay} + F_{By} = 0, \quad (2.46)$$

$$\sum M_b = 0 : \quad -F_{Ay}(L_1 + L_2) + |\mathbf{F}_0| \sin(\varphi)L_2 = 0. \quad (2.47)$$

Ebből természetesen ugyanazok az eredmények adódnak. ♠

Az előző példát geometriai úton is meg lehet oldani – egy hasonló példát már megoldottunk az 1.56. ábra kapcsán. Ott láttuk, hogy a feladat visszavezethető három erő egyensúlyára, aminek síkbeli erők esetében két feltétele van: az erővektorokból adódó vektorháromszög záródása folytonos nyílfolyammal, és az, hogy a három erő hatásvonalai egy pontban messék egymást.

A vektorháromszög záródása a  $\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0$  egyensúlyi egyenletnek felel meg, a hatásvonalak metsződése pedig azt garantálja, hogy a metszésponton áthaladó tengelyre mindhárom erővektor nyomatéka nulla.

## 2.7. Erő felbontása három, vele egy síkba eső komponensre

Adott erőrendszer eredőjének a meghatározása mindig egyértelműen megtehető, de a gyakorlatban a fordított feladat is gyakran előfordul, amikor egy erőt adott irányú komponensekre kell bontani. Ez azonban csak megfelelő feltételek mellett tehető meg. Például akkor találkozunk ezzel a problémával, ha adott egy terhelő erő, és a kényszerek csak bizonyos irányú kényszererőket tudnak biztosítani. Ekkor meg kell vizsgálnunk, hogy lehetséges-e az egyensúly.

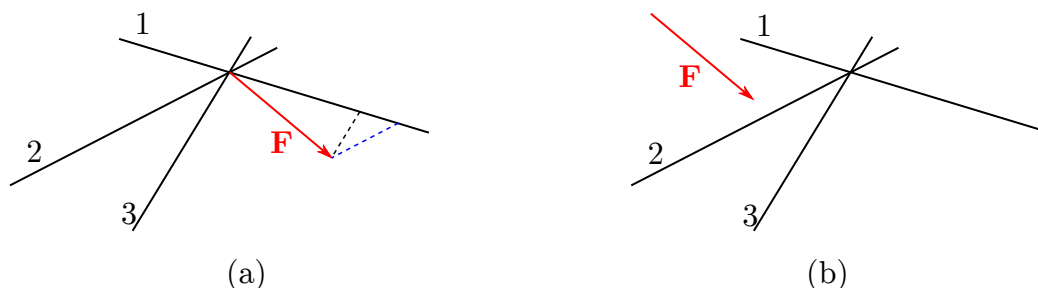
Három síkbeli erő esetében már láttunk erre példát, az 1.44. ábra kapcsán: egy  $\mathbf{F}$  erő csak akkor bontható fel két adott irányú komponensre, ha a két adott hatásvonal az  $\mathbf{F}$  hatásvonalán metsződik. Ennek kissé módosított változatát láttuk a 2.4. példában, ahol három erő ( $\mathbf{F}_0$ ,  $\mathbf{F}_A$  és  $\mathbf{F}_B$ ) egyensúlyát vizsgáltuk. A kényszererőket ott három komponenssel adtuk meg:  $\mathbf{F}_{Ay}$ ,  $\mathbf{F}_{Bx}$  és  $\mathbf{F}_{By}$ , azaz az  $\mathbf{F}_B$  erőt tovább bontottuk. Mivel ezek az erők egyensúlyt tartanak az  $\mathbf{F}_0$  erővel, úgy is tekinthetjük őket, mint a  $-\mathbf{F}_0$  erő három komponensét. Tehát ez a példa is felfogható úgy, hogy egy erő három komponensre való felbontását valósítottuk meg.

A 2.4. következmény szerint egy erő felbontásakor az új és a régi erőrendszer csak akkor egyenértékű, ha nemcsak az erők vektori összege egyezik meg a két esetben, hanem a nyomatékuk is. Tehát ebben a síkbeli esetben is három egyenlet írható fel:  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  és

$\sum M_p = 0$ , valamilyen  $p$  tengelyre. Ez a három egyenlet három ismeretlen skalármennyiség meghatározását teszi lehetővé.

Most általánosabban is megvizsgáljuk azokat a lehetséges eseteket, amikor három adott hatásvonalú, azonos síkba eső erőre kell felbontani egy adott  $\mathbf{F}$  erőt. Ekkor három ismeretlen van: a három erő előjeles nagysága.

- Ha a három hatásvonal egy pontban metsződik, akkor két eset lehetséges, ahogy a 2.29. ábra mutatja:

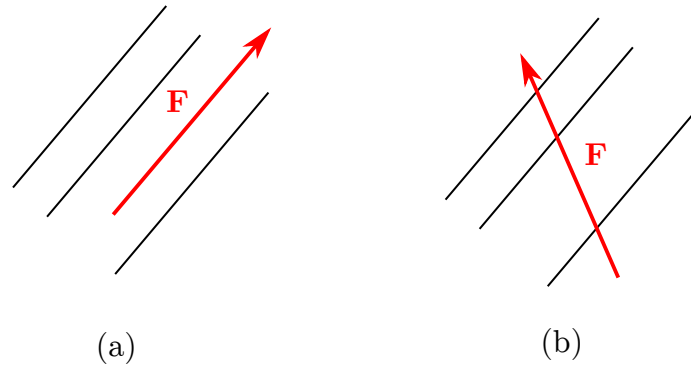


**2.29. ábra.** Erő felbontása három, egy pontban metsződő hatásvonalú erőre: vagy nem egyértelmű a megoldás (a), vagy nincs megoldás (b)

- Az első esetben a közös metszéspont  $\mathbf{F}$  hatásvonalára esik. Ekkor a feladat határozatlan, több megoldása is lehet. Például háromféleképpen is kiválaszthatunk két hatásvonalat a háromból, ezután  $\mathbf{F}$  egyértelműen felbontható az adott irányú két komponensre. A 2.29/a ábra azt mutatja, hogy az  $\mathbf{F}$  erő a 2-es vagy a 3-as egyenesel párhuzamosan is levetíthető az 1-es egyenesre. Ez a bizonytalanság abból ered, hogy a nyomatéki egyenlet ekkor nem ad új információt: a közös ponton átmenő tengelyre mindegyik erőnek nulla a nyomatéka.<sup>6</sup>
  - Ha a közös pont nem esik  $\mathbf{F}$  hatásvonalára, akkor nem lehet megoldás, mert közös pontban metsződő hatásvonalú erők eredőjének is a közös ponton kell áthaladnia (2.29/b ábra). Itt a nyomatéki egyenlet nem teljesülhet:  $\mathbf{F}$ -nek nem lehet nulla a nyomatéka a közös ponton átmenő tengelyre.
- Ha a három hatásvonal nem egy pontban metsződik, akkor az alábbi esetek lehetségesek:
    - Három párhuzamos hatásvonal adott, melyeknek nincs közös metszéspontjuk. Ha párhuzamosak az  $\mathbf{F}$  erővel (2.30/a ábra), akkor végtelen sok megoldás van, mert két megfelelő nagyságú és értelmű párhuzamos erővel bármilyen hatásvonalú és nagyságú, azokkal párhuzamos eredő erő helyettesíthető. Ahogy a 2.17. megjegyzésben tárgyaltuk, a két erő nagyságától függ az eredő nagysága, arányuk pedig azt határozza meg, hogy az eredő hatásvonala hová kerül. Egy harmadik erő hozzávételével a lehetséges kombinációk száma végtelen nagyvá válik.

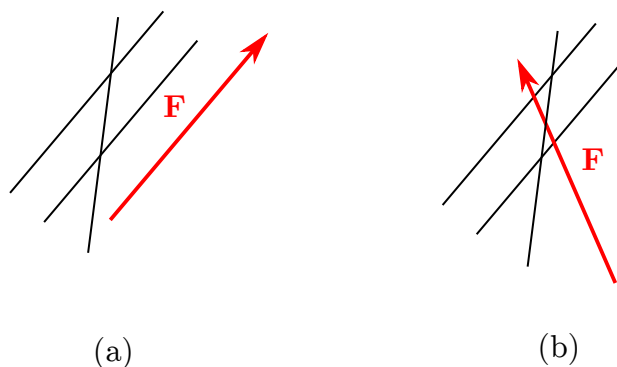
<sup>6</sup>A térbeli esetben, azaz amikor a három adott hatásvonal nem esik egy síkba, de egy pontban metsződnek, és azon a ponton áthalad  $\mathbf{F}$  hatásvonala is, a megoldás egyértelmű (lásd 1.5.2. fejezet).

- Ha a párhuzamos hatásvonalak nem párhuzamosak az  $\mathbf{F}$  erővel, akkor nincs megoldás, mert az erő adott irányokra merőleges összetevőjét nem lehet így biztosítani (2.30/b ábra).



**2.30. ábra.** Erő felbontása három párhuzamos hatásvonalú erőre: vagy nem egyértelmű a megoldás (a), vagy nincs megoldás (b)

- Ha két adott hatásvonal párhuzamos egymással, a harmadik pedig nem, akkor meg kell vizsgálni, hogy  $\mathbf{F}$  is párhuzamos-e a két egymással párhuzamos hatásvonallal. Ha igen (2.31/a ábra), akkor a harmadik, eltérő hatásvonalon csak zérus nagyságú erő ébredhet, a két párhuzamos hatásvonalon egyértelműen felvehető az  $\mathbf{F}$ -fel egyenértékű két erő. Ha  $\mathbf{F}$  nem párhuzamos a felvett hatásvonalakkal (2.31/b ábra), akkor azt használhatjuk ki, hogy az  $\mathbf{F}$  erőnek és a felbontásaként kapott  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$  erőkből álló erőrendszernek ugyanakkora nyomatéka kell legyen bármely tengelyre. Három ismeretlen nagyságú erőt keresünk, melyek három megfelelően választott nyomatéki egyenlet alapján meghatározhatók. A módszert a 2.7.1. és 2.7.2. fejezetekben ismertetjük részletesen.



**2.31. ábra.** Erő felbontása három erőre, melyek közül kettő hatásvonala párhuzamos. A megoldás egyértelmű, de az (a) esetben  $\mathbf{F}$ -fel nem párhuzamos hatásvonalú erő nem ébredhet

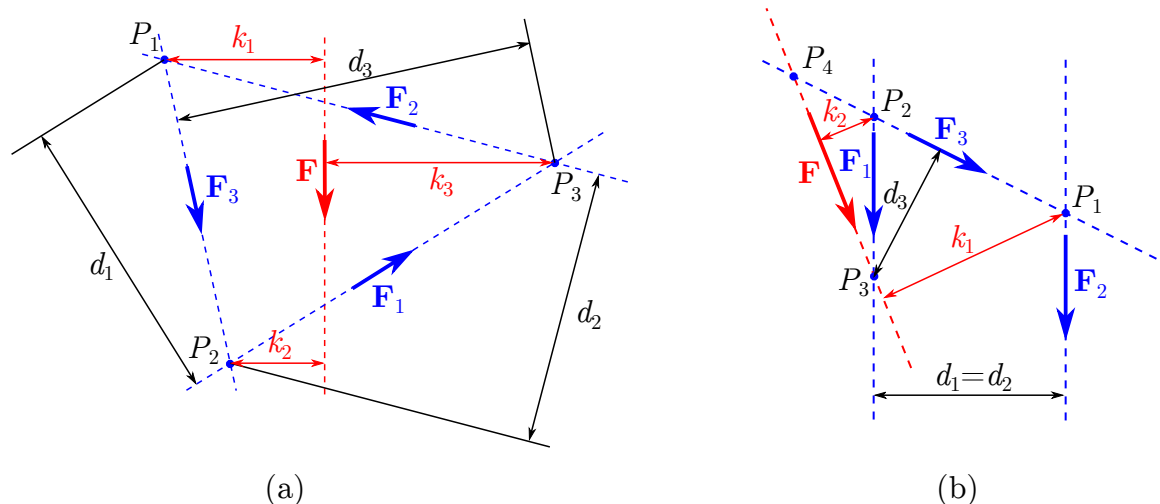
- Lényegében ugyanezt az eljárást követhetjük akkor is, ha az adott hatásvonalak nem párhuzamosak egymással.

A számításokhoz célszerű a hatásvonalak metszéspontjain – az úgynevezett *főpontokon* áthaladó tengelyekre felírni a nyomatéki egyenleteket. Az ezen alapuló megoldást *Ritter-féle számító eljárásnak* nevezik.

Szerkesztéssel is megoldhatóak az ilyen problémák. Ezek lényege az, hogy kéttámaszú tartóként kezeljük a problémát: két adott hatásvonal metszéspontját csuklónak tekintjük, melyen át kell haladnia a két erő (például  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$ ) eredőjének ( $\mathbf{F}_{12}$ ). Az adott  $\mathbf{F}$  erő és a harmadik erő ( $\mathbf{F}_3$ ) hatásvonalán kell keresztülhaladnia ennek az  $\mathbf{F}_{12}$  részeredőnek is, így iránya meghatározható. Az ennek megfelelő módszert *Culmann-féle szerkesztő eljárásnak* nevezik (lásd 2.7.2. fejezet).

### 2.7.1. Ritter-féle számító eljárás

Tekintsük a 2.32/a ábrán látható elrendezést! Itt az  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$  erők hatásvonalai adottak, ilyen irányú komponensekre kell felbontani az  $\mathbf{F}$  erőt, azaz keressük ezeknek az erőknek a nagyságát.



**2.32. ábra.** Erő felbontása három párhuzamos hatásvonalú erőre a Ritter-féle számító eljárás alapján

A megoldás lépései a következők:

1. A három hatásvonalon felvesszük a három keresett erővektort valamilyen irányítással. Ezeknek a vektoroknak az előjeles nagysága lesz a három keresett ismeretlen. A számítás eredményei alapján esetlegesen negatívra adódó értékek annak felelnek meg, hogy az adott vektorok irányítása a felvettell ellentétes.
2. A három adott hatásvonal metszéspontjait jelölje  $P_1$ ,  $P_2$  és  $P_3$ ! Ezeket az ún. *főpontokat* érdemes úgy jelölni, hogy  $P_1$  legyen az a pont, melyen nem halad át  $\mathbf{F}_1$  hatásvonala,  $P_2$  az, melyen nem halad át  $\mathbf{F}_2$  hatásvonala, a  $P_3$  pont pedig az, melyen nem halad át  $\mathbf{F}_3$  hatásvonala.
3. Célunk nyomatéki egyenletek felírása a három főponton átmenő tengelyekre, ezért felvesszük az ábrán az  $\mathbf{F}$  erőhöz tartozó  $k_1$ ,  $k_2$  és  $k_3$ , valamint a keresett erőkhöz tartozó

$d_1$ ,  $d_2$  és  $d_3$  erőkarokat. Mivel mindegyik keresett erő hatásvonala két metszésponton halad keresztül, az erőknek a három tengely közül csak egy-egy tengelyre lesz nullától különböző erőkarja.

4. Felírjuk a nyomatékok egyenlőségét kifejező egyenleteket a metszéspontokon átmenő  $p_1$ ,  $p_2$  és  $p_3$  tengelyekre:

$$p_1 : \quad -Fk_1 = F_1d_1, \quad (2.48)$$

$$p_2 : \quad -Fk_2 = F_2d_2, \quad (2.49)$$

$$p_3 : \quad Fk_3 = F_3d_3. \quad (2.50)$$

Ebből a három egyenletből  $F_1$ ,  $F_2$  és  $F_3$  meghatározható, hiszen mindegyikben csak egy ismeretlen van:

$$F_1 = -\frac{Fk_1}{d_1}, \quad (2.51)$$

$$F_2 = -\frac{Fk_2}{d_2}, \quad (2.52)$$

$$F_3 = \frac{Fk_3}{d_3}. \quad (2.53)$$

Az eredményekből látható, hogy  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  a felvétel ellentétes értelműnek adódik.

Természetesen az egyenletrendszer alakja függ attól, hogy hogyan vesszük fel az ismeretlen erővektorokat, és hogy helyezkedik el az  $\mathbf{F}$  erő hatásvonala a főpontokhoz képest.

A módszer akkor is alkalmazható, ha van két párhuzamos hatásvonallú erő a keresett erők között, mint a 2.32/b ábrán.

Ekkor a keresett erők hatásvonalainak csak két metszéspontja van,  $P_1$  és  $P_2$ , tehát egy harmadik pontot is kell keresnünk, amire felírhatjuk a megfelelő nyomatéki egyenletet. Célszerű az  $\mathbf{F}$  erő és valamelyik keresett hatásvonal metszéspontját választani. Ilyenek például az ábrán jelölt  $P_3$  és  $P_4$  pontok, de az  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{F}_2$  erő hatásvonalainak metszéspontja is választható. A  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  választással az alábbi egyenletekre jutunk:

$$p_1 : \quad Fk_1 = F_1d_1, \quad (2.54)$$

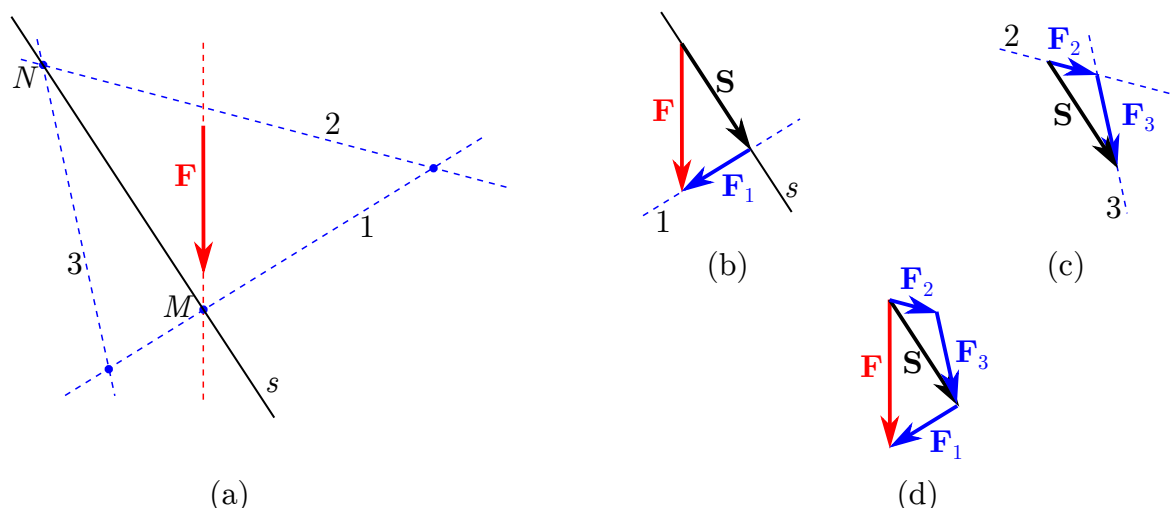
$$p_2 : \quad Fk_2 = -F_2d_2, \quad (2.55)$$

$$p_3 : \quad 0 = -F_2d_2 - F_3d_3. \quad (2.56)$$

Itt megfigyelhető, hogy a  $p_3$  tengelyre az  $\mathbf{F}$  erő nyomatéka nulla, tehát az  $F_1$ ,  $F_2$  és  $F_3$  összes nyomatékának is nullának kell lennie erre tengelyre. Mivel a  $P_3$  ponton csak az  $\mathbf{F}_1$  hatásvonala megy keresztül az ismeretlen erők közül, az utolsó egyenletben két ismeretlen is van, de a feladat ettől még megoldható.

**2.21. megjegyzés:** Megmutatható, hogy egy erőpár is helyettesíthető három adott erővel. Az erők nagysága a Ritter-féle számításhoz hasonlóan határozható meg [3]. ♣





**2.33. ábra.** Erő felbontása három párhuzamos hatásvonalú erőre a Culmann-féle szerkesztő eljárás alapján. A keresett  $\mathbf{F}_1$ ,  $\mathbf{F}_2$ ,  $\mathbf{F}_3$  erőknek megfelelő 1, 2 illetve 3 számú hatásvonalak adottak

### 2.7.2. Culmann-féle szerkesztő eljárás

A 2.32/a ábrán látható feladat Culmann-féle szerkesztéssel történő megoldását a 2.33. ábrán szemléltetjük.

1. A megoldás első lépésében választunk egy metszéspontot az adott  $\mathbf{F}$  erő és a három hatásvonal metszéspontjai közül. A 2.33. ábrán az 1-es számmal jelölt hatásvonallal vett  $M$  metszéspontot választottuk.

2.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$  miatt

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \quad (2.57)$$

is teljesül.  $\mathbf{F} - \mathbf{F}_1$  hatásvonala az  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{F}_1$  erők hatásvonalainak  $M$  metszéspontján,  $\mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$  hatásvonala pedig azok  $N$  metszéspontján kell hogy áthaladjon.

A (2.57) egyenlet két oldalán szereplő erők csak akkor egyenértékűek, ha nemcsak azonos nagyságúak és irányúak, hanem azonos hatásvonalúak is, tehát az  $\mathbf{S} \equiv \mathbf{F} - \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$  erő hatásvonalának az  $N$  és  $M$  pontokra kell illeszkednie. Az így megszerkeszthető hatásvonalat  $s$  jelöli az ábrán.

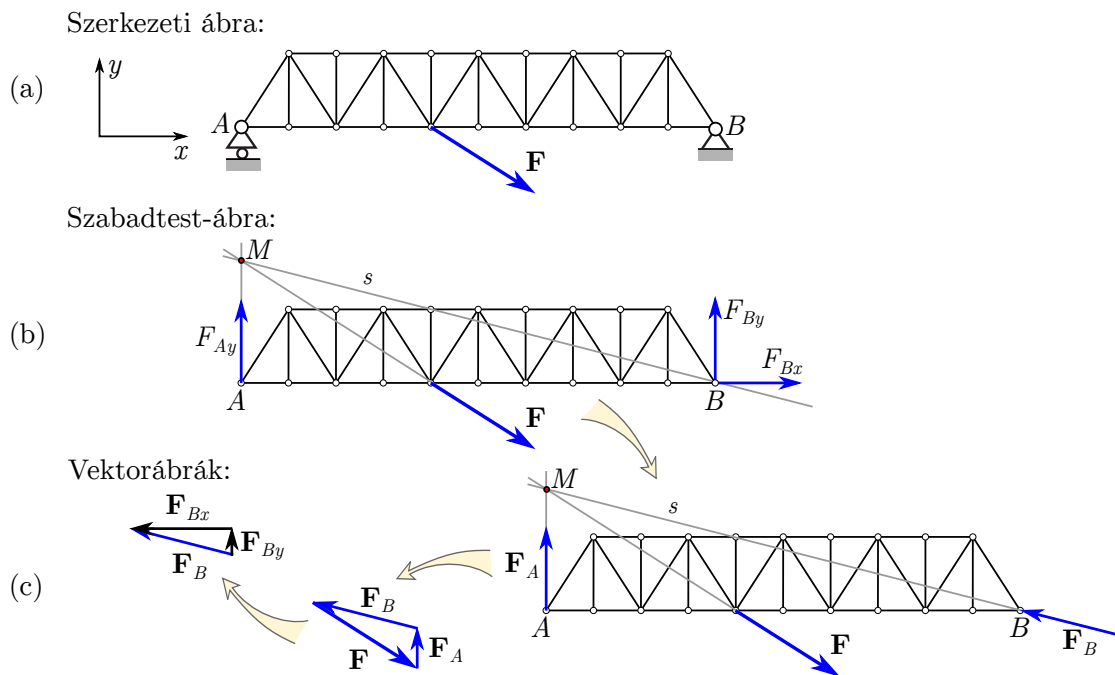
3. Az előző gondolamenetből következően az  $\mathbf{S}$  segéderő hatásvonala ismert, így az ismert  $\mathbf{F}$  erő felbontható az  $s$  iránnyal és az 1 jelű iránnyal párhuzamos összetevőkre (2.33/b ábra), azaz megszerkeszthető mind az  $\mathbf{F}_1$ , mind az  $\mathbf{S}$  erő.
4.  $\mathbf{F}_2$  és  $\mathbf{F}_3$  összegének meg kell egyeznie  $\mathbf{S}$ -sel, tehát az előző lépésben kapott  $\mathbf{S}$  erőt felbonthatjuk a 2 és 3 irányokkal párhuzamos összetevőkre, azaz  $\mathbf{F}_2$ -re és  $\mathbf{F}_3$ -ra (2.33/c ábra).
5. A vázolt eljárás során mindhárom keresett erővektor kiadódik, melyeket együtt a 2.33/d ábra szemléltet.

A Culmann-szerkesztés nemcsak egy adott erő komponensekre bontására használható, hanem az egyensúly feltételeit biztosító reakciók meghatározására is, ha azok hatásvonalai ismertek.

**2.5. példa:** Alkalmazzuk a Culmann-féle szerkesztést egy kéttámaszú tartó reakcióerőinek meghatározására!

**Megoldás:**

Hasonló szerkesztéssel már találkoztunk az 1.56. ábra kapcsán. Most is vizsgáljuk meg ugyanazt az  $\mathbf{F}$  aktív erő hatása alatt álló, kéttámaszú tartónak tekinthető hídmodellt (2.34. ábra)!



**2.34. ábra.** Hídra ható reakcióerők meghatározása Culmann-féle szerkesztéssel

Az A alátámasztásban csak  $y$  irányú  $F_{Ay}$  erő hathat, tehát annak iránya ismert. A B csuklóban ébredő reakcióerőről csak azt tudjuk, hogy hatásvonala áthalad a B ponton, ezért azt felbonthatjuk  $x$  és  $y$  irányú összetevőkre. Tehát meg kell találni azt a három, adott hatásvonalú erőt, melyek egyensúlyt tartanak az ismert  $\mathbf{F}$  erővel.

A feladatot három erő egyensúlyára vezetjük vissza úgy, hogy a B csuklóban ébredő két erőkomponens helyett az  $\mathbf{F}_B$  erőt keressük – ez felel meg az  $\mathbf{S}$  segéderőnek. Három erő egyensúlyához az szükséges, hogy a hatásvonalaik egy pontban metsződjenek. Tehát az  $\mathbf{F}_B$  erő hatásvonalának is át kell haladnia az  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{F}_A$  erők által kijelölt  $M$  ponton, így az a szerkezeti ábra vagy a pontosan megrajzolt, léptékhelyes szabadtest-ábra (2.34/b ábra) alapján megszerkeszthető. Ez a hatásvonal felel meg a Culmann-szerkesztésben  $s$ -sel jelölt vonalnak. Mivel most már ismert mind az  $\mathbf{F}_A$ , mind az  $\mathbf{F}_B$  hatásvonal, a vektorábrán megszerkeszthetők ezek az erők úgy, hogy az  $\mathbf{F}$  erővel záródó vektorháromszöget alkossanak, záródó nyílfolyammal (2.34/c ábra). Ezután felbontható az  $\mathbf{F}_B$  erő is  $x$  és  $y$  irányú összetevőkre, ahogy a vektorábra mutatja.<sup>7</sup> ♠

<sup>7</sup>Az ábrán negatív  $x$  irányba mutató  $\mathbf{F}_{Bx}$  erőt tüntettünk fel. Egy ilyen, negatív irányú nyilat nem jelölhetünk az  $F_{Bx}$  skalár koordinátával, de az  $\mathbf{F}_{Bx}$  vektorral való jelölés nem okoz ellentmondást.

A Culmann-szerkesztés alkalmazására egy további példát mutat a 4.18. ábra.

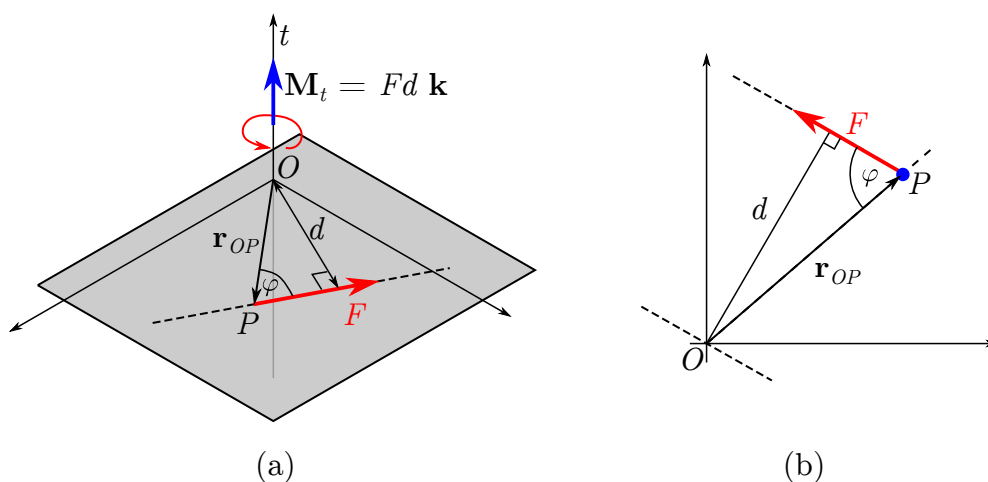


## 3. fejezet

# Térbeli erőrendszerek eredője és egyensúlya

### 3.1. Erő pontra számított nyomatéka

Ebben a fejezetben azokra az esetre is kiterjesztjük a nyomaték fogalmát, amikor nincs korlátozva, hogy milyen irányú tengely körül tud a merev test elfordulni.<sup>1</sup>



**3.1. ábra.** Az  $O$  pontra számított nyomaték származtatása az  $\mathbf{M}_t$  tengelyre számított nyomaték fogalmából kiindulva, amikor  $\mathbf{F}$  hatásvonala a tengelyre merőleges  
(a): térben, (b): az  $F$  erő és az  $\mathbf{r}_{OP}$  vektor által kijelölt síkon

A 2.2. fejezetben a tengelyre számított nyomaték tulajdonságainak vizsgálata során feltételeztük, hogy a vizsgált  $\mathbf{F}$  erő hatásvonala a *tengelyre merőleges síkban* található, ahogy a 3.1. ábra mutatja.<sup>2</sup> Jelölje  $O$  azt a pontot, ahol a tengely metszi az adott  $P$  támadáspontú erő hatásvonalának síkját! Ekkor az erő tengelyre számított  $\mathbf{M}_t$  nyomatékának 2.2. fejezetben megismert alábbi tulajdonságai az  $\mathbf{r}_{OP}$  vektor segítségével is kifejezhetők:

<sup>1</sup>Az ebben a fejezetben leírtak megfelelő értelmezéséhez szükséges a vektorok között értelmezett skaláris és vektoriális szorzat fogalmának ismerete. Ezeknek a műveleteknek a legfontosabb tulajdonságait a 8.1. függelék tárgyalja.

<sup>2</sup>Azért ezt az esetet néztük, mert beláttuk, hogy a tengellyel párhuzamos hatásvonallú erőnek nincs forgató hatása az adott tengely körül.

	<i>Tengelyre számított nyomaték tulajdonságai</i>	<i>A tulajdonságok kifejezve az <math>\mathbf{r}_{OP}</math> vektorral</i>
1.	Íránya párhuzamos a tengellyel	$\leftrightarrow$ Merőleges az $\mathbf{r}_{OP}$ vektor és az $\mathbf{F}$ erő hatásvonalára által kifeszített síkra
2.	Nagysága $Fd$ , ahol $d$ az erő hatásvonalának és a tengelynek a távolsága.	$\leftrightarrow$ Nagysága $M_t = Fd =  \mathbf{F}  \mathbf{r}_{OP} \sin(\varphi)$ , ahol $\varphi$ az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{r}_{OP}$ vektorok által bezárt szög.
3.	Értelme a jobbkéz-szabály szerinti.	$\leftrightarrow$ Értelme meghatározható egy vektoriális szorzatnak megfelelően.

A felsorolt tulajdonságok alapján a tengelyre számított nyomatékvektor az alábbi vektoriális szorzat segítségével is számítható (lásd 8.4. definíció):<sup>3</sup>

$$\mathbf{M}_t = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}. \quad (3.1)$$

A vektoriális szorzatról ugyanis ismert, hogy az eredményül kapott vektor merőleges mindkét szorzótényezőre, értelme a jobbkéz-szabály szerint határozható meg, továbbá  $|\mathbf{M}_t| = |\mathbf{r}_{OP}||\mathbf{F}|\sin(\varphi)$ . Nagyon fontos, hogy a (3.1) egyenlet jobb oldalán nincs közvetlenül megadva a  $t$  tengely iránya, az  $\mathbf{M}_t$  nyomaték iránya kiadódik a vektoriális szorzatból.

Hétköznapi tapasztalataink szerint ha adott egy tengely, és az erőnek van a tengellyel párhuzamos komponense is (de hatásvonalára nem esik egybe a tengellyel), akkor az erő forgató hatása a tengelyt is megpróbálja elfordítani. Ebből kiindulva, most megfordítjuk az előbbi gondolatmenetet: egy adott ponthoz azt a rajta áthaladó tengelyt keressük, amit az adott erő nyomatéka nem fordítana el. Tehát tételezzük fel, hogy a  $t$  tengely nem adott, viszont a vizsgált test  $O$  pontja rögzített! A feladatunk az, hogy az  $O$  pont, az  $\mathbf{F}$  erővektor, és annak  $P$  támadáspontja ismeretében találjuk meg a forgató hatáshoz rendelhető tengely irányát, valamint az azt jellemző nyomaték nagyságát és értelmét.

A tengelyre számított nyomaték tulajdonságaiból kiindulva, a keresett tengely nyilván az  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{r}_{OP}$  vektorok által kifeszített síkra merőleges kell legyen, és meg kell egyeznie a (3.1) képlettel adott nyomatékkal. Ez alapján definiálhatjuk az erő pontra számított nyomatékát:

**3.1. definíció.** Egy  $\mathbf{F}$  erő  $O$  pontra számított nyomatéka

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}, \quad (3.2)$$

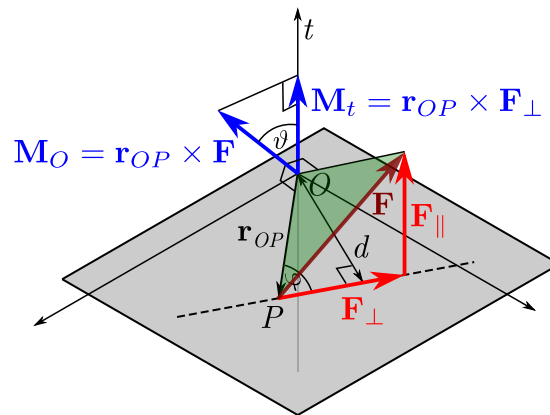
ahol  $\mathbf{r}_{OP}$  az  $O$  pontból az  $\mathbf{F}$  erő  $P$  támadáspontjába mutató helyvektor. ♠

A definícióból következik, hogy ha a 3.1. ábrán látható eredeti erőhöz (amit most  $\mathbf{F}_\perp$  jelöl) hozzáadunk egy tengellyel párhuzamos  $\mathbf{F}_\parallel$  erőt, akkor az eredő  $\mathbf{F}$  erő  $O$  pontra számított  $\mathbf{M}_O$  nyomatéka az  $\mathbf{r}_{OP}$  és  $\mathbf{F}$  vektorok, valamint az  $O$  pont által meghatározott háromszög síkjára merőleges lesz, ahogy a 3.2. ábra mutatja.

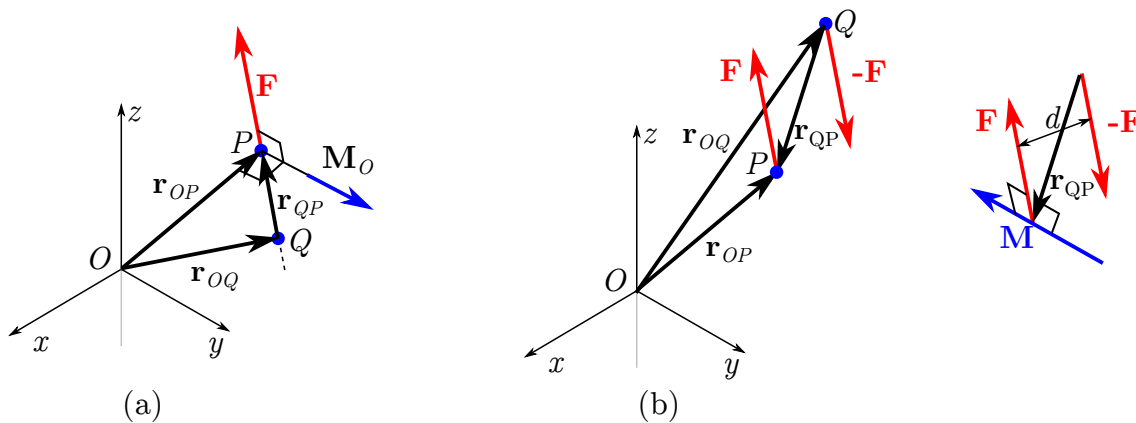
A vektoriális szorzat tulajdonságai miatt a nyomatékvektor az  $\mathbf{r}_{OP}$  és  $\mathbf{F}$  vektorok síkjára merőleges, továbbá az  $\mathbf{r}_{OP}$ ,  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{M}_O$  vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak – azaz teljesül a jobbkéz-szabály (lásd 3.3. ábra). Emellett az is teljesül, hogy

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} = -\mathbf{F} \times \mathbf{r}_{OP} = \mathbf{F} \times \mathbf{r}_{PO}. \quad (3.3)$$

<sup>3</sup>Ezt azért nevezhetjük tengelyre számított nyomatéknak, mert feltételezzük, hogy a  $P$  támadáspontú erő hatásvonalára a tengelyre merőleges, és a tengely  $O$  pontját metsző síkban helyezkedik el. Ilyen feltételek mellett a  $t$  tengely iránya és térbeli elhelyezkedése meghatározható az  $\mathbf{r}_{OP}$  vektor és az  $\mathbf{F}$  erő ismeretében.



**3.2. ábra.** Az  $O$  pontra számított nyomaték a  $t$  tengellyel párhuzamos erő forgató hatását is figyelembe veszi



**3.3. ábra.** (a):  $A$  pontra számított nyomatékot az  $\mathbf{r}_{OP}$  helyvektor és az  $\mathbf{F}$  vektor határozza meg. Ezen az ábrán a  $P$  pontban támadó  $\mathbf{F}$  erő az egyetlen terhelés,  $\mathbf{M}_O$  csak ennek az erőnek az  $O$  pontra számított nyomatéka (b): Erőpár nyomatéka is számítható a vektoriális szorzaton alapuló képlet alapján

Matematikából ismert, hogy párhuzamos vektorok vektoriális szorzata nulla. Ebből következik, hogy az  $O$  pontra számított nyomaték kiszámítása során a helyvektor az  $\mathbf{F}$  erő hatásvonalának bármelyik  $Q$  pontjába mutathat az  $O$  pontból. Ennek bizonyításához bontsuk fel az  $\mathbf{r}_{OP}$  vektort egy  $\mathbf{F}$ -vel párhuzamos  $\mathbf{r}_{QP}$  és egy  $\mathbf{F}$ -vel nem párhuzamos  $\mathbf{r}_{OQ}$  komponensre, ahogy a 3.3/a ábra mutatja! Mivel  $\mathbf{r}_{QP}$  és  $\mathbf{F}$  párhuzamosak,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{OQ} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{OQ} \times \mathbf{F}. \quad (3.4)$$

Erőpár nyomatéka is származtatható a pontra számított nyomaték definíciója alapján. A 3.3/b ábra jelöléseivel

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_{OQ} \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_{OP} - \mathbf{r}_{OQ}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{F}. \quad (3.5)$$

Az eredményül kapott  $\mathbf{M}$  nyomatékvektor már független az  $O$  pont választásától, és a vektoriális szorzat tulajdonságai miatt merőleges az erőpár síkjára, nagysága pedig

$$M = Fd, \quad (3.6)$$

a korábbi definíciónak megfelelően.

A nyomatékról korábban beláttuk, hogy szabad vektor, azaz a merev test bármelyik pontjába áthelyezhetjük, hatása nem változik. Tehát nincs ellentmondás a 3.1., 3.2. és 3.3. ábrák között: az  $\mathbf{M}_O$  nyomatékot berajzolhatjuk az  $O$  pontba, az  $O$  ponton áthaladó tengely valamelyik pontjába, vagy éppen az  $\mathbf{F}$  erő támadáspontjába is. Indexe nem a nyomatékvektor helyét jellemzi, hanem azt, hogy az *erő* melyik pontra vett nyomatékáról van szó – tehát az erő támadáspontjának a térbeli elhelyezkedéséről tartalmaz információt.

A 8.1. fejezetben leírtaknak megfelelően, a vektoriális szorzat számítása megtehető egy ún. determináns kifejtésével:

$$\mathbf{M}_O \equiv \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \equiv \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

$$= \mathbf{i} \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

A  $2 \times 2$  méretű ún. aldeterminánsok számítása során úgy kell eljárni, hogy a bal felső elemet megszorozzuk a jobb alsó elemmel (például az  $\mathbf{i}$  vektorral párhuzamos,  $x$  komponens számítása során ebből  $yF_z$  adódik), majd ebből kivonjuk a jobb felső és bal alsó elem szorzatát (a példában  $zF_y$ ). Külön oda kell figyelni az  $y$  irányú komponens számítására, mert abban az esetben negatív előjellel kell figyelembe venni a számított aldetermináns értékét.

Más felírási mód is alkalmazható:

$$\mathbf{M}_0 \equiv \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yF_z - zF_y \\ zF_x - xF_z \\ xF_y - yF_x \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

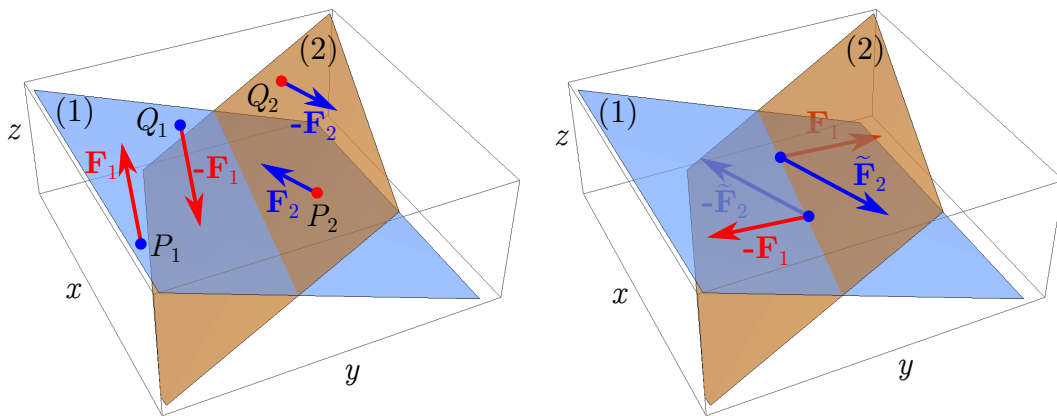
Ebben az esetben az  $x$  komponens számításakor letakarjuk mindkét vektor első elemét, majd formálisan ugyanúgy végezzük a szorzást, mint az aldeterminánsnál: a bal felső elemet szorozzuk a jobb alsóval, és abból kivonjuk a másik két elem szorzatát:  $yF_z - zF_y$ . Az  $y$  komponens számításakor a középső elemeket takarjuk le, és most úgy vesszük figyelembe az ehhez az esethez tartozó negatív előjelet, hogy a először a jobb felső elemet szorozzuk a bal alsóval, és abból vonjuk ki a másik két elem szorzatát:  $zF_x - xF_z$ . Végül, a  $z$  komponens számításakor a két vektor utolsó elemét takarjuk le, és megint a bal felső és jobb alsó elemek szorzatából vonjuk ki a másik két elem szorzatát:  $xF_y - yF_x$ .

Hogy a nyomaték tényleg vektor, azt az biztosítja, hogy két vektor vektoriális szorzatával definiáltuk. Tehát két nyomatékvektor vektori összege a paralelogrammaszabály szerint számítható. Ebből következően a *nyomatékvektor komponensekre is felbontható*, melyek a nyomatékvektor előjeles vetületei az egyes tengelyekre. Ennek a gondolatnak a megfordításából pedig az következik, hogy két, merev testre ható erőpár eredője egy olyan erőpár, aminek a nyomatéka a két erőpár nyomatékának vektori összege.

**3.22. megjegyzés:** A 2.19. megjegyzés kapcsán láttuk, hogy az egy síkba eső erőpárok nyomatékainak összege fizikailag is ugyanazt a hatást fejt ki, mint az egyszerre működő két erőpár. Ezt a problémát nem párhuzamos síkú erőpárok esetében is vissza tudjuk vezetni a statika alapelveire, a 3.4. ábrának megfelelően.



Korábban láttuk, hogy két erőpár helyettesíthető két-két egymáshoz képest ugyanakkora távolságban támadó erővel. Legyenek ezek  $\pm\mathbf{F}_1$  és  $\pm\mathbf{F}_2$ ! Mindkét erőpár elforgatható a síkjában és tetszőleges módon el is totható a térben, ezért például a  $\pm\mathbf{F}_1$  erőpár erőinek támadáspontjait eltolhatjuk az erőpárok síkjainak metszészvonalába. A másik erőpárból  $\mathbf{F}_2$  támadáspontja  $\mathbf{F}_1$  metszészvonalon lévő támadáspontjába totható,  $-\mathbf{F}_2$  támadáspontját pedig úgy hozhatjuk fedésbe  $-\mathbf{F}_1$  támadáspontjával, hogy megváltoztatjuk a  $\pm\mathbf{F}_2$  erőpár erőkarját – de ekkor az erők nagyságát is meg kell változtatni,  $\pm\tilde{\mathbf{F}}_2$ -re, úgy, hogy a nyomaték nagysága ne változzon. Ezzel az eljárással az eredeti erőpárok helyettesíthetők olyan, azonos nyomatékú erőpárokkal, melyek támadáspontjai párosával azonos pontokba kerülnek, azaz vissza lehet vezetni a problémát két-két azonos támadáspontú erő összegére. Az erők a statika alapelvei szerint vektoriálisan összegezhethők, eredményül pedig egy újabb erőpárt kapunk, aminek a nyomatéka – a vektoriális szorzás tulajdonságaiból következően – az eredeti nyomatékok vektori összege.



**3.4. ábra.** Az (1)-es síkban lévő  $\mathbf{F}_1$ ,  $-\mathbf{F}_1$  és a (2)-es síkban lévő  $\mathbf{F}_2$ ,  $-\mathbf{F}_2$  erőpárok összegzésének visszavezetése erők összegzésére az erőpárok elforgatásával, az erők hatásvonal menti eltolásával, illetve az erőkar és az erők nagyságának megfelelő változtatásával

## 3.2. Kapcsolat a pontra és tengelyre számított nyomatékok között

A 3.2. ábra szerint a pontra és tengelyre számított nyomatékok között az alábbi kapcsolat írható fel:

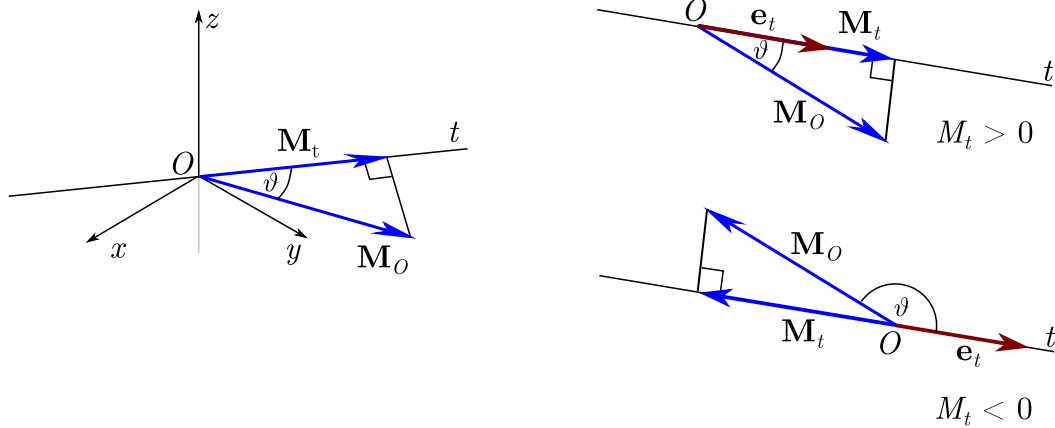
$$\mathbf{M}_t = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}_\perp, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{r}_{OP} \times (\mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel) \equiv \mathbf{M}_t + \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}_\parallel. \quad (3.11)$$

Mivel  $\mathbf{F}_\parallel$  párhuzamos a  $t$  tengellyel, a vektoriális szorzás tulajdonságai miatt  $\mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}_\parallel$  mindenképpen merőleges lesz a tengelyre, azaz az  $\mathbf{M}_t$  nyomatéokra is. Tehát a fenti képlet

szerint az  $\mathbf{M}_O$  nyomaték két egymásra merőleges komponensre bontható, melyek közül az egyik az  $\mathbf{M}_t$  tengelyre számított nyomaték.

Ezek szerint a tengelyre számított nyomaték vektora (2.2. fejezet) úgy értelmezhető, mint a pontra számított nyomaték adott tengely irányú komponense (3.5. ábra).



**3.5. ábra.** Kapcsolat a pontra és tengelyre számított nyomatékok között.  $M_t$  előjele attól függ, hogy milyen irányban vesszük fel a tengely egységnyi hosszú  $\mathbf{e}_t$  irányvektorát

Hogy előjelhelyesen megkaphassuk a tengelyre számított nyomatékot, be szoktak vezetni egy  $\mathbf{e}_t$  egységvektort a  $t$  tengely irányával párhuzamosan. Tehát  $|\mathbf{e}_t| = 1$ , és  $\mathbf{e}_t$  a tengely egységnyi hosszú irányvektora.

A tengelyre számított nyomaték értékét az  $\mathbf{e}_t$  irányvektor és az  $\mathbf{M}_O$  nyomatékvektor iránya által bezárt  $\vartheta$  szög segítségével számíthatjuk ki, az (1.6) képlethez hasonló módon:

$$M_t = |\mathbf{M}_O| \cos(\vartheta). \quad (3.12)$$

Tehát  $M_t$  lehet pozitív is, negatív is, ahogy a 3.5. ábra szemlélteti. Ha a tengely merőleges a nyomatékvektor irányára, akkor  $M_t$  zérus, abban az irányban nincs forgató hatás.

A számítások elvégzését segíti, ha a (3.12) összefüggés helyett skaláris szorzást (lásd 8.3. definíció) alkalmazunk. A skaláris szorzat definíciója szerint ugyanis  $|\mathbf{e}_t| = 1$  figyelembevételével

$$M_t = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_t = |\mathbf{M}_O| |\mathbf{e}_t| \cos(\vartheta) = |\mathbf{M}_O| \cos(\vartheta), \quad (3.13)$$

ami megegyezik a (3.12) képlettel.

Ha az  $\mathbf{M}_O = [M_x \ M_y \ M_z]^T$  nyomaték és az  $\mathbf{e}_t = [e_x \ e_y \ e_z]^T$  egységvektor koordinátái adóttak, akkor a skaláris szorzat eredményét az egymásnak megfelelő koordináták szorzatainak összegzésével kapjuk meg:

$$M_t = M_x e_x + M_y e_y + M_z e_z. \quad (3.14)$$

A skaláris szorzat eredménye a skalár értékű  $M_t$  nyomaték, de ebből képezhetjük a tengelyre számított nyomaték  $\mathbf{M}_t$  vektorát is az  $\mathbf{e}_t$  egységvektorral való szorzással, a (2.15) képlethez hasonlóan:

$$\mathbf{M}_t = M_t \mathbf{e}_t. \quad (3.15)$$

Ha  $M_t$  pozitív, akkor  $\mathbf{M}_t$  az egységvektorral egyező értelmű, ha negatív, akkor pedig azzal ellentétes, a 3.5. ábrának megfelelően.

### 3.3. Térbeli erőrendszer redukálása

A 2.4. és 2.5. fejezetekben láttuk, hogy egy tetszőleges síkbeli erőrendszer helyettesíthető egyetlen erővel vagy egyetlen erőpárral. Ezt az eljárást, mikor az erőrendszert a lehető legegyszerűbb erőrendszerrel helyettesítjük, *redukálásnak* nevezzük. A redukálás térbeli erőrendszerek esetében is elvégezhető. Ennek során ugyanazokat a lépéseket kell végrehajtani, mint a síkbeli esetben.

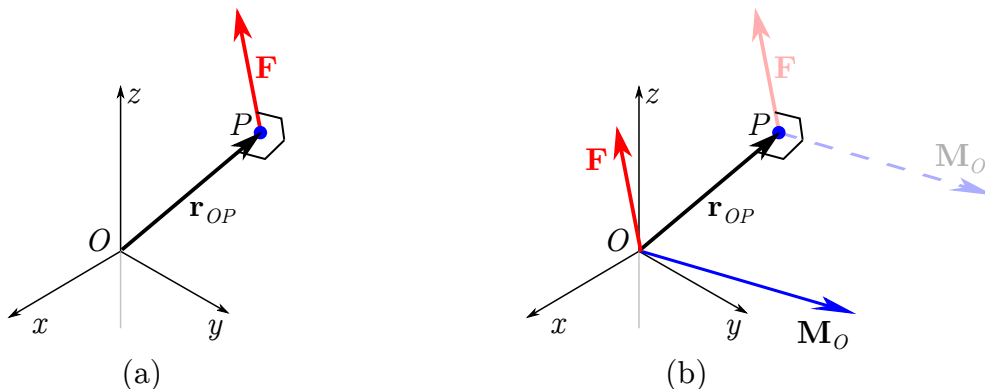
Tegyük fel, hogy a vizsgált merev testet egy  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  koncentrált erőkből és  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_m$  koncentrált erőpárokból álló erőrendszer terheli! A koncentrált erőpárok nyomatékvektorai szabad vektorok, ezért azok helyettesíthetők vektori összegükkel:

$$\mathbf{M} = \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j. \quad (3.16)$$

A koncentrált erőket is helyettesíthetjük egy eredő erővel. Síkbeli erőrendszereknél ehhez meghatározhatjuk két kiválasztott erő hatásvonalainak metszéspontját és az ott támadó részeredőt, majd ezt a részeredőt összegezzük a következő erővel, így fokozatosan megkaphatjuk az eredő erőt és a hozzá tartozó támadáspontot (lásd 2.1. ábra). Térbeli erőrendszereknél a koncentrált erők hatásvonalainak nem mindig van metszéspontja, tehát ezzel a módszerrel nem tudjuk visszavezetni a problémát közös támadáspontú erők összegzésére.

Ha az erőket azonos támadáspontba tudnánk áthelyezni, akkor itt is használhatnánk a síkbeli esetre a 2.26. ábrán bemutatott módszert az eredő meghatározására.

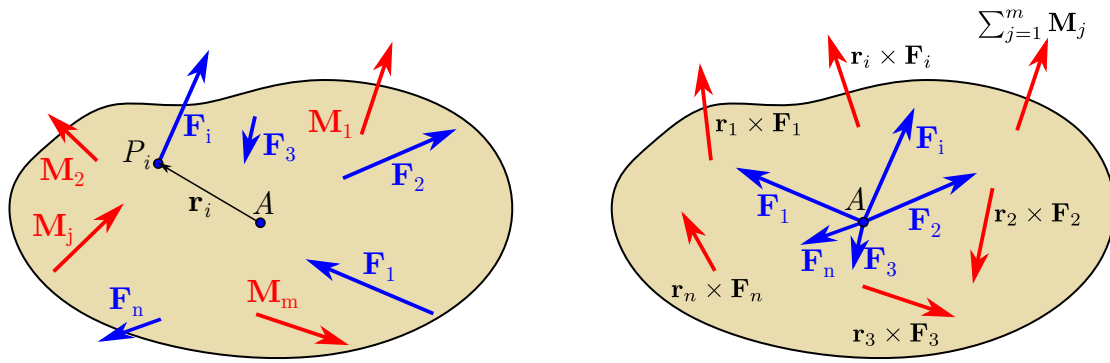
Az erő áthelyezése térbeli esetben is megtehető, a 3.6. ábrán illusztrált gondolatmenet szerint: legyen adott egy  $\mathbf{F}$  erő a  $P$  támadáspontban! Ezt az erőt át szeretnénk helyezni a test egy  $O$  pontjába, de úgy, hogy a hatása ne változzon meg. Az erő áthelyezése az erő forgató



3.6. ábra. Erő támadáspontjának áthelyezése térben

hatását változtatja meg, hiszen a  $P$ -ben támadó erőnek  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}$  az  $O$ -ra számított nyomatéka, az  $O$ -ba helyezett erőnek pedig nulla. Ezt a forgató hatást kompenzálva a  $P$  pontban támadó  $\mathbf{F}$  erő helyettesíthető egy  $O$  pontban támadó erővel és egy  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_{OP} \times \mathbf{F}$  nyomatékú koncentrált erőpárral.

Tehát ha egy  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  koncentrált erőkből és  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_m$  koncentrált erőpárokból álló erőrendszer terheli a vizsgált merev testet, akkor a koncentrált erők ezzel a módszerrel eltolhatók egy tetszőlegesen választott közös támadáspontba, amit a 3.7. ábrán  $A$



3.7. ábra. Erőrendszer redukálása térben

jelöl. A közös támadáspontú erők már vektorként összegezhetőek, tehát az eredeti erőrendszer helyettesíthető

$$\begin{aligned} \text{az } A \text{ ponton áthaladó hatásvonalú } \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \text{ erővel és} & (3.17) \\ \text{a szabad } \mathbf{M}_A &= \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \text{ erőpárral,} \end{aligned}$$

ahol  $\mathbf{r}_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$  az  $A$  pontból az  $\mathbf{F}_i$  erő hatásvonalának bármely pontjához (lásd (3.5) egyenlet) húzott vektor, és  $i = 1, \dots, n$ .

A (3.17) képlettel megadott két vektort összefoglalóan az eredeti erőrendszer  $A$  pontbeli *eredőjének* vagy  $A$ -pontbeli *redukált erőrendszerének* is nevezik. Ez az erőrendszer *statikailag egyenértékű* az eredeti erőrendszerrel. Itt a „statikai” szó arra utal, hogy csak merev testre ható erőrendszer esetében egyezik meg az eredeti és a redukált erőrendszer hatása. Deformálható testre ható erő és nyomaték egyaránt a támadáspontjához kötött, ezért csak statikai számításokhoz – például a reakcióerők számításához – használható a redukció.

Az eredő vektorait megadó fenti képleteket *síkbeli erőrendszerek* esetében is alkalmazhatjuk. Ha az összes erő hatásvonala egy síkba esik, akkor célszerű felvenni az  $xy$  síkot ezzel a síkkal párhuzamosan. Ilyenkor csak  $z$  irányú nyomaték ébredhet, ezért ekkor a síkbeli erőrendszer helyettesíthető egy

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n F_{ix} \\ \sum_{i=1}^n F_{iy} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

erővel, és egy

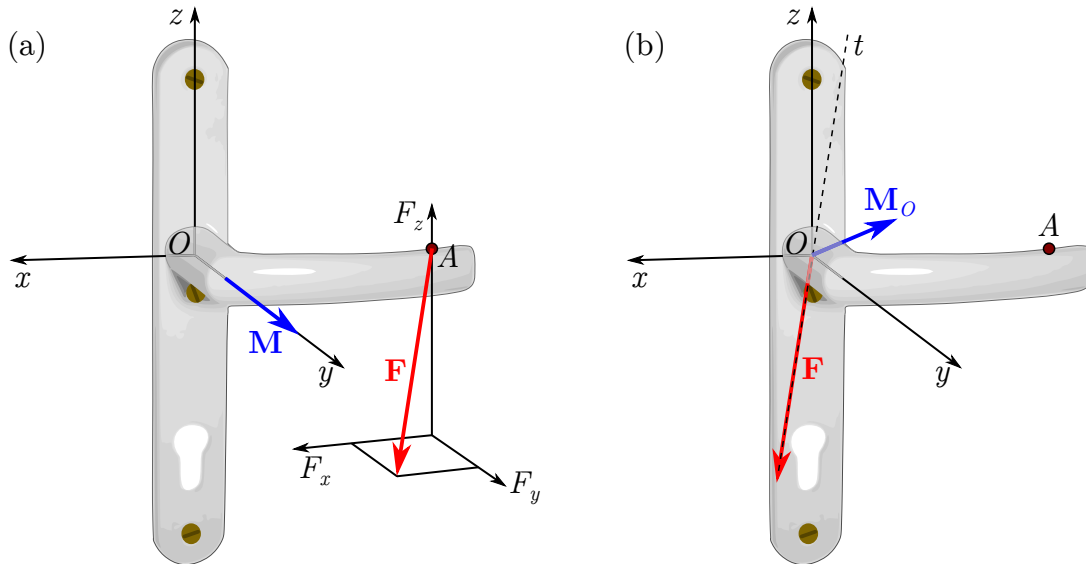
$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{j=1}^m M_{jz} + (\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)_z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{j=1}^m M_{jz} + \sum_{i=1}^n (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

nyomatékkal. Itt kihasználtuk, hogy a (3.9) egyenlet szerint a vektoriális szorzatból származó tag kifejezhető a helyvektorok és az erővektorok megfelelő koordinátáival.

**3.1. példa:** A 3.8. ábrán látható kilincstre az  $A$  pontban támadó  $\mathbf{F}$  koncentrált erő és a kilincsből származó  $\mathbf{M}$  nyomatékú koncentrált erőpár hat. A kilincset  $z$  irányban

lefelé kell nyomni a zárszerkezet nyitására, és egyúttal  $y$  irányban is erőt kell kifejteni az ajtó kinyitására. A valóságban – például mikor nem pontosan szemben állunk az ajtóval –  $x$  irányú erőt is kifejtenk. Redukáljuk az erőrendszert a kilincs tengelyébe eső  $O$  pontba, és határozzuk meg az  $\mathbf{M}_O$  nyomaték  $\mathbf{F}$  erővel párhuzamos tengelyre számított komponensét, azaz a  $t$  tengelyre számított nyomatékot!

Adatok:  $\mathbf{r}_{OA} = [-0,07 \ 0,045 \ 0,01]^T$  m,  $\mathbf{F} = [1 \ 3 \ -10]^T$  N,  $\mathbf{M} = [0 \ 0,1 \ 0]^T$  Nm.



3.8. ábra. Kilincstre ható erőrendszer az ajtó kinyitásakor

#### Megoldás:

A vizsgált erőrendszer most csak egyetlen koncentrált erőből és egy koncentrált erőpárból áll, azaz a (3.17) egyenletben  $n = 1$  és  $m = 1$ . Az adatok felhasználásával

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ N}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M} + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_z r_y - F_y r_z \\ F_x r_z - F_z r_x \\ F_y r_x - F_x r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,48 \\ -0,59 \\ -0,255 \end{bmatrix} \text{ Nm}. \quad (3.21)$$

Az  $\mathbf{F}$  erő és a  $t$  tengely irányát megadó egységvektor

$$\mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{F}}{F^2} \approx \begin{bmatrix} 0,095 \\ 0,286 \\ -0,953 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Ezt a vektort skalárisan szorozva az  $\mathbf{M}_O$  nyomatékkal, megkapjuk a  $t$  tengelyre számított nyomaték skaláris értékét. Egy további  $\mathbf{e}_t$ -vel való szorzással pedig vektorként is felírhatjuk ezt a nyomatékot:

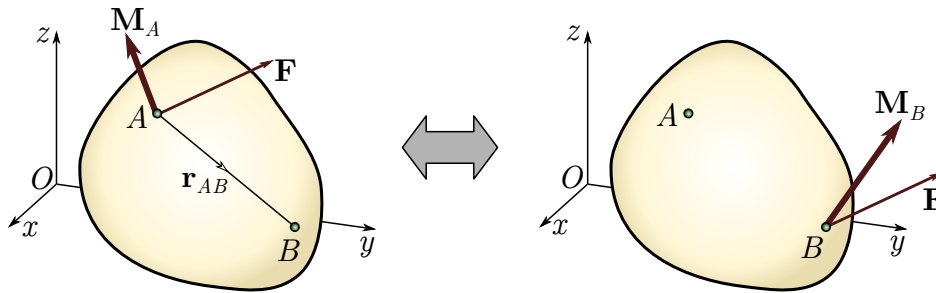
$$M_t = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{e}_t \approx [-0,48 \ -0,59 \ -0,255] \begin{bmatrix} 0,095 \\ 0,286 \\ -0,953 \end{bmatrix} \approx 0,0286 \text{ Nm}, \quad \mathbf{M}_t = M_t \mathbf{e}_t \approx \begin{bmatrix} 0,0027 \\ 0,0082 \\ -0,0273 \end{bmatrix} \text{ Nm}. \quad (3.23)$$

### 3.4. Vektorkettősök

Az előző levezetések szerint egy merev testre ható erőrendszer hatásának megadásához a következő adatok kellene: egy kiválasztott referenciapont (pl.  $A$ ) helye, az  $\mathbf{F}$  vektor három skalárkomponense, és az  $\mathbf{M}_A$  vektor három skalárkomponense. Ezeket az információkat az

$$[\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A \quad (3.24)$$

statikai vektorkettőssel szokták tömören megadni. A vektorkettős formálisan csak azt jelenti, hogy az erő és a nyomaték vektorát egymás mellé írjuk, és egy kapcsos zárójelen kívüli index utal a képzeletben eltolt  $\mathbf{F}$  erő támadáspontjára. Azért szükséges megadni ezt a külső indexet az  $\mathbf{M}_A$  nyomaték indexe mellett, mert így akkor is látható, milyen pontra vonatkozik a vektorkettős, ha az erő és a nyomaték helyébe számértékekkel megadott vektorokat írunk.



3.9. ábra. A statikai vektorkettős redukálása [A54]

A (3.17) képletből következik, hogy az  $\mathbf{F}$  és  $\mathbf{M}_A$  vektorok helyettesíthetők egy  $B$  ponton átmenő hatásvonalú  $\mathbf{F}$  erővel és az

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{M}_A + \mathbf{F} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (3.25)$$

nyomatékkal (3.9. ábra). Tehát  $\mathbf{M}_B$  két másik vektor eredőjeként fogható fel: az egyik a szabad  $\mathbf{M}_A$  nyomaték, a másik pedig az  $A$  ponton átmenő hatásvonalú  $\mathbf{F}$  erő nyomatéka. Így az  $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A$  vektorkettőst helyettesíthetjük az  $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_B]_B$  vektorkettőssel.

Minden olyan vektor-párt vektorkettősnek nevezünk, melyre ugyanez a redukálási szabály alkalmazható. A mechanikában számos esetben találkozhatunk vektorkettősökkel. Például a szögsebesség és a sebesség vektorai szintén vektorkettőst alkotnak, a kinematikai vektorkettőst:  $[\boldsymbol{\omega}; \mathbf{v}_A]_A$ . A különböző fizikai mennyiségeket megadó vektorokra külön-külön meg kell vizsgálni, hogy vektorkettőst alkotnak-e egy másik vektorral. Számos levezetés esetében támaszkodhatunk a vektorkettősök különféle tulajdonságaira, például az alábbi tételre:

**3.2. tétel.** A statikai vektorkettős két vektorának skaláris szorzata invariáns, azaz értéke független a redukálás pontjától.

**Bizonyítás:**

A (3.25) képlet szerint tetszőleges  $A$  és  $B$  pontok esetében

$$[\mathbf{F}; \mathbf{M}_B]_B = [\mathbf{F}; \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}]_B. \quad (3.26)$$

A két vektor skaláris szorzata

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_B = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}). \quad (3.27)$$

Mivel a vektoriális szorzás tulajdonságai miatt  $\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F} \perp \mathbf{F}$ , és a skaláris szorzás tulajdonságai miatt merőleges vektorok skaláris szorzata nulla,  $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_{BA} \times \mathbf{F}) = 0$ . Tehát

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_B = \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A. \quad (3.28)$$



## 3.5. A statika alaptétele

Az eddigi levezetésekéből következik, hogy egyensúlyi erőrendszer esetében a statikai vektorkettős mindkét vektora nulla. A (3.25) képlet szerint ekkor bármilyen más pontra történő redukálás is nullvektorokat eredményez.

**3.23. megjegyzés:** Mivel az erőpár két párhuzamos koncentrált erővel egyenértékű, egy merev testre ható erőrendszer három erővel helyettesíthető. Ezek a 4. alapelv szerint csak akkor lehetnek egyensúlyban, ha hatásvonalaik egy síkba esnek. Síkbeli erőrendszer viszont a 2.4. fejezet szerint vagy egy darab erővel (azaz egy  $[\mathbf{F}; \mathbf{0}]_P$  alakú vektorkettőssel), vagy egy darab erőpárral (tehát egy  $[\mathbf{0}; \mathbf{M}_P]_P$  alakú vektorkettőssel) egyenértékű. Sem egy darab erő, sem egy darab erőpár nem alkothat egyensúlyi erőrendszert (lásd 1.1. következmény és 2. alapelv), tehát egyensúlyban a vektorkettős mindkét vektora nullvektor kell legyen. ♣

Az egyensúly vizsgálata központi jelentőségű a statikában, ezért az alábbi tételt a *statika alaptételének* nevezzük:

**3.3. tétel.** A statika alaptétele: *a merev testekre ható erőrendszerek hatását egyértelműen jellemzi vektorkettősük. Egyensúlyi erőrendszer esetében egy tetszőleges pontra számított statikai vektorkettős vektorai nullvektorok:*

$$[\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A = [\mathbf{0}; \mathbf{0}]_A. \quad (3.29)$$



A statika nagy része felépíthető lenne ebből az alaptételből kiindulva, a vektorkettősben szereplő vektorok képzésének (3.17) képlettel megadott módja ismeretében. Ebből a tételből következik az 1. szuperpozíció elv, a két illetve három erő egyensúlyára vonatkozó 2. és 4. elvek, az egyensúlyi erőrendszer hozzávételéről és elvételéről szóló 3. alapelv, valamint az erőpárok egyenértékűségét kifejező 7. alapelv is.

Azonban a (3.29) tétel csupán az erőrendszerekről fogalmaz meg egy állítást, ezért a valódi szerkezetek modellezésének kérdéseit – például hogy különféle kapcsolatokat milyen kényszererők segítségével lehet tárgyalni – ettől függetlenül kell tisztázni a statika alkalmazásához. Ennek megfelelően a testek közötti kölcsönhatásokkal foglalkozó 5. alapelv (Newton 3. törvénye) és a helyettesíthetőség vagy megmerevíthetőség elve (6. alapelv) túlmutat a statika alaptételén, ezek abból nem következnek.

A statika alaptétele szerint ha egy erőrendszer  $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A$  statikai vektorkettősében nem nullvektorok szerepelnek, akkor az egyensúly biztosításához egy  $A$  pontban támadó  $-\mathbf{F}$  erőt és egy  $-\mathbf{M}_A$  nyomatékú erőpárt (vagy egy ezekkel egyenértékű erőrendszert) kell hozzávenni az eredeti erőrendszerhez.

**3.2. példa:** Határozzuk meg, hogy milyen erőrendszernek kell még hatnia a 3.1. példában tárgyalt kilincsre, hogy egyensúlyban legyen!

**Megoldás:**

A kilincs lenyomásából származó erő és a rugó nyomatéka az alábbi vektorokkal adható meg:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ N}, \quad \mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} -0,48 \\ -0,59 \\ -0,255 \end{bmatrix} \text{ Nm} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{F}; \mathbf{M}_O]_O = \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ N}; \begin{bmatrix} -0,48 \\ -0,59 \\ -0,255 \end{bmatrix} \text{ Nm} \right]_O. \quad (3.30)$$

Az egyensúlyhoz az alábbi erőt és nyomatékot kell még hozzávenni az eredeti erőrendszerhez:

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ N}, \quad \mathbf{M}'_O = \begin{bmatrix} 0,48 \\ 0,59 \\ 0,255 \end{bmatrix} \text{ Nm} \quad (3.31) \quad \spadesuit$$

### 3.6. Erőrendszerek osztályozása vektorkettősük alapján

A 2.4. fejezetben láttuk, hogy síkbeli erőrendszerek egyenértékűen helyettesíthetők egyetlen koncentrált erőpárral vagy egy koncentrált erővel. Tehát ha egy tetszőleges pontra meghatározzuk a vektorkettőt, az síkbeli erőrendszerek esetében általában tovább egyszerűsíthető.

Ebben a fejezetben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy térbeli erőrendszerek esetében hogyan lehet megtalálni a legegyszerűbb alakú vektorkettőt, a referenciapont megfelelő megválasztásával. A vektorkettősök használata lehetőséget biztosít különféle mechanikai hatások vagy állapotok tömör jelölésére és egységes eljárást ad a más referenciapontokba történő redukcióra. Ennek az a jelentősége, hogy akármilyen fizikai mennyiségekre vonatkozik is a vektorkettős, mindig ugyanúgy lehet megtalálni a lehető legegyszerűbb alakját.

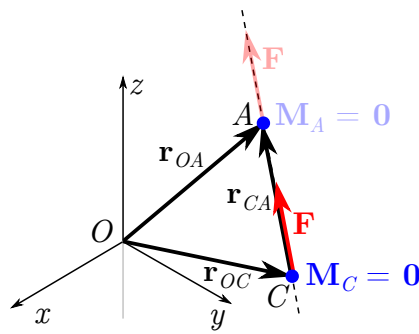
A következőkben megvizsgáljuk, hogy ha egy erőrendszert egy  $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A$  vektorkettős jellemez, akkor milyen lehetőségek vannak az erőrendszer további egyszerűsítésére. A 3.2. tétel alapján két fontos esetet különböztetünk meg, attól függően, hogy  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = 0$  teljesül-e vagy sem. Ennek a skaláris szorzatnak az értéke minden pontban ugyanakkora, ezért magát az erőrendszert jellemzi, a redukálás  $A$  pontjától független.

I.  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = 0$ . A skaláris szorzat tulajdonságai miatt ez az eset akkor fordulhat elő, ha valamelyik vektor nullvektor, vagy ha a két vektor merőleges egymásra.

- (a)  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  és  $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ : ez az *egyensúly* esete, ami tovább nem egyszerűsíthető.
- (b)  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , de  $\mathbf{M}_A \neq \mathbf{0}$ . Ebben az esetben a legegyszerűbb eredő egyetlen *erőpár*, mely szabadon eltolható a test bármely pontjába, amire az erőrendszer hat.
- (c)  $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ , de  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ . Ekkor az eredő egyetlen  $\mathbf{F}$  erő – ezzel az esettel találkoztunk a 2.4. fejezetben. Az eredő erő hatásvonalát – mely az  $A$  ponton halad keresztül – *centrális egyenesnek* nevezzük.

A centrális egyenes bármely pontjába is redukáljuk az  $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A$  vektorkettőt, a nyomatékvektor mindig nulla marad, hiszen például egy  $C$  pontot választva  $\mathbf{r}_{CA} \parallel \mathbf{F}$  miatt  $\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$ . Ez annak felel meg, hogy az erő a hatásvonala mentén eltolható (3.10. ábra).

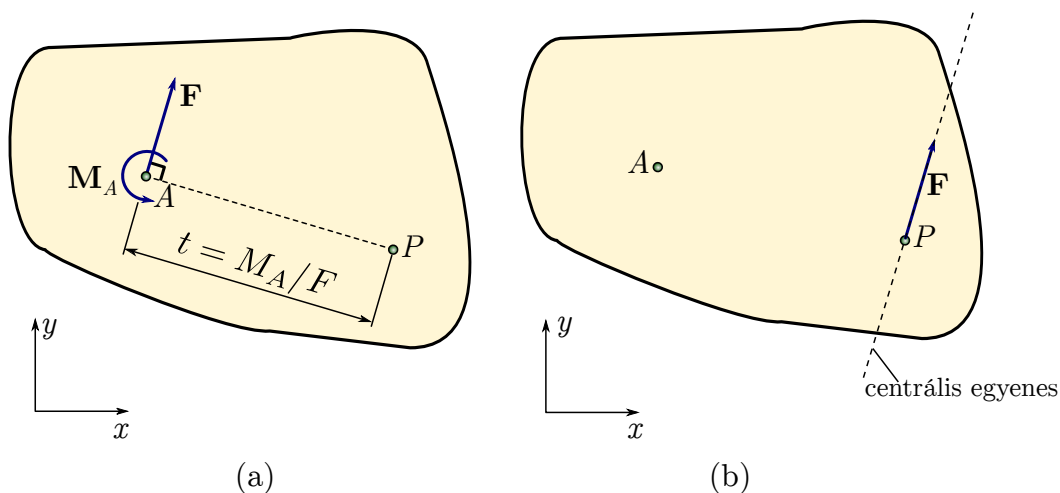




**3.10. ábra.** Egyetlen erőből álló erőrendszer redukálása a hatásvonal  $A$  pontjából a hatásvonal  $C$  pontjába

- (d)  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = 0$ , de  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$  és  $\mathbf{M}_A \neq \mathbf{0}$ . Ez csak akkor fordulhat elő, ha  $\mathbf{F} \perp \mathbf{M}_A$ . Ennek speciális esete a 2.4. fejezetben tárgyalt síkbeli erőrendszer, és ahhoz hasonlóan tárgyalható: a legegyszerűbb eredő most is egyetlen koncentrált erő. Egy másik lehetséges eset, amikor nem egy síkba eső hatásvonalú, de párhuzamos erőkből álló erőrendszert vizsgálunk. Ezzel az esettel külön foglalkozunk majd a 3.7. fejezetben.

A 3.11. ábrán látható módon  $\mathbf{F} \perp \mathbf{M}_A$  esetén mindig lehet találni olyan  $P$  pontot, ami az  $A$  ponttól  $t = M_A/F$  távolságban van, az  $\mathbf{M}_A$  és  $\mathbf{F}$  vektorokra egyaránt merőleges irányban, és amelybe redukált vektorkettős alakja  $[\mathbf{F}; \mathbf{0}]_P$ . A centrális egyenes most a  $P$  ponton megy keresztül.



**3.11. ábra.** A centrális egyenes helyének meghatározása  $\mathbf{F} \perp \mathbf{M}_A$  esetében [A55]

Összefoglalva az eddigieket, megállapíthatjuk, hogy ha  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = 0$ , akkor az erőrendszer vagy egyensúlyi, vagy egyetlen egy erővel vagy erőpárral helyettesíthető.

- II.  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A \neq 0$ . Ekkor egyik vektor sem lehet zérus, és nem is merőlegesek egymásra. Tehát az  $A$  pontra számított  $\mathbf{M}_A$  nyomaték felbontható egy  $\mathbf{F}$  erővel párhuzamos és egy arra merőleges összetevőre:

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_{A\parallel} + \mathbf{M}_{A\perp}. \quad (3.32)$$

Az előző pontban írtak szerint található olyan  $P$  pont, melybe redukálva a vektorkettőt, a nyomaték erőre merőleges komponense eltüntethető, és csak az erővel párhuzamos komponense marad meg:

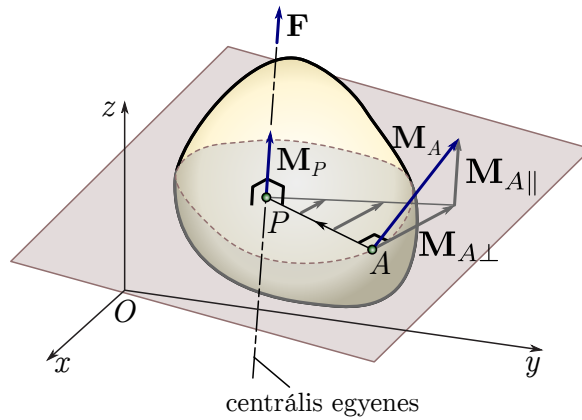
$$[\mathbf{F}; \mathbf{M}_P]_P = [\mathbf{F}; \mathbf{M}_{A\parallel}]_P. \quad (3.33)$$

A  $P$  pontba redukált vektorkettőssel jellemzett erőrendszert – mely egy erőből és egy vele párhuzamos erőpárból áll – *erőcsavarnak* nevezzük. Az erőcsavar tovább már nem egyszerűsíthető. A  $P$  ponton áthaladó, az  $\mathbf{F}$  erővel párhuzamos egyenest ebben az esetben is centrális egyenesnek nevezik (lásd 3.12. ábra).

A  $P$  pont helyének meghatározását megkönnyíti az alábbi tétel:

**3.4. tétel.** *Ha egy merev testre ható erőrendszer vektorkettőssében szereplő  $\mathbf{F}$  erő nem nulla, akkor mindig választható végtelen sok olyan  $P$  pont a testen, melyekbe redukálva az erőrendszert, az  $\mathbf{M}_P$  nyomaték nulla vagy párhuzamos az  $\mathbf{F}$  erővel. Az ilyen tulajdonságú pontok egy  $\mathbf{F}$ -vel párhuzamos egyenesen, a centrális egyenesen helyezkednek el. A centrális egyenesnek a merev test egy  $A$  pontjához legközelebbi  $P$  pontja az  $A$ -n átmenő,  $\mathbf{F}$ -re merőleges síkban helyezkedik el, és helye a következő vektorral adható meg:*

$$\mathbf{r}_{AP} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M}_A}{F^2}. \quad (3.34)$$



**3.12. ábra.** *A legegyszerűbb vektorkettős meghatározása. A centrális egyenes  $P$  pontját az  $A$  ponton áthaladó,  $\mathbf{F}$ -re merőleges síkon keressük [A56]*

#### Bizonyítás:

A vektorkettősök redukációjával kapcsolatban levezetett

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_A + \mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{M}_A + \mathbf{F} \times \mathbf{r}_{AP} \quad (3.35)$$

formulát balról vektoriálisan szorozva az  $\mathbf{F}$  vektorral, a keresett  $P$  pontot jellemző  $\mathbf{M}_P \parallel \mathbf{F}$  vagy  $\mathbf{M}_P = \mathbf{0}$  feltételek miatt (mindkét esetben  $\mathbf{F} \times \mathbf{M}_P = \mathbf{0}$ ) azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{0} = \mathbf{F} \times \mathbf{M}_A + \mathbf{F} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{r}_{AP}).$$

A 8.6. kifejtési tétel segítségével a jobb oldal átírható:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F} \times \mathbf{M}_A + \mathbf{F}(\mathbf{r}_{AP} \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{r}_{AP}F^2. \quad (3.36)$$

Ahogy a 3.12. ábra is mutatja, a  $P$  pontot az  $A$  ponton átmenő,  $\mathbf{F}$ -ra merőleges síkban keressük (triviális, hogy így található meg a centrális egyenes  $A$ -hoz legközelebbi pontja), ezért  $\mathbf{r}_{AP} \perp \mathbf{F}$ . Következésképpen a jobb oldal második tagjában szereplő skaláris szorzat eredménye nulla, így a (3.36) képletből kifejezhető a keresett  $\mathbf{r}_{AP}$  vektor, a tétel állításának megfelelően. ♠

**3.1. következmény.** A 3.4. tételben szereplő  $P$  pontra számított nyomatékot kifejezhetjük, ha a (3.35) egyenletbe behelyettesítjük az  $\mathbf{r}_{AP}$  vektorra kapott (3.34) képletet, és kihasználjuk a 8.6. kifejtési tételt:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_A + \mathbf{F} \times \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M}_A}{F^2} = \mathbf{M}_A + \frac{1}{F^2} \mathbf{F}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A) - \frac{1}{F^2} \mathbf{M}_A F^2 = \frac{1}{F^2} \mathbf{F}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A).$$

Ha  $\mathbf{F} \perp \mathbf{M}_A$ , akkor az  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A = 0$  skaláris szorzat miatt  $\mathbf{M}_P = \mathbf{0}$ .

Ha  $\mathbf{F} \not\perp \mathbf{M}_A$ , akkor  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{M}_A \neq 0$  skalár szám, ezért  $\mathbf{M}_P \parallel \mathbf{F}$ , tehát a centrális egyenes pontjaira számított nyomaték párhuzamos az  $\mathbf{F}$  erővel. ♠

**3.3. példa:** Határozzuk meg a 3.1. példában a kilincstre (lásd 3.8. ábra) ható erőrendszer legegyszerűbb vektorkettősét, és a centrális egyenest! Az erőrendszert az alábbi vektorkettős jellemzi:

$$[\mathbf{F}; \mathbf{M}_O]_O = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ -10 \end{array} \right] \text{ N;} \\ \left[ \begin{array}{c} -0,48 \\ -0,59 \\ -0,255 \end{array} \right] \text{ Nm} \end{array} \right]_O. \quad (3.37)$$

**Megoldás:**

A (3.37) egyenlettel megadott vektorkettős egy tetszőlegesen választott pontba történt redukció eredménye. A redukálás referenciapontjának a (3.34) egyenlet szerinti megválasztásával egyszerűsíteni tudunk ezen a vektorkettősön. A centrális egyenes megfelelő  $P$  pontjának helyét – felhasználva, hogy  $F^2 = 1^2 + 3^2 + (-10)^2 = 110 \text{ N}^2$  – az alábbi vektor adja meg:

$$\mathbf{r}_{OP} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M}_O}{F^2} = \frac{1}{110} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,48 \\ -0,59 \\ -0,255 \end{bmatrix} = \frac{1}{110} \begin{bmatrix} -6,665 \\ 5,055 \\ 0,85 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0,0606 \\ 0,046 \\ 0,0077 \end{bmatrix} \text{ m}. \quad (3.38)$$

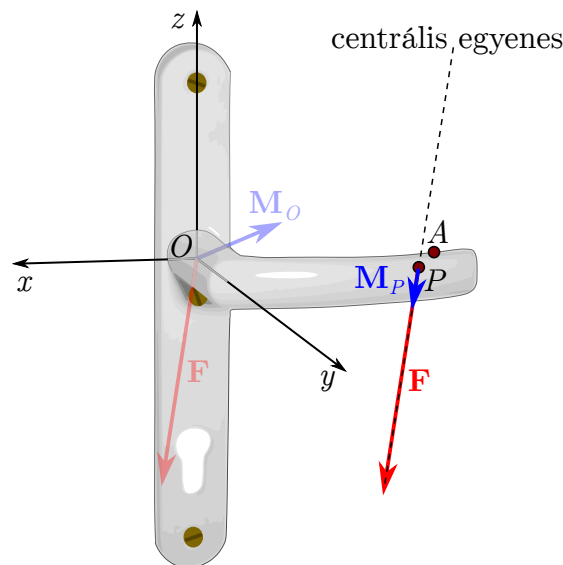
Figyelembe véve, hogy a 3.1. példa szerint  $\mathbf{r}_{OA} = [-0,07 \ 0,045 \ 0,01]^T \text{ m}$ , a  $P$  pont az  $F$  erő eredeti támadáspontja – az  $A$  pont – közelében helyezkedik el, ahogy a 3.13. ábra mutatja.

Most alkalmazhatjuk a (3.25) képletet a  $P$  pontra számított nyomaték meghatározásához:

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{M}_O + \mathbf{r}_{PO} \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -0,48 \\ -0,59 \\ -0,255 \end{bmatrix} \text{ Nm} + \begin{bmatrix} 0,0606 \\ -0,046 \\ -0,0077 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} \text{ Nm} = \begin{bmatrix} 0,002727 \\ 0,0081818 \\ -0,02727 \end{bmatrix} \text{ Nm}. \quad (3.39)$$

Itt ügyelni kell arra, hogy ebben az egyenletben az  $\mathbf{r}_{OP}$  vektor *ellentettje* szerepel. A fenti számítás szerint az erőrendszert jellemző legegyszerűbb vektorkettős:

$$[\mathbf{F}; \mathbf{M}_P]_P = \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ -10 \end{array} \right] \text{ N;} \\ \left[ \begin{array}{c} 0,002727 \\ 0,0081818 \\ -0,02727 \end{array} \right] \text{ Nm} \end{array} \right]_P. \quad (3.40)$$



3.13. ábra. Kilincstre ható erőrendszer legegyszerűbb redukáltja

Bár ebben a formában közvetlenül nem látszik, hogy ez a vektorkettős egyszerűbb, mint amiből kiindultunk, ellenőrizhető, hogy az  $\mathbf{M}_P$  vektor párhuzamos az  $\mathbf{F}$  erővektorral. Párhuzamos vektorok vektoriális szorzata nullvektor, és valóban teljesül, hogy a kerekítési hibahatáron belül  $\mathbf{F} \times \mathbf{M}_P = \mathbf{0}$ .

A centrális egyenes az  $\mathbf{F}$  vektorral párhuzamos és a  $P$  ponton halad át, tehát paraméteres vektoregyenlete

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_{OP} + \lambda \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} = \begin{bmatrix} -0,0606 \\ 0,046 \\ 0,0077 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0,0953 \\ 0,2860 \\ -0,9535 \end{bmatrix} \text{ m}, \quad (3.41)$$

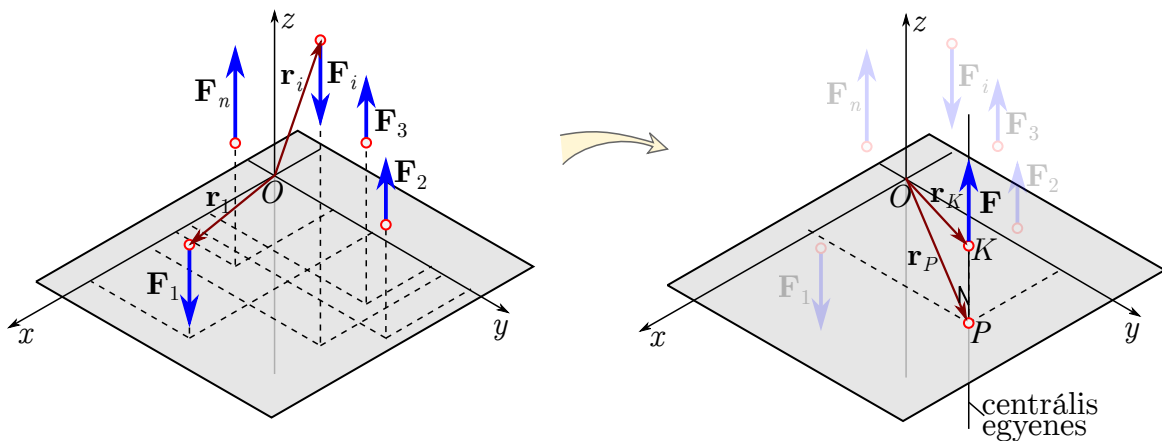
ahol a  $\lambda$  paraméter a centrális egyenes mentén a  $P$  ponttól mért távolságot adja meg méterben. ♠

## 3.7. Megoszló erőrendszerek, súlypont

### 3.7.1. Párhuzamos erőrendszer középpontja

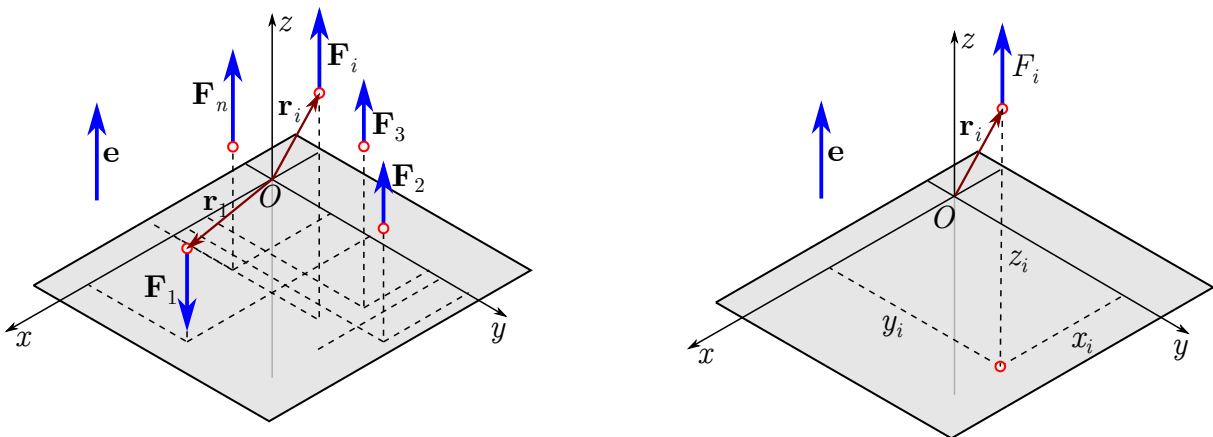
A gyakorlatban fontos az az eset, amikor egy erőrendszer párhuzamos, de nem egy síkba eső hatásvonalú erőkből áll, mint a 3.14. ábrán. Az erőrendszerből tetszőlegesen kiválasztott két erő helyettesíthető egyetlen erővel a 2.1. fejezetben leírt módon, ami párhuzamos lesz az erők irányával. Tehát az erőket egymás után párosával összegezve a teljes erőrendszer is helyettesíthető egyetlen  $\mathbf{F}$  erővel, feltéve, hogy nem jutunk az eljárás végén egy erőpárhoz. Vizsgáljuk meg, hogy hol lesz az eredő erő  $K$  támadáspontja!

A számításaink során fel fogjuk használni, hogy az erőrendszerben szereplő összes erő kifejezhető  $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  alakban, ahol az  $\mathbf{e}$  egységvektort az erők irányával párhuzamosan, tetszőleges irányítással felvehetjük, a 3.15. ábrának megfelelően. Ha egy  $\mathbf{F}_i$  vektor értelme megegyezik  $\mathbf{e}$  irányításával, akkor  $F_i$  előjele pozitív, különben negatív.



**3.14. ábra.** Térbeli párhuzamos erőrendszer helyettesítése egyetlen, a  $K$  pontban támadó  $\mathbf{F}$  erővel

Ennek a felírási módnak az az előnye, hogy így az  $\mathbf{e}$  vektor kiemelhető lesz az egyensúlyi egyenletekből.



**3.15. ábra.** Térbeli párhuzamos erőrendszer centrális egyenesének meghatározása. Számítások elvégzéséhez célszerű a koordináta-rendszer egyik tengelyét – mint itt a  $z$  tengelyt – az erővektorokkal párhuzamosan felvenni

Az erőrendszert egy tetszőleges  $O$  pontba redukálva az alábbi vektorokat kapjuk:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{e} = \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \mathbf{e},$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (F_i \mathbf{e}) = \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i \right) \times \mathbf{e}, \quad (3.42)$$

ahol  $\mathbf{r}_i$  az  $O$  pontból az  $\mathbf{F}_i$  erő támadáspontjába mutató helyvektor (lásd 3.15. ábra). A (3.42) egyenletekből látható, hogy  $\mathbf{F} \perp \mathbf{M}_O$ , hiszen az  $\mathbf{e}$  vektorral vett vektoriális szorzat merőleges az  $\mathbf{e}$  vektorra. Tehát a 3.6. fejezetben írtak szerint is azt kapjuk, hogy egyetlen  $\mathbf{F}$  erővel (vagy egyetlen erőpárral, ha  $\sum_{i=1}^n F_i = 0$ , de ezt az esetet most kizárjuk) helyettesíthető ez az erőrendszer. Az eredő  $\mathbf{F}$  erő nyomatéka természetesen nulla a saját hatásvonalának pontjaira,

tehát a támadáspontja egy olyan  $K$  pont, amibe az erőrendszert redukálva  $\mathbf{M}_K = \mathbf{0}$ . Ennek a pontnak a helyét az  $O$ -ból  $K$ -ba mutató  $\mathbf{r}_K = \mathbf{r}_{OK} = -\mathbf{r}_{KO}$  helyvektor adja meg.

A (3.42) eredményeket felhasználva a nyomaték számítás (3.25) képletében, arra az eredményre jutunk, hogy

$$\mathbf{M}_K = \mathbf{M}_O + \mathbf{F} \times \mathbf{r}_K = \mathbf{M}_O - \mathbf{r}_K \times \mathbf{F} = \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i \right) \times \mathbf{e} - \mathbf{r}_K \times \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \mathbf{e} \quad (3.43)$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i \right) \times \mathbf{e} - \mathbf{r}_K \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \times \mathbf{e} = \left( \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i \right) - \mathbf{r}_K \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \right) \times \mathbf{e}. \quad (3.44)$$

Azt az  $\mathbf{r}_K$  helyvektort keressük, amivel az erőrendszer  $\mathbf{K}$  pontra számított nyomatéka nulla, azaz

$$\mathbf{M}_K \equiv \left( \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i \right) - \mathbf{r}_K \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \right) \times \mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (3.45)$$

A (3.45) egyenletet végtelen sok  $\mathbf{r}_K$  vektor ki tudja elégíteni, hiszen az  $\mathbf{r}_i$  és  $\mathbf{r}_K$  vektorok  $\mathbf{e}$ -vel párhuzamos komponensei nullvektort adnak az  $\mathbf{e}$ -vel vett vektoriális szorzás során, azok nem befolyásolják az  $\mathbf{M}_K$  vektort. Tehát ha egy  $\mathbf{r}_K$  vektor kielégíti a fenti egyenletet, akkor egy tetszőleges  $\lambda$  számmal vett  $\mathbf{r}_K + \lambda \mathbf{e}$  alakú vektor is kielégíti. Ez annak felel meg, hogy a merev testre ható erők eltolhatók a hatásvonaluk mentén, és hatásuk nem változik.

A (3.45) egyenletnek azonban van egy olyan különleges megoldása, ami *nem függ az  $\mathbf{e}$  vektor irányától* – és ez egyben a legegyszerűbb megoldás is:

$$\left( \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i \right) - \mathbf{r}_K \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \right) = \mathbf{0}, \quad (3.46)$$

amiből

$$\mathbf{r}_K = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (3.47)$$

A fenti képlettel definiált  $K$  pontot a *párhuzamos erők középpontjának* nevezzük. A képletből is látszik, hogy ez a pont akkor található meg, ha  $\sum_{i=1}^n F_i \neq 0$ . Ellenkező esetben az erőrendszer nem egy koncentrált erővel helyettesíthető, hanem vagy egyensúlyi, vagy pedig egy erőpárral egyenértékű a hatása.

**3.24. megjegyzés:** A párhuzamos erők középpontja a centrális egyenes meghatározására szolgáló (3.34) képlet alapján is tárgyalható. Vegyünk fel egy olyan koordináta-rendszert, aminek a  $z$  tengelye párhuzamos az erővektorok irányával, ahogy a 3.15. ábrán látható! Ekkor az egyes vektorok felírhatók  $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{k}$  alakban is, ahol  $\mathbf{k}$  a  $z$  tengely bázisvektora,  $F_i$  pedig az erők előjelhelyes nagyságát – azaz ebben az esetben az erők  $z$  koordinátáját – jelöli.

Az eredő erő vektora a fentiek szerint

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^n F_i \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Egy  $\mathbf{F}_i$  vektor  $O$  pontra számított nyomatéka

$$\mathbf{M}_{O_i} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i F_i \\ -x_i F_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

tehát az egész erőrendszer  $O$  pontra számított nyomatéka

$$\mathbf{M}_O = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i F_i \\ \sum_{i=1}^n -x_i F_i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

A centrális egyenes egy  $P$  pontjának helyvektora a (3.12) képlet szerint

$$\mathbf{r}_{OP} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{M}_O}{F^2} = \frac{1}{(\sum_{i=1}^n F_i)^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{i=1}^n F_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i F_i \\ \sum_{i=1}^n -x_i F_i \\ 0 \end{bmatrix} = \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{(\sum_{i=1}^n F_i)^2} \begin{bmatrix} -(\sum_{i=1}^n -x_i F_i)(\sum_{i=1}^n F_i) \\ (\sum_{i=1}^n y_i F_i)(\sum_{i=1}^n F_i) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i F_i) / (\sum_{i=1}^n F_i) \\ (\sum_{i=1}^n y_i F_i) / (\sum_{i=1}^n F_i) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

ami az  $O$  pont centrális egyenesre való merőleges vetítésének felel meg, ahogy a 3.14. ábra mutatja. A centrális egyenes többi pontja paraméteresen

$$\mathbf{r}^z(t) = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i F_i) / (\sum_{i=1}^n F_i) \\ (\sum_{i=1}^n y_i F_i) / (\sum_{i=1}^n F_i) \\ t \end{bmatrix}$$

alakban adható meg erre a  $z$  tengellyel párhuzamos erőrendszerre. A  $t$  paraméter megfelelő értékével visszakapjuk a (3.47) képlettel megadott  $K$  pont helyvektorát.

Ha ugyanezt a számítást elvégezzük arra az esetre, amikor az összes erő iránya megváltozik, de a támadáspontja ugyanaz marad, akkor egy másik centrális egyenest kapunk. Például ha az erők az  $y$  tengellyel párhuzamosak, akkor az ehhez tartozó centrális egyenes egyenlete

$$\mathbf{r}^y(t) = \begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i F_i) / (\sum_{i=1}^n F_i) \\ t \\ (\sum_{i=1}^n z_i F_i) / (\sum_{i=1}^n F_i) \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

A számítás tehát azt mutatja, hogy a

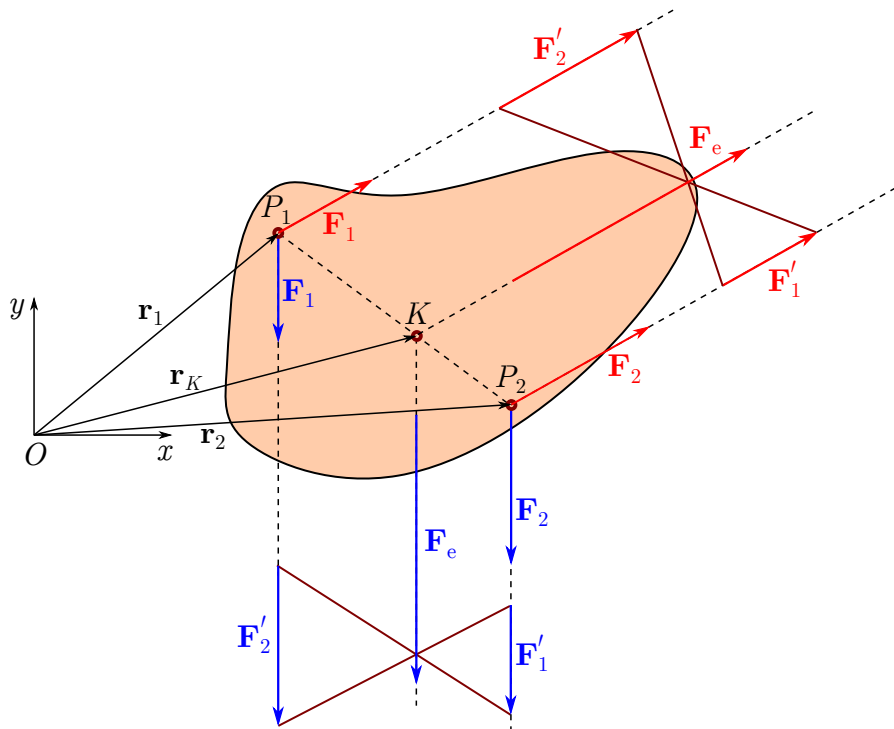
$$\begin{bmatrix} (\sum_{i=1}^n x_i F_i) / (\sum_{i=1}^n F_i) \\ (\sum_{i=1}^n y_i F_i) / (\sum_{i=1}^n F_i) \\ (\sum_{i=1}^n z_i F_i) / (\sum_{i=1}^n F_i) \end{bmatrix} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \equiv \mathbf{r}_K \quad (3.54)$$

ponton, azaz a párhuzamos erők középpontján az erők irányától függetlenül mindig áthalad a centrális egyenes. ♣

A párhuzamos erők középpontjának az erők irányától való függetlenségét a 3.16. ábra szemlélteti síkbeli erők esetére. Az ábrán megszerkesztettük az eredő hatásvonalát a 2.1. fejezetben leírt módon, az egymással párhuzamos  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők két helyzetében. Látható, hogy az  $\mathbf{F}_e$  eredő hatásvonala mindkét esetben a  $K$  ponton megy át. Ha az ábra síkjából is kiforgatnánk az erővektorokat, akkor egy harmadik egyenesre adódna a hatásvonal, ami megint a  $K$  ponton haladna keresztül.

A (3.47) képletet úgy is tekinthetjük, hogy az egy súlyozott átlag képzés. A nagyobb  $F_i$  erők  $\mathbf{r}_i$  vektorai nagyobb mértékben hozzájárulnak az  $\mathbf{r}_K$  vektorhoz. Két erő esetében (lásd 3.16. ábra)

$$\mathbf{r}_K = \frac{\mathbf{r}_1 F_1 + \mathbf{r}_2 F_2}{F_1 + F_2}. \quad (3.55)$$



**3.16. ábra.** A párhuzamos erőrendszer középpontjának szerkesztése két erő esetében, két különböző (eltérő színnel jelölt) irány mellett. A vesszővel jelölt vektorok azok, amiket a másik erő hatásvonalára másoltunk az eredő hatásvonalának meghatározásához

Ha a (3.55) egyenlet mindkét oldalából kivonunk  $\mathbf{r}_K$ -t, az annak felel meg, hogy a koordináta-rendszerünk  $O$  origóját a  $K$  pontba toljuk, és onnan mérjük fel az  $\mathbf{F}_1$  és  $\mathbf{F}_2$  erők hatásvonalaihoz húzott helyvektorokat. Ebben az esetben azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{0} = \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_K)F_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_K)F_2}{F_1 + F_2}. \quad (3.56)$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_K)F_1$  és  $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_K)F_2$  egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú vektorok. Tehát a  $K$  pont a két erő támadáspontjait összekötő szakaszon helyezkedik el. A 3.16. ábra jelöléseivel  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_K$  a  $K$  pontból a  $P_1$  pontba,  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_K$  pedig a  $K$  pontból a  $P_2$  pontba mutat. A fenti képlet szerint tehát  $\overline{KP_1} F_1 = \overline{KP_2} F_2$  miatt  $\overline{KP_1}/F_2 = \overline{KP_2}/F_1$  is teljesül, azaz a  $K$  pont  $F_1/F_2$  arányban osztja a két támadáspont közti szakaszt, a nagyobb erő támadáspontjához közelebb.

**3.4. példa:** Határozzuk meg az erőrendszer középpontjának helyét a 3.16. ábrán vázolt síkbeli erőrendszerek esetében!

Adatok:

$$F_1 = 2 \text{ N}, \quad F_2 = 3 \text{ N}, \quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 15 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 30 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}. \quad (3.57)$$



**Megoldás:**

A (3.55) képlet szerint

$$\mathbf{r}_K = \frac{\mathbf{r}_1 F_1 + \mathbf{r}_2 F_2}{F_1 + F_2} = \begin{bmatrix} 24 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}, \quad (3.58)$$

amiből

$$\mathbf{r}'_1 \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}, \quad \text{és} \quad \mathbf{r}'_2 \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_K = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ cm}. \quad (3.59)$$

Ezeknek a vektoroknak a koordinátáiból látszik, hogy a  $K$  pont valóban  $F_1 : F_2 = 2 : 3$  arányban osztja a két támadáspont közötti távolságot, továbbá az is teljesül, hogy

$$\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_K)F_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_K)F_2}{F_1 + F_2} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -9 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ 6 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.60) \quad \spadesuit$$

A fenti példából is látszik, hogy ha a párhuzamos erők  $K$  középpontjában vesszük fel koordináta-rendszerünk origóját, akkor az innen az egyes támadáspontokba mutató  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_K$  vektorokkal

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} = \mathbf{0} \quad (3.61)$$

teljesül. A bal oldalon álló tag számlálója az erőrendszer  $K$  pontra számított ún. *statikai nyomatéka*. A statikai nyomaték tulajdonságairól bővebben lesz szó a 3.7.2. fejezetben, ami a súlypont fogalmát tárgyalja a párhuzamos erők középpontjának egy speciális eseteként.

### 3.7.2. Súlypont

#### Gravitáció, nehézségi erő, súly

A súlypont definíciójához tisztázzuk a gravitációs erő, a nehézségi erő, és a súly fogalma közötti különbségeket.

**A gravitációs erő** bármely két, tömeggel rendelkező test között ható, vonzó erő. Egy  $m_1$  tömegű tömegpont által egy másik,  $m_2$  tömegű tömegpontra ható gravitációs erő

$$\mathbf{F}_{gr} = -\gamma \frac{m_1 m_2 \mathbf{r}}{r^2 r}, \quad (3.62)$$

ahol az  $\mathbf{r}$  vektor  $m_1$ -től  $m_2$ -höz mutat,  $\gamma \approx 6,67408 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$  pedig a gravitációs állandó. A gravitációs erő nagysága tehát a távolság négyzetével fordítottan arányos, és az ebből származó erőrendszer nem párhuzamos elemi erőkből áll (lásd 1.53. ábra).

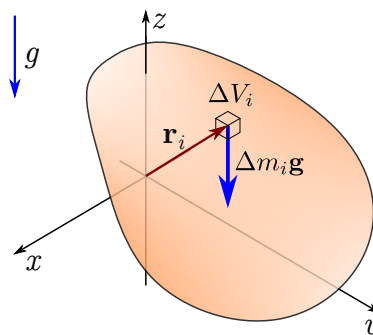
**A nehézségi erő**t egy forgó égitest felszíne közelében értelmezzük. Az égitest közelében lévő testekre hat a gravitációs erő és – mivel a forgás miatt az égitest nem inerciarendszer (lásd 1.1. megjegyzés) – tehetetlenségi erők is fellépnek. A nehézségi erő az égitest felszínén nyugvó testre ható gravitációs erő és a tehetetlenségi erő (centrifugális erő) eredője. A tehetetlenségi erők – a gravitációs erőhöz hasonló módon – a test tömegével

arányosak, ezért ezek kifejezéséből kiemelhető a vizsgált test  $m$  tömege. Következésképpen a nehézségi erő  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$  alakban adható meg, ahol  $\mathbf{g}$  a nehézségi gyorsulás vektora, ami az égitest számos paraméterétől függ és a felszín különböző pontjaiban különböző irányú és nagyságú. A gyakorlati feladatok túlnyomó többségében az előforduló magasságok és a felszín mentén mért jellemző távolságok elhanyagolhatóak a (nem pontosan gömb alakú) Föld  $R \approx 6378$  km-es sugarához képest. Ezért a gravitációs erő és a centrifugális erő helytől való függésétől eltekintve, a felszín egy pontja közelében ugyanazzal a  $\mathbf{g}$  nehézségi gyorsulással számolhatunk, ami Magyarországon  $g \approx 9,81$  m/s<sup>2</sup> nagyságú. Ennek megfelelően *párhuzamos hatásvonalú erőrendszerként* kezelhető a nehézségi erőter.

**A súly** azt az erőt jelenti, amivel a test az alátámasztását nyomja vagy a felfüggesztését húzza – *tehát nem a vizsgált testre, hanem annak környezetére hat*. A súly ebben az értelmezésben az az erő, amit egy test felemelésekor érzünk. Természetesen „nehezebbnek” érzünk egy testet, ha nagyobb gyorsulással akarjuk megmozdítani, ezért a súly függ a vizsgált test gyorsulásától. A Föld felszínén nyugvó test súlya a talajról átadódó normálerő ellenereje, a *talajra ható*  $m\mathbf{g}$  erő. Egy szabadon eső,  $\mathbf{g}$  gyorsulású test azonban nincs alátámasztva, súlya nulla, azaz a súlytalanság állapotában van (lásd 1.4. példa).

### A súlypont helyvektorának meghatározása

A gravitációs erő és a Föld felszíne közelében abból származtatható nehézségi erő térfogaton megoszló erők, azaz az erőterben elhelyezkedő testek minden egyes kis darabjára hatnak. A Földhöz képest kis méretű testek esetében elhanyagolhatjuk azt, hogy a gravitációs gyorsulás iránya és nagysága, valamint a Föld forgásából származó tehetetlenségi erő is függ a helytől, tehát számolhatunk ugyanazzal a  $\mathbf{g}$  nehézségi gyorsulással. Ha a testet felosztjuk kis  $\Delta V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  térfogatú elemekre, melyek tömege  $\Delta m_i$ , akkor az  $i$ -edik kis térfogatelemre  $\Delta G_i = \Delta m_i g$  nehézségi erő hat (3.17. ábra). Ha elég kicsik ezek a térfogatelemek, akkor feltehetjük, hogy ezeken belül állandó a test  $\rho_i$  sűrűsége, ezért  $\Delta m_i = \Delta V_i \rho_i$  miatt a térfogatelemre ható elemi nehézségi erő  $\Delta G_i = \Delta V_i \rho_i g$  alakban is kifejezhető. Feltételezéseink szerint a test teljes



3.17. ábra. Test kis  $\Delta m_i$  tömegű darabjára ható nehézségi erő

térfogatában  $\mathbf{g}$ -vel párhuzamos kis elemi erők ébrednek, tehát egy párhuzamos erőkből álló

erőrendszert kapunk. Az elemi nehézségi erők eredője

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \mathbf{g} = m \mathbf{g}, \quad (3.63)$$

ahol  $m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$  a test teljes tömege. A (3.47) egyenlet alapján az ehhez az erőrendszerhez tartozó középpont helye – amit most  $K$  helyett  $S$  jelöl:

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta G_i}{\sum_{i=1}^n \Delta G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta m_i g}{mg} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta m_i}{m}. \quad (3.64)$$

Itt kihasználtuk, hogy a  $g$  nehézségi gyorsulással lehetett egyszerűsíteni a törtet. Ha minden határon túl csökkentjük a kis tömegelemek méretét, akkor az összegzés helyett integrálással is kifejezhető az eredmény:<sup>4</sup>

$$\mathbf{r}_S = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \Delta m_i g}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i g} = \frac{\int_{(m)} \mathbf{r} g \, dm}{\int_{(m)} g \, dm} = \frac{\int_{(m)} \mathbf{r} \, dm}{\int_{(m)} dm} = \frac{\int_{(m)} \mathbf{r} \, dm}{m}. \quad (3.65)$$

Ebben a képletben  $\mathbf{r}$  egy olyan vektort jelent, aminek kezdőpontja az origóban van, végpontja pedig végigfut a test összes pontján. A fenti képlettel meghatározható  $S$  pontot – ami a párhuzamos erőkből álló nehézségi erőrendszer középpontja – a test *súlypontjának*<sup>5</sup> nevezzük.

**3.25. megjegyzés:** Az integrálás segítségével tömören kifejezhető egy folytonos tömegeloszlású test súlypontjának helyvektora. Néhány egyszerű esetben az integrál eredménye képlettel is megadható, de sokkal gyakoribb, hogy kiszámítására numerikus módszereket használnak. E módszerek a test véges sok kis darabra történő felosztásán alapulnak, tehát végső soron a (3.64) képletben szereplő összegzésekre vezetnek. ♣

A súlypont egy olyan tulajdonságú pont, hogy ha a testet felfüggesztjük valamelyik pontjában, akkor egyensúlyban a felfüggesztésre ható súlyerő hatásvonala ezen a ponton halad keresztül, bármilyen térbeli helyzetet vesz is fel a test. Ahogy a 3.18. ábra mutatja, a nyugvó testre ható nehézségi erőrendszer eredőjével egyensúlyt tartó  $\mathbf{F} = -m\mathbf{g}$  erő (az ábrán kötélérő) ellenereje éppen a felfüggesztésre ható  $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$  súlyerő, ami így a nehézségi erő eredőjével azonos nagyságú, értelmű és hatásvonalú – csak egy másik testre hat.

A súlypont helyének ismeretében eltolhatjuk koordináta-rendszerünk origóját a súlypontba. Hasonlóan járunk el, mint ahogy a (3.56) egyenlet esetében tettük, tehát a súlypontot definiál

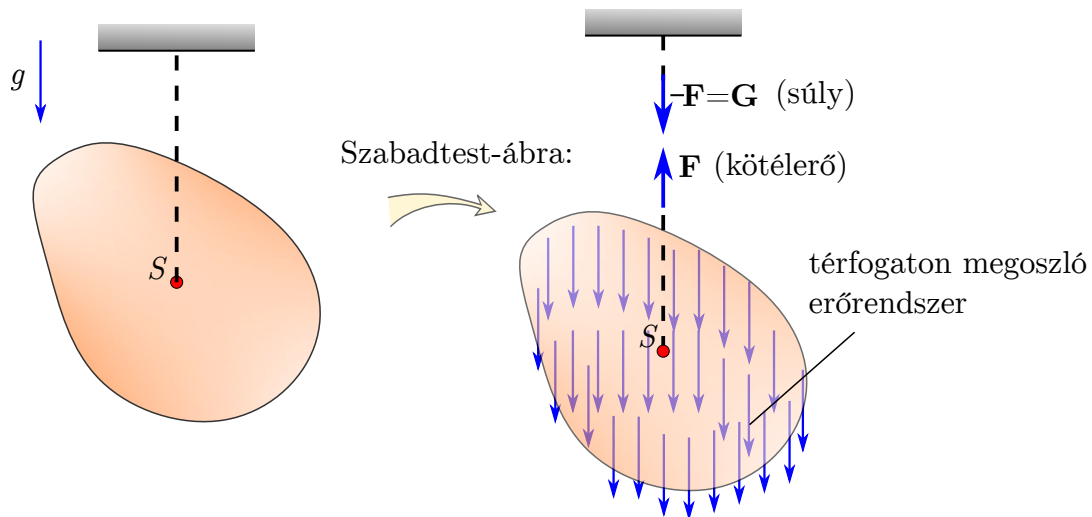
$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{(m)} \mathbf{r} \, dm}{m} \quad (3.66)$$

egyenlet mindkét oldalából kivonjuk az  $\mathbf{r}_S$  vektort. Így azt kapjuk, hogy a súlypontból a test pontjaiba mutató  $\mathbf{r}^S$  vektorral (lásd 3.19. ábra)

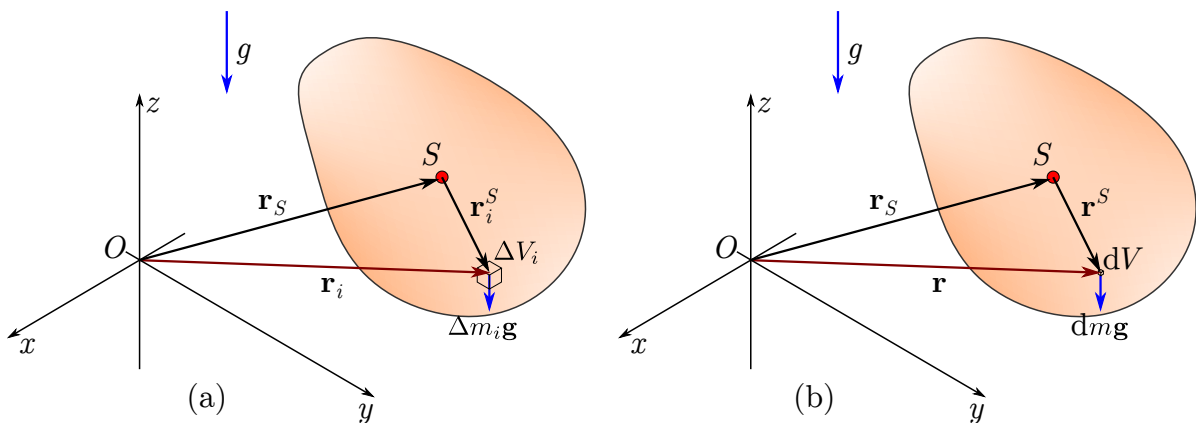
$$\mathbf{0} = \frac{\int_{(m)} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_S) \, dm}{m} \equiv \frac{\int_{(m)} \mathbf{r}^S \, dm}{m}. \quad (3.67)$$

<sup>4</sup>A tömegelemek méretének csökkentése azzal jár, hogy  $n$  darabszámuk nő, és  $\Delta m_i \rightarrow 0$  mellett  $n \rightarrow \infty$ . Ezt külön nem jelöljük, de a későbbiekben előforduló határértékszámításokat is így kell értelmezni.

<sup>5</sup>Szokásos a tömegközéppont elnevezés is.



3.18. ábra. A megosztó nehézségi erővel egyensúlyt tart az  $\mathbf{F}$  kötél erő, aminek az ellenereje a súly



3.19. ábra. (a) A súlypontból a test kis  $\Delta V_i$  térfogatú elemeihez húzott  $\mathbf{r}_i^S$  vektor értelmezése. (b) A  $\Delta V_i \rightarrow 0$  határátmenettel kapjuk a test pontjain végigfutó  $\mathbf{r}^S$  vektort

### A statikai nyomaték bevezetése és a súlypont geometriai alapú megadása

A (3.67) képlet alkalmas a súlypont fogalmának más megközelítéssel történő definíciójára is: a súlypontból felvett  $\mathbf{r}^S$  vektorokkal a (3.67) kifejezés számlálójának is nullvektort kell adnia, ezért bevezethető a *tömeg  $O$  pontra számított statikai nyomatékának* fogalma, az alábbiak szerint:

$$\mathbf{S}_O = \int_{(m)} \mathbf{r} \, dm, \quad (3.68)$$

ahol  $\mathbf{r}$  az  $O$  pontból a test pontjaiba mutató vektorokat jelöli. A fentiekből következően egy adott test esetében a *tömeg súlypontra számított statikai nyomatéka nullvektor*:  $\mathbf{S}_S = \mathbf{0}$ . Ez a kijelentés is tekinthető a súlypont definíciójának. A statikai nyomaték fogalmával a 6. fejezetben is foglalkozunk.

**3.26. megjegyzés:** Térbeli feladatokban az  $\mathbf{S}_O$  statikai nyomaték vektor skalárkomponenseit az alapján nevezik el, hogy az  $\mathbf{r}$  vektor integrálban szereplő koordinátája milyen síktól mért távolságnak felel meg. Például mivel az  $x$  koordináta az  $yz$  síktól mért előjeles távolságot adja meg, ezért

$$S_{Oyz} = \int_{(m)} x \, dm \quad (3.69)$$

a tömeg  $O$  pontra vonatkozó,  $yz$  síkra számított statikai nyomatéka. ♣

A (3.66) és (3.68) egyenletekkel kapcsolatban érdemes kiemelni, hogy azok már csak a test tömegeloszlásával kapcsolatosak, a testre ható erőrendszer tulajdonságai ezekben a kifejezésekben nem szerepelnek. A mérnöki számításokban a tömegeloszlást a  $\rho$  sűrűség segítségével célszerű kifejezni – ami általános esetben változhat a testen belül, azaz  $\rho = \rho(\mathbf{r})$ . Felhasználva, hogy az elemi tömeg  $dm = \rho(\mathbf{r})dV$  alakban írható fel, a súlypont (3.65) kifejezése átírható térfogat szerinti integrálásokra:

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{(m)} \mathbf{r} g \, dm}{\int_{(m)} g \, dm} = \frac{\int_{(V)} \mathbf{r} g \rho(\mathbf{r}) \, dV}{\int_{(V)} g \rho(\mathbf{r}) \, dV} = \frac{\int_{(V)} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \, dV}{\int_{(V)} \rho(\mathbf{r}) \, dV}. \quad (3.70)$$

Ha a test *homogén tömegeloszlású*, azaz minden pontjában azonos a sűrűsége, akkor egyszerűsíthetünk a sűrűséggel, ezért ebben az esetben

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{(V)} \mathbf{r} \, dV}{\int_{(V)} dV}. \quad (3.71)$$

Tehát a (3.68) képlet mintájára bevezethető a *térfogat  $O$  pontra számított statikai nyomatékának* fogalma is, az alábbi integrállal:

$$\mathbf{S}_O = \int_{(V)} \mathbf{r} \, dV. \quad (3.72)$$

**3.27. megjegyzés:** A nehézségi erőhöz hasonlóan, bármilyen párhuzamos elemi erőkből álló, térfogaton megoszló erőrendszer középpontja is számítható a (3.47) képlet alapján, mi szerint

$$\mathbf{r}_K = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i}. \quad (3.73)$$

Ha a testet kis  $\Delta V_i$  térfogatú darabokra bontjuk, melyekre  $\Delta F_i = f_i \Delta V_i$  erő hat, akkor

$$\mathbf{r}_K = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i f_i \Delta V_i}{\sum_{i=1}^n f_i \Delta V_i} = \frac{\int_{(V)} \mathbf{r} f(\mathbf{r}) \, dV}{\int_{(V)} f(\mathbf{r}) \, dV}, \quad (3.74)$$

ahol az  $f(\mathbf{r})$  függvény a térben megoszló erőrendszer intenzitása – vagy más kifejezéssel a *térerőssége* (lásd 1.4.1. fejezet).

Homogén testeknél az egyes térfogatelemekre ható nehézségi erő a térfogatelem méretével arányos, azaz az erő  $f(\mathbf{r})$  intenzitása állandó, és nem függ a térfogatelem  $\mathbf{r}$  helyétől. Ekkor lehet egyszerűsíteni  $f(\mathbf{r})$ -rel, és visszkapjuk a (3.71) kifejezést.

A statikai nyomaték is értelmezhető térfogaton megoszló erőrendszer esetében. Az erők  $K$  középpontjára teljesül, hogy

$$\mathbf{S}_K \equiv \int_{(V)} \mathbf{r} f(\mathbf{r}) \, dV = \mathbf{0}. \quad (3.75)$$

♣

A súlypont képletének további egyszerűsítésére is van lehetőség, ha a vizsgált test  $v$  vastagságú lemezből készült. Ekkor a térfogatelemek kifejezhetők  $dV = v dA$  alakban (lásd 3.21. ábra), ezért a súlypont helye terület szerinti integrálással is kifejezhető:

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{(V)} \mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) dV}{\int_{(V)} \varrho(\mathbf{r}) dV} = \frac{\int_{(A)} \mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) v dA}{\int_{(A)} \varrho(\mathbf{r}) v dA} = \frac{\int_{(A)} \mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) dA}{\int_{(A)} \varrho(\mathbf{r}) dA}. \quad (3.76)$$

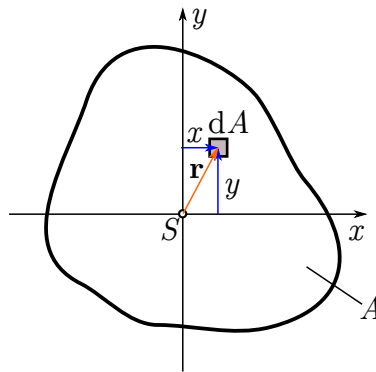
Ha a test homogén tömegeloszlású is, akkor a  $v$  vastagság mellett a sűrűséggel is lehet egyszerűsíteni, azaz

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{(A)} \mathbf{r} dA}{\int_{(A)} dA} = \frac{\int_{(A)} \mathbf{r} dA}{A}, \quad (3.77)$$

ahol  $A$  a lemez teljes területe.

A tömeg és a térfogat statikai nyomatékához hasonlóan bevezethető egy síkidom *területének  $O$  pontra számított statikai nyomatéka* is:

$$\mathbf{S}_O = \int_{(A)} \mathbf{r} dA. \quad (3.78)$$



3.20. ábra. A terület statikai nyomatékának értelmezése

Ebben az esetben felvehető egy síkbeli  $xy$  koordináta-rendszer, mint a 3.20. ábrán. A statikai nyomaték skaláris komponenseit ebben a síkbeli esetben az alapján nevezik el, hogy az  $\mathbf{r}$  vektor integrálban szereplő koordinátája melyik tengelytől mért távolságnak felel meg. Tehát a síkidom területének  $x$  tengelyre számított statikai nyomatéka

$$S_{Ox} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y_i \Delta A = \int_{(A)} y dA, \quad (3.79)$$

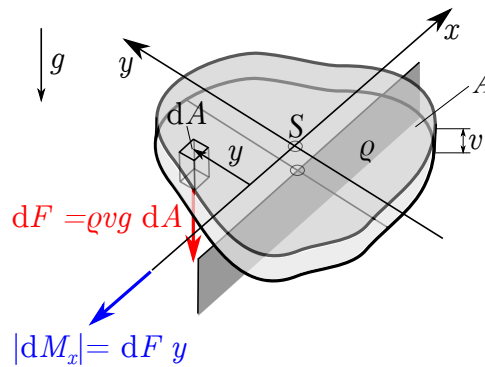
az  $y$  tengelyre számított statikai nyomaték pedig

$$S_{Oy} = \int_{(A)} x dA. \quad (3.80)$$

A statikai nyomaték elnevezése onnan származtatható, hogy ha a felületre egy rá merőleges irányú, állandó intenzitású erőrendszer hat, akkor a tengelyre számított statikai nyomatékok arányosak lesznek az erőrendszer adott tengelyekre számított nyomatékaival. Ennek az

állításnak a bizonyítását nehézségi erőteret esetére végezzük el, hiszen állandó vastagságú lemez esetében az is helyettesíthető egy állandó intenzitású, felületen megoszló erőrendszerrel.

Képzeljünk el, hogy egy  $v$  vastagságú,  $\rho$  sűrűségű lemezből elkészítjük a vizsgált síkidom makettjét (lásd 3.21. ábra)! Ha a súlyponton átmenő  $x$  tengely mentén vízszintesen alátámasztjuk ezt a lemezt, akkor annak egyensúlyban kell lennie. Az alátámasztástól  $y$  távolságra lévő kis  $dA$  területdarabra ható  $dF = \rho v g dA$  nehézségi erő  $x$  tengelyre vett erőkarja  $y$  lesz.



3.21. ábra. A statikai nyomaték értelmezése

Ha összegezzük – illetve folytonos esetben integráljuk – ezeknek az elemi erőknek az  $x$  tengelyre számított  $dM_x = -dFy = -y \rho v g dA$  nyomatékait, akkor egyensúlyban nullát kell kapnunk:

$$M_x = - \int_{(A)} y \rho v g dA = -\rho v g \int_{(A)} y dA = 0. \quad (3.81)$$

Mivel  $\rho v g$  állandó, ez megfelel az

$$S_x = \int_{(A)} y dA = 0. \quad (3.82)$$

képletnek, ami azt mondja ki, hogy a súlypontra számított statikai nyomaték  $x$  koordinátája – azaz az  $x$  tengelyre számított statikai nyomaték – nulla.

Ha az  $y$  tengely mentén támasztjuk alá a lemez alakú testet, akkor a statikai nyomaték  $y$  koordinátájára (az  $y$  tengelyre számított statikai nyomatéokra) kapunk egy hasonló feltételt:

$$S_y = \int_{(A)} x dA = 0, \quad (3.83)$$

ami az

$$M_y = \int_{(A)} x \rho v g dA = 0 \quad (3.84)$$

egyensúlyi egyenletnek feleltethető meg, mivel egy pozitív  $x$  koordinátánál lévő  $\rho v dA$  tömegű darabra ható nehézségi erő  $y$  tengelyre számított nyomatéka pozitív, az ábrán mutatott, negatív  $x$  koordinátájú darabra pedig negatív.

**3.28. megjegyzés:** A fentiek szerint egy bonyolult alakú síkidom súlypontját megkereshetjük úgy, hogy a síkidomot kivágjuk keménypapírból, aztán egy kés élén megpróbáljuk egyensúlyban tartani. Ha megvan az a vonal, ami mentén egyensúlyban tartható a kivágott lap, akkor egy másik, a talált vonalra nagyjából merőleges irányban is meg kell keresni a megfelelő alátámasztás vonalát. A két kapott egyenes metszéspontjában van a súlypont. ♣

Az  $x$  illetve  $y$  tengelyre számított

$$S_x = \int_{(A)} y \, dA, \quad S_y = \int_{(A)} x \, dA \quad (3.85)$$

statikai nyomatékokat (melyek mértékegysége  $\text{mm}^3$  vagy  $\text{m}^3$ ) a terület *elsőrendű nyomatékainak* is szokták nevezni. Itt az „elsőrendű” szó arra utal, hogy az ezeket definiáló integrálokban első fokon szerepel az  $x$  illetve az  $y$  koordináta. Hasonlóképpen definiálhatók magasabb rendű nyomatékok is, melyekről a 6. fejezetben lesz szó.

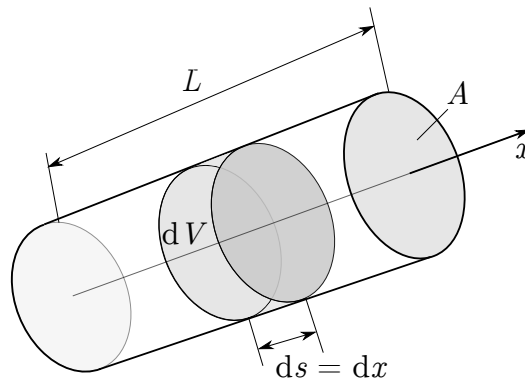
A (3.76) egyenlet kapcsán bemutatott egyszerűsítésre van lehetőség akkor is, amikor a vizsgált test *rúdként modellezhető* (akár egyenes, akár görbe rúdként), aminek a keresztmetszete mindenhol  $A$  területű. Ekkor a rudat kis  $ds$  hosszúságú elemi ívdarabokra bontva a térfogatelem  $dV = A \, ds$  alakban fejezhető ki, a súlypont helyvektora pedig a (3.70) egyenlet alapján

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{(V)} \mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) \, dV}{\int_{(V)} \varrho(\mathbf{r}) \, dV} = \frac{\int_{(L)} \mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) A \, ds}{\int_{(L)} \varrho(\mathbf{r}) A \, ds} = \frac{\int_{(L)} \mathbf{r} \varrho(\mathbf{r}) \, ds}{\int_{(L)} \varrho(\mathbf{r}) \, ds}, \quad (3.86)$$

ahol egyszerűsíteni lehetett az  $A$  területtel. Homogén tömegeloszlású esetben a sűrűség is állandó a rúd mentén, így azzal is lehet egyszerűsíteni, ezért

$$\mathbf{r}_S = \frac{\int_{(L)} \mathbf{r} \, ds}{\int_{(L)} ds} = \frac{\int_{(L)} \mathbf{r} \, ds}{L}, \quad (3.87)$$

ahol  $L$  a teljes rúd hossza. Egyenes rudak esetében a  $ds$  elemi ívhossz megfeleltethető a rúd súlypontvonalára felvett elemi  $dx$  hosszúnak (3.22. ábra). Síkgörbe rúd esetére a 8.2.2. fejezetben mutatjuk be a képlet használatát.



**3.22. ábra.** A rúd felosztása  $dV = A \, dx$  nagyságú kis térfogatelemekre

A gyakorlatban ritkán van szükség az ebben a fejezetben megadott integrálképletek alkalmazására. Kézikönyvekben számos szabályos geometriai alakzatra megtalálhatók a térfogat (illetve síkidomoknál a terület) és a súlypont képletei. Néhány esetben meg is adtuk ezeket a képleteket a 8.2. függelékben. Ha egy test vagy síkidom összetehető ilyen ismert tulajdonságú darabokból, melyek térfogatai  $V_i$  (illetve síkidomoknál területei  $A_i$ ), súlypontjaik helyvektorai pedig  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , akkor testeknél az

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i V_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad (3.88)$$



síkidomoknál pedig az

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad (3.89)$$

képlettel adható meg a súlypont helyvektora.

Ennek megfelelően ismert  $l_i$  hosszúságú egyenes darabokból álló rudak súlypontja is számítható az

$$\mathbf{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i l_i}{\sum_{i=1}^n l_i} \quad (3.90)$$

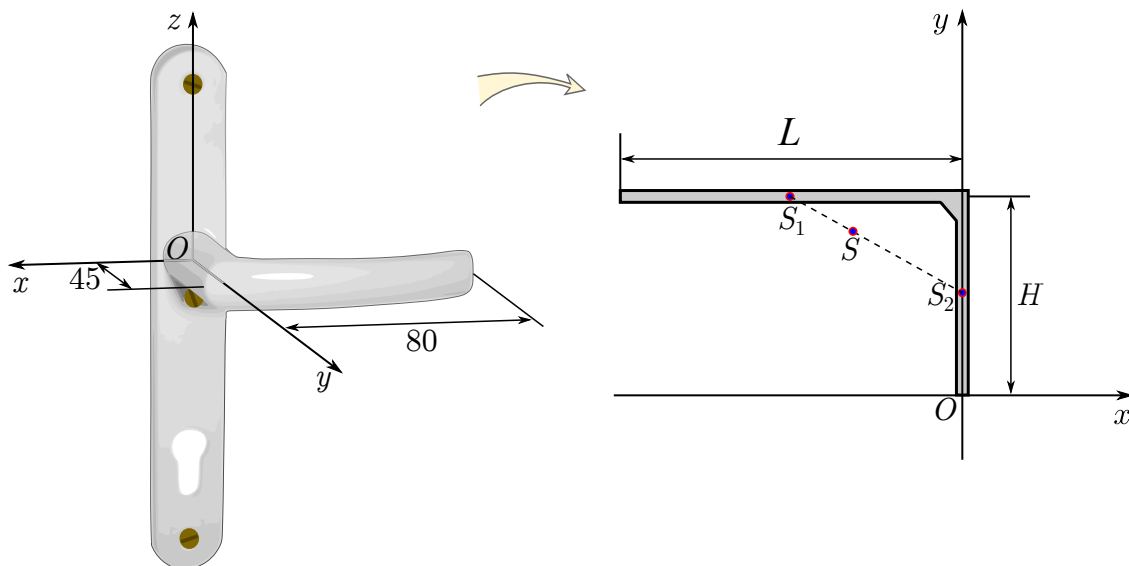
képlet szerint.

A súlypont helyvektorának egyes koordinátáit úgy kaphatjuk meg, hogy a fenti képletekben az  $\mathbf{r}_i$  vektor megfelelő koordinátáját szerepeltetjük, tehát például a súlypont  $x$  koordinátája testek esetében az

$$x_S = \frac{\sum_{i=1}^n x_i V_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad (3.91)$$

képlettel számítható.

**3.5. példa:** Határozzuk meg a 3.1. példában tárgyalt kilincs súlypontját, feltéve, hogy két ugyanolyan keresztmetszetű és sűrűségű, egymásra merőleges rúdszakaszból áll! Adatok: A 3.23. ábra jelöléseivel  $H = 45$  mm,  $L = 80$  mm.



**3.23. ábra.** Törtvonalú rúdként modellezett kilincs súlypontjának meghatározása

#### Megoldás:

Mivel ugyanolyan keresztmetszetű rudakként modellezzük a két szakaszt, használhatjuk a (3.90) egyenletet. Ehhez az első lépésben külön-külön meghatározzuk a két rúdszakasz hosszát és súlypontjának helyét:

$$l_1 = L, \quad l_2 = H, \quad \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} -L/2 \\ H \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 45 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ H/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22,5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm}. \quad (3.92)$$

Ebből a teljes kilincs  $S$  súlypontjának helyvektora

$$\mathbf{r}_S = \frac{\mathbf{r}_1 l_1 + \mathbf{r}_2 l_2}{l_1 + l_2} = \begin{bmatrix} -25,6 \\ 36,9 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mm.} \quad (3.93)$$

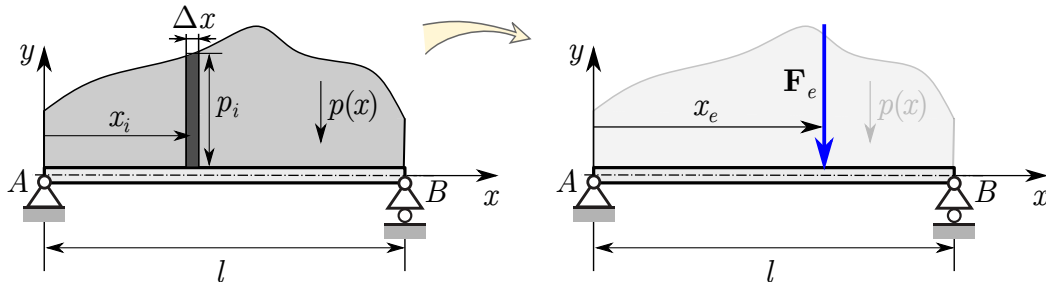
A súlypont tulajdonságaiból következően az  $S$  pont az  $S_1$  és  $S_2$  pontok által kijelölt szakaszon helyezkedik el, a kilincs által elfoglalt térfogaton kívül. ♠

A súlypont helyének meghatározására további példák találhatók a 8.2. függelékben.

### 3.7.3. Vonall mentén megoszló párhuzamos erőrendszer eredője

Az eddig leírtak szerint meg tudjuk határozni egy vonal mentén megoszló, párhuzamos erőrendszer eredőjét. Az ilyen erőrendszereket a  $N/m$  mértékegységű  $p$  intenzitással, azaz az egységnyi hosszra jutó erő értékével lehet jellemezni.

Tegyük fel, hogy a megoszló erőrendszer intenzitása a  $p(x)$  függvény szerint változik egy  $l$  hosszúságú szakasz mentén, ahogy a 3.24. ábra mutatja! Ha a szakaszt felosztjuk kis  $\Delta x$



3.24. ábra. Vonall mentén megoszló párhuzamos erőrendszer eredőjének meghatározása

hosszúságú darabokra, akkor úgy tekinthetjük, hogy az  $i$ -edik ilyen kis szakaszon belül jó közelítéssel állandó az intenzitás, amit  $p_i$ -vel jelölünk. Tehát a szakaszon ébredő elemi erő  $\Delta F_i \approx p(x_i)\Delta x = p_i\Delta x$ .

Az eredő erő nagysága

$$F_e = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n p_i \Delta x = \int_0^l p(x) dx, \quad (3.94)$$

amit az integrál értelmezése szerint a  $p(x)$  függvény grafikonja alatti terület számításával is meghatározhatunk. Az eredő erő iránya és értelme a megoszló erőével egyezik meg, azaz a 3.24. ábrán látható példában az  $y$  tengely negatív irányába mutat.

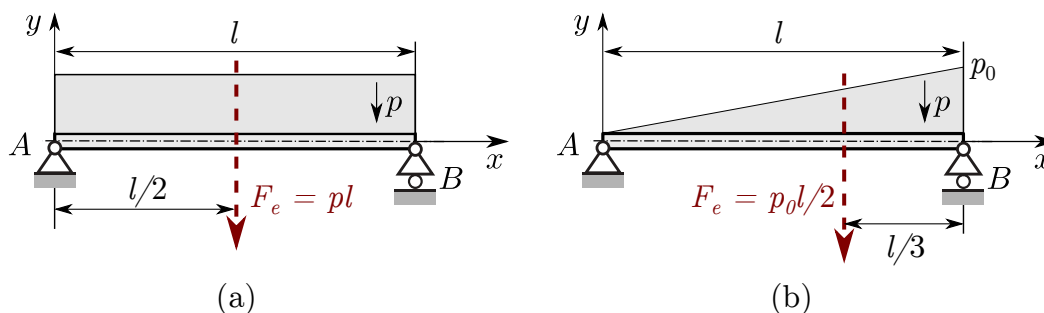
Az eredő hatásvonalának  $x$  koordinátáját a (3.53) egyenlet szerint számíthatjuk:

$$x_e = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n x_i \Delta F_i}{\sum_{i=1}^n \Delta F_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i \Delta x}{\sum_{i=1}^n p_i \Delta x} = \frac{\int_0^l x p(x) dx}{F_e}. \quad (3.95)$$

Az  $F_e$  eredő erő hatásvonalának pontjaira a megoszló erőrendszer nyomatéka nulla. Tehát ha e hatásvonal mentén felfüggesztenénk egy olyan lemezt, ami a megoszló terhelés grafikonja alatti területnek megfelelő alakú, akkor ez a test egyensúlyban lenne. A súlypontra

definíció szerint igaz, hogy ha felfüggesztünk egy testet, akkor egyensúlyban a súlyponton megy át a testet tartó erő hatásvonalára. Következésképpen ha lerajzoljuk a megoszló erő  $p(x)$  grafikonját, akkor a grafikon alatti terület súlypontján megy át az eredő hatásvonalára.

Például egy  $l$  hosszon megoszló állandó  $p$  intenzitású erő esetében az eredő erő nagysága  $F_e = pl$ , hatásvonalára pedig a szakasz felénél található, ahogy a 3.25/a ábra mutatja. Ha a megoszló erő  $p(x)$  intenzitása lineárisan változik a 3.25/b ábrának megfelelően, és  $l$  hosszon 0-ról  $p_0$ -ra nő, akkor a grafikon alatti terület háromszög alakú lesz. Ennek megfelelően az eredő nagysága  $F_e = p_0l/2$ , aminek a hatásvonalára  $l/3$  távolságra esik a maximális  $p_0$  intenzitású helytől.



**3.25. ábra.** Állandó intenzitású (a) és lineárisan változó intenzitású (b) vonal mentén megoszló erőrendszer eredőjének hatásvonalára és nagysága



## 4. fejezet

# Szerkezetek statikája

### 4.1. Szabadsági fok

A 3.3. fejezet alapján tetszőleges erőrendszer helyettesíthető eredőjével, egy alkalmas vektorkettőssel. Ennek ismeretében az erőrendszer egyensúlya is biztosítható: az eredő erő és nyomaték ellentettjét kell hozzávenni az eredeti erőrendszerhez.

A gyakorlati statikai feladatokban azonban nem csupán *erőrendszerek* szerepelnek, hanem egymáshoz és a környezetükhöz kapcsolódó, merevnek tekintett *testek* vagy *szerkezetek* egyensúlyát kell megvizsgálni. A testekre ható erőhatásokat két nagy csoportra osztottuk az 1.7. fejezetben: az *aktív erők* vagy terhelések elvileg tetszőlegesen megválaszthatók, a *kényszererők* viszont az aktív erőktől függően olyan nagyságot és irányt vesznek fel, hogy a kényszerfeltételek teljesülését, és statikai feladatokban az egyensúlyt biztosítsák. A kényszererők meghatározásához – azaz a *statika alapfeladatának* megoldásához (lásd 1.13. definíció) – az aktív erők ismeretében fel kell írni az egyensúly feltételeit megadó egyenleteket. Egyes esetekben több lehetséges megoldásuk is adódhat ezeknek az egyenleteknek, míg más feladatokban az látható be, hogy az adott helyzetben nem jöhet létre egyensúly, azaz nincs megoldás.

Nagyon fontos annak eldöntése, hogy egy adott feladatban egyértelműen meghatározható-e a kényszererők a statika eszköztárát felhasználva, azaz *statikailag határozott-e* a vizsgált szerkezet. Ebben a fejezetben erre a kérdésre keressük a választ, és bizonyos feladattípusok esetében módszereket adunk a kényszererő-rendszer elemeinek kiszámítására. Az egyensúlyi egyenletrendszer megoldhatósága a vizsgált szerkezet *szabadsági fokától* függ, ezért a következőkben részletesen megvizsgáljuk ezt a fogalmat.

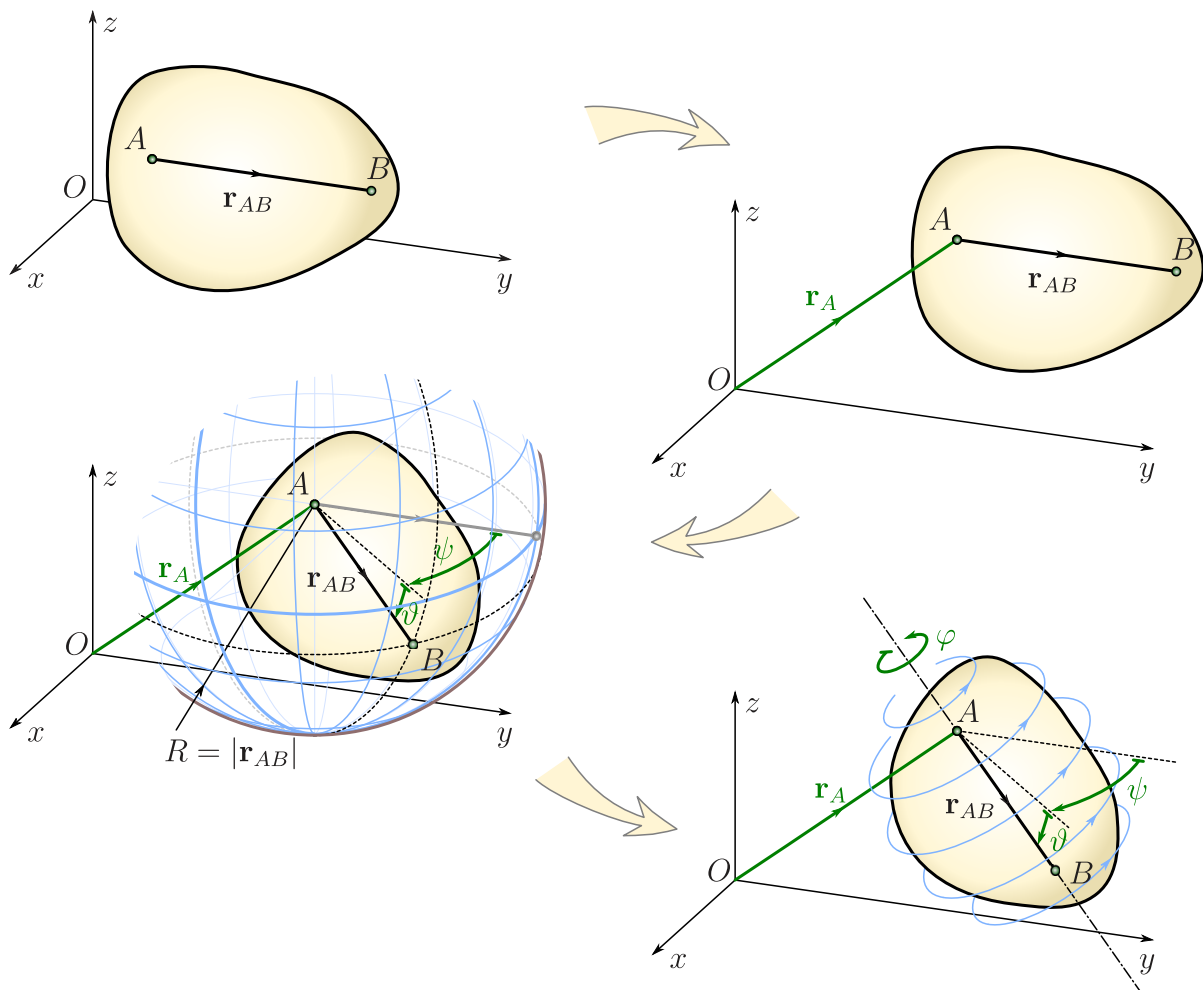
#### 4.1.1. A szabadsági fok fogalma

A szabadsági fok fogalma alapvető jelentőségű a mechanikában, nemcsak az egyensúlyban lévő testek, rendszerek, hanem a mozgó testek esetében is.

**4.1. definíció.** *Egy mechanikai rendszer szabadsági foka azon független koordináták száma, melyek egyértelműen megadják a rendszerbe tartozó testek térbeli elhelyezkedését.* ♠

**Példák:**

- Egy anyagi pont térbeli helyét helyvektorával adhatjuk meg, ami három darab koordinátát jelent:  $x, y, z$ . Tehát az *anyagi pont három szabadsági fokú*.
- Egy *merev test* pontjainak helyét a következő gondolat kísérlet alapján tudjuk megadni, melyet a 4.1. ábrán szemléltetünk.

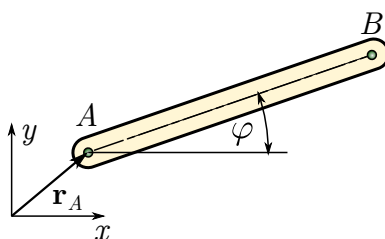


**4.1. ábra.** A merev test helyének és helyzetének megadása, kihasználva, hogy  $|\mathbf{r}_{AB}| = \text{állandó}$  [A57]

Az első lépésben rögzítjük a test tetszőleges  $A$  pontjának helyét az  $\mathbf{r}_A$  vektor megadásával – ez három egymástól független koordinátát tartalmaz. Mivel a merev test pontjainak távolsága rögzített, egy másik,  $B$  pont már csak egy  $|\mathbf{r}_{AB}|$  sugarú gömbfelületen lehet, tehát további két koordináta szükséges a helyének a megadásához. Általában két szögkoordinátát használnak (az ábrán  $\psi$  és  $\vartheta$ ), hasonlóan mint a földrajzi szélességi és hosszúsági fokok esetében. Az  $A$  és  $B$  pontok helyének rögzítése után még mindig végtelenül sokféle helyzetben lehet a merev test, az  $AB$  pontok egyenesét körül elforgatva. Tehát a teljes merev test helyzetének megadásához még meg kell adni egy

hatodik,  $\varphi$  koordinátát is, ami az  $AB$  tengely körüli szögelfordulást jellemzi. A *merev test szabadsági fokainak száma tehát hat*.

- Sok esetben van valamilyen információnk a test elhelyezkedéséről. Például ha egy anyagi pont az adott feladatban csak egy adott síkon helyezkedhet el – gondolhatunk egy asztallapon lévő kis radírra –, akkor célszerű egy olyan koordináta-rendszert felvenni, aminek az  $x$  és  $y$  tengelyei az adott síkba esnek. Erre számos példát láttunk a 2. fejezetben. Ekkor az anyagi pont  $z$  koordinátája mindig zérus, így a helyének megadásához elegendő az  $x$  és  $y$  koordinátája. Következésképpen egy *adott síkon lévő anyagi pont két szabadsági fokúnak tekinthető*.
- Ha egy *merev testről* tudjuk, hogy egy adott síkon helyezkedik el – mint egy asztallapra letett ceruza –, akkor pontjainak helyét három koordinátával adhatjuk meg. Például kiválaszthatunk a testen egy tetszőleges  $A$  pontot, a 4.2. ábrának megfelelően. Ennek a pontnak a síkbeli helyét az  $\mathbf{r}_A$  vektor  $x$  és  $y$  koordinátája adja meg. Az  $A$  pont rögzítésével a test pontjai az  $A$  körüli köríveken helyezkedhetnek el. Például a  $B$  pont az  $A$ -tól  $|\mathbf{r}_{AB}|$  távolságra kell legyen. Ha megadjuk azt is, hogy az  $AB$  szakasz egyenese mekkora  $\varphi$  szöget zár be az  $x$  tengely irányával, akkor a test síkbeli helyét rögzítjük. Tehát *síkban egy merev testnek három szabadsági foka van*.



4.2. ábra. Síkbeli merev test helyének megadása [A58]

A példák alapján úgy is fogalmazhatunk, hogy a szabadsági fok a test *mozgáslehetőségeinek számát* adja meg. Ha egy test csak egy adott síkon mozoghat, akkor a mozgáslehetőségeinek száma, így a szabadsági foka is csökken a térbeli esethez képest.

#### 4.1.2. Kapcsolat a szabadsági fok és az egyensúlyi egyenletek rendszere között

A szabadsági fok azt is megadja, hogy az adott mechanikai rendszer esetében hány skaláris egyenlet szükséges az egyensúly feltételének vizsgálatához, hiszen minden mozgáslehetőség „irányában” teljesülnie kell az egyensúlynak.

Például a szuperpozíció elvből levezetett 1.1. következmény az *anyagi pontok* egyensúlyára az alábbi feltételt szabja meg:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

Ez térben három ( $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$ ,  $\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$ ), síkban két skaláris egyenletet jelent, az anyagi pont szabadsági fokának megfelelően.

*Merev testek* esetében egy vektorkettőssel adható meg a rájuk ható erőrendszer hatása, és a statika alaptétele (3.3. tétel) szerint egyensúlyban mindkét vektornak nullvektornak kell lennie, ami hat feltételt jelent. Síkbeli erőrendszer esetében az egyensúly feltétele a (3.18) és (3.19) egyenletek alapján három skaláris egyenlettel adható meg:

$$\begin{aligned} F_x &\equiv \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \\ F_y &\equiv \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \\ M_z &\equiv \sum_{j=1}^m M_{jz} + \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \right)_z = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Például három azonos síkba eső hatásvonalú erő egyensúlya esetében láttuk, hogy az egyensúlyhoz szükséges a vektorháromszög folytonos nyílfolyammal történő záródása – ami az  $F_x = F_y = 0$  feltételeknek felel meg –, és a hatásvonalak közös metszéspontjának létezése, ami pedig a nyomatéki egyensúlyt biztosítja.

### 4.1.3. Statikai határozottság

A legáltalánosabb, térbeli feladatokban – ahol hat szabadsági fokú a merev test – mind az erő, mind a nyomaték 3-3 skalárkomponensének nullának kell lennie, ami hat darab egyenletet jelent.



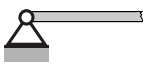
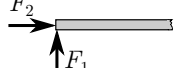

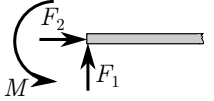
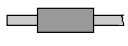
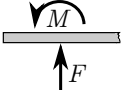
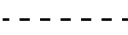
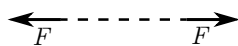
Az 1.7. fejezetben tárgyalt kényszerek csökkentik a test vagy szerkezet mozgáslehetőségeinek számát, hiszen azokat a mozgásokat korlátozó feltételekként definiáltuk. Tehát minden kényszerfeltétel csökkenti a mechanikai rendszer szabadsági fokát is: annyival, amennyi a kényszer ún. *kötöttségi foka*. Minden megkötött szabadsági fokhoz tartozik egy kényszererő vagy nyomaték, ami a kényszerfeltétel teljesülését biztosítja, és a test vagy szerkezet terhelésétől – a rá ható aktív erőrendszertől – függ (lásd a 2.4. példát). Néhány kényszer jellemzőit összefoglaltuk a 4.3. táblázatban.

A kényszererők a terhelésektől (aktív erőktől) függően mindig olyan értéket vesznek fel, hogy a hozzájuk tartozó mozgáslehetőséget gátolják, azaz alkalmazkodnak a terhelésekhez. Ezért a tartószerkezetek a terhelés megváltoztatásakor is egyensúlyban maradnak, ha minden mozgáslehetőséget kényszerek kötnek le – azaz a kényszerekkel csökkentett szabadsági fok nulla.

A tipikus feladatokban ismert az egyensúlyban lévő szerkezet terhelése, és a cél a testek közötti erőrendszer és a kényszererő-rendszer (más néven reakciók) meghatározása. Például a 2.4. példában egy síkbeli rudat vizsgáltunk, aminek kényszerek nélkül 3 a szabadsági foka. A rúd egyik végén egy függőleges irányú elmozdulást gátló görgős támasz, másik végén mindkét irányú elmozdulást gátló síkcukló található; ezek a kényszerek  $1+2=3$  szabadságfokot kötnek meg, tehát a teljes szerkezet már 0 szabadsági fokú. A három ismeretlen reakciókomponens meghatározásához három egyensúlyi egyenletet írtunk fel, aminek egyértelmű volt a megoldása.

Az egyensúlyi egyenletekben az erők, nyomatékok mindig első hatványon szerepelnek, tehát ezek az egyenletek lineáris algebrai egyenletrendszert alkotnak. A szabadsági fokok számánál több egyenlet már biztosan összefügg, azaz bizonyos egyenletek levezethetők a



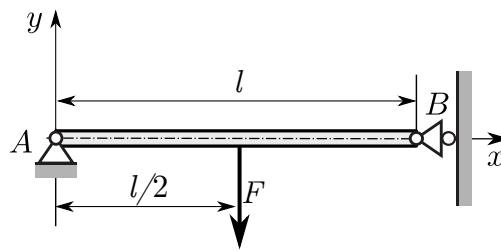
Kényszer	Jele	Reakciók	Kötöttségi fok
Alátámasztás, görgős támasz			1
Síkcsukló			2
Befogás			3
Csúszka, vezeték			2
Kötél			1

4.3. ábra. Néhány kényszer jellemzői

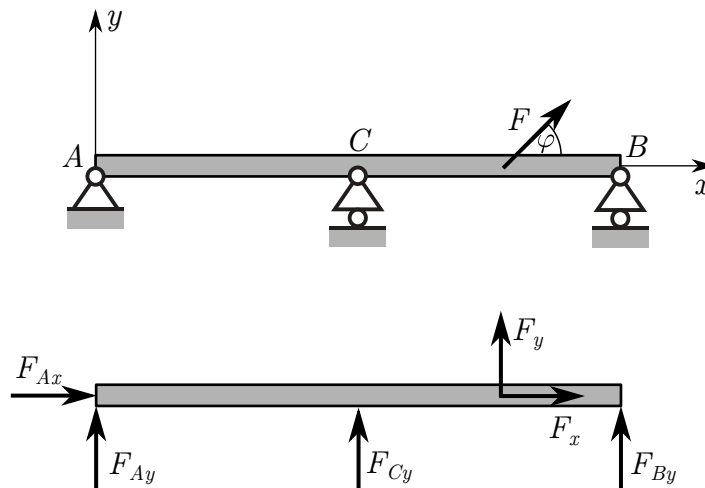
többiből. Ebből következően *síkfeladatokban csak három ismeretlen határozható meg egy adott testre felírt egyensúlyi egyenletekből* – például a három szabadsági fok lekötését biztosító kényszererő komponensek. Azonban több lehetőségünk is van arra, hogy egymástól független egyenleteket írjunk fel. Például az erők egyensúlyát kifejező egyenletek gyakran kiválthatók különböző tengelyekre felírt nyomatéki egyenletekkel, de síkban ezzel a módszerrel is legfeljebb három egymástól független egyenlet kapható.

A fentiek szerint a kényszererő-komponensek meghatározásához szükséges, hogy a kényszerek összegzett kötöttségi foka megegyezzen a kényszerek nélküli test szabadsági fokával. Ez azonban nem elegendő feltétel a feladat megoldhatóságához! Például a 4.4. ábrán látható esetben a rúd szabadsági foka 3, a síkcsukló és a görgős támasz együttes kötöttségi foka pedig szintén 3. Mégis könnyen belátható, hogy a berajzolt terhelés mellett nem lehet egyensúly: a rúd elfordul az  $A$  csukló körül. Ebben az esetben a  $B$  támasznál ébredő  $x$  irányú kényszererő ugyanazt a kényszert biztosítja, mint az  $A$  csuklóban ébredő, ugyanolyan irányú erő. Ez azt jelenti, hogy a kényszerfeltételek nem függetlenek egymástól, így nem tudják lekötni a rúd mindhárom szabadsági fokát, és a reakciók nagysága statikai módszerekkel nem határozható meg. Természetesen további, de már egymástól nem független aktív erőkkel – például a  $B$  pontban felvett, pozitív  $y$  irányú,  $F/2$  nagyságú erővel – biztosítható a rúd egyensúlya.

Egy test elmozdulását tetszőleges számú kényszer korlátozhatja, akár a szabadsági foknál több is. Ilyen esetet láthatunk a 4.5. ábrán. Ebben a feladatban adott az  $F$  nagyságú terhelés, és meg kell határozni a reakcióerők komponenseit. A két alátámasztást egy-egy, a csuklóval történő rögzítést pedig két kényszererő komponens tudja biztosítani. Ez összesen négy ismeretlen, amiket csak az egyensúlyi egyenletek alapján nem lehet meghatározni. Az ilyen, *statikailag határozatlan* feladatok megoldására a deformálható testek mechanikájának keretében van lehetőség.



4.4. ábra. Egy olyan szerkezet, ahol nem minden terhelés mellett jöhet létre egyensúly



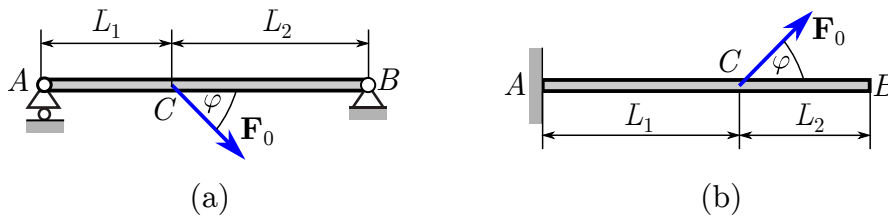
4.5. ábra. Egy statikailag határozatlan szerkezet és szabadtest-ábrája, ahol az egyensúlyi egyenletek önmagukban nem elegendők az ismeretlen reakciók meghatározásához

Az egyensúly feltételét csak a *statikailag határozott* feladatokban tudjuk megvizsgálni a statika eszközeivel.

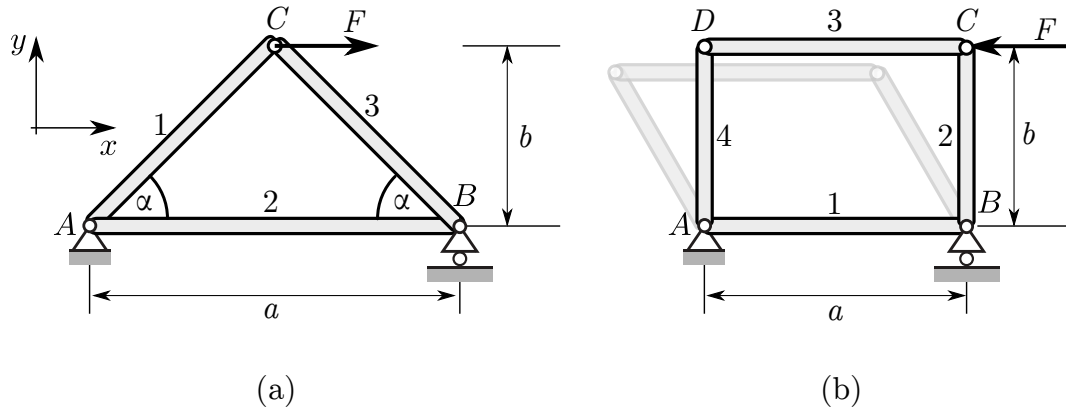
**4.2. definíció.** Egy szerkezetet statikailag határozottnak nevezünk, ha a kényszerek minden terhelés mellett biztosítják az egyensúlyát, és a felírható egyensúlyi egyenletekből egyértelműen meghatározhatók a kényszererő-rendszer komponensei. ♠

Ha csupán egyetlen test szerepel a szerkezetben, akkor a statikai határozottság megállapítása viszonylag egyszerűen megtehető. A 4.6. ábrán két tipikus statikailag határozott elrendezést láthatunk.

Összetettebb szerkezetekben több test is kapcsolódik egymáshoz és a környezethez. Ilyenkor minden egyes kapcsolatnál figyelembe kell venni a kényszerek 4.3. táblázatban szereplő kötöttségi fokát. Például a 4.7/a ábrán három darab rúd alkotja a szerkezetet, melyeknek összesen  $3 \times 3 = 9$  lenne a szabadsági foka a kényszerek nélkül. A 2-es rúd az A pontban síkcuklóval kapcsolódik a környezethez, és szintén csuklósan kapcsolódik hozzá az 1-es rúd. A csuklós kapcsolat rögzíti mind az 1-es, mind a 2-es rúd A-ba eső pontjának síkbeli helyét, tehát ennek a kényszernek összesen négy a kötöttségi foka. Úgy tekinthetjük, hogy itt három test is kapcsolódik a csuklón keresztül: a két rúd, és a környezet. A *kötöttségi fokot*



4.6. ábra. Egyszerű, statikailag határozott szerkezetek: (a) kéttámaszú tartó, (b) befogott rúd (konzol)



4.7. ábra. (a) Statikailag határozott szerkezet. (b) Négycsuklós mechanizmus

eggyel kevesebb csuklóval kell számolni, mint a csuklóban csatlakozó testek száma. Ebben az esetben az  $A$  pontban kettő csuklóval, azaz  $2 \times 2 = 4$  kötöttségi fokkal számolhatunk.

A  $C$  csuklóban csak két rúd kapcsolódik össze, és ez a kényszer azt biztosítja, hogy az 1-es és a 3-as rúd  $C$  pontjának az  $x$  és  $y$  koordinátái megegyeznek. Ez tehát egy olyan kényszer, ami kettővel csökkenti a szabadsági fokot.

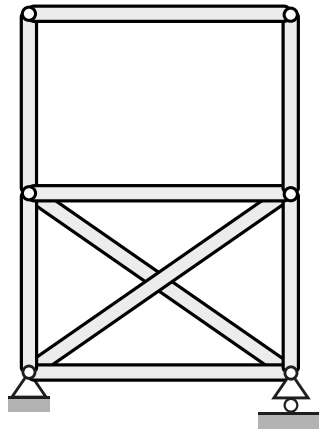
A  $B$  pontban úgy tekinthetjük, hogy a 2-es rúd görgős támasszal kapcsolódik a környezethez – ami egyel csökkenti a szabadsági fokot –, a 3-as rúd pedig csuklóval kapcsolódik a 2-es rúddhoz, ami további két szabadsági fokot vesz el.

Tehát az  $A$ ,  $B$  és  $C$  pontokban értelmezhető kényszerek kötöttségi foka összesen  $4+2+3 = 9$ , ami megegyezik a szabadsági fokkal, a három rúdból álló szerkezet statikailag határozott.

Ehhez hasonlóan könnyen belátható, hogy a 4.7/b ábrával illusztrált esetben – amikor négycsuklós mechanizmust alkotnak a rudak – nem áll fenn statikai határozottság: a szerkezet többféle helyzetet is felvehet, az egyensúlyi egyenletek rendszerének ilyenkor nincs megoldása. Ez abból is látszik, hogy a rudak kényszerek nélküli szabadsági foka  $4 \times 3 = 12$ , az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  pontokban értelmezhető kényszerek kötöttségi foka pedig  $4+2+2+3 = 11$ , azaz eggyel kevesebb, mint a szabadsági fok. Következésképpen nem vettük el az összes mozgáslehetőséget, ez egy egy szabadsági fokú ún. négycsuklós mechanizmus.

A szabadsági és kötöttségi fokok meghatározása meglehetősen hosszadalmas lehet a fentiekben illusztrált módszerrel, ráadásul – ahogy láttuk a 4.4. ábrán – az sem garantálja a statikai határozottságot, ha a kényszerek nélküli szabadsági fok megegyezik a kényszerek összegzett kötöttségi fokával.

Hasonló problémával szembesülünk a 4.8. ábrán látható szerkezet esetében: bár ellenőrizhető, hogy a rudak kényszerek nélküli szabadsági foka megegyezik a kényszerek összesített

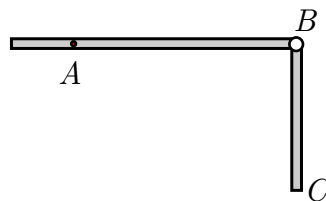


**4.8. ábra.** Olyan rácsos szerkezet, aminél a kényszerek nélküli szabadsági fok megegyezik a kényszerek összesített kötöttségi fokával, de mégsem teljesül a statikai határozottság feltétele

kötöttségi fokával, mégis látszik, hogy a szerkezet nem lehet statikailag határozott, mert egy statikailag határozatlan alsó részből és egy négycsuklós mechanizmusból van összetéve.

Csuklókkal összekapcsolt egyenes rudakból álló ún. *síkbeli rácsos szerkezetek* esetében (lásd 4.2. fejezet) azonban van egy egyszerű módszer a statikai határozottság meghatározására: a rudaknak háromszögeket kell alkotniuk. A háromszögek szögeit ugyanis meghatározza a három oldal hossza, tehát az adott hosszúságú merev rudak csak egyféleképpen helyezkedhetnek el egymáshoz képest. Az ilyen, háromszögekből álló rácsos szerkezet már önmagában merevnek tekinthető, tehát a környezethez való kapcsolódásnál már csak három szabadsági fokát kell lekötni, mint az 1.54. ábrán látható hídmodell esetében. Azonban ha olyan a szerkezet, hogy egyetlen rúd eltávolítása után is megmaradna a háromszöges alakzat, akkor a szerkezet statikailag határozatlan, hiszen az eltávolított rúd nélkül is csak egyféleképpen helyezkedhetnek el a rudak. Ilyen esetet látunk a 4.8. ábrán, ahol a szerkezet alsó részéből eltávolítható lenne az egyik ferde rúd.

**4.1. példa:** Adjunk példákat arra, hogy milyen – az  $A$ ,  $B$  vagy  $C$  pontokban elhelyezett – kényszerekkel lehetne biztosítani a 4.9. ábrán látható, két darab csuklósan kapcsolódó rúdból álló síkbeli szerkezet statikai határozottságát!

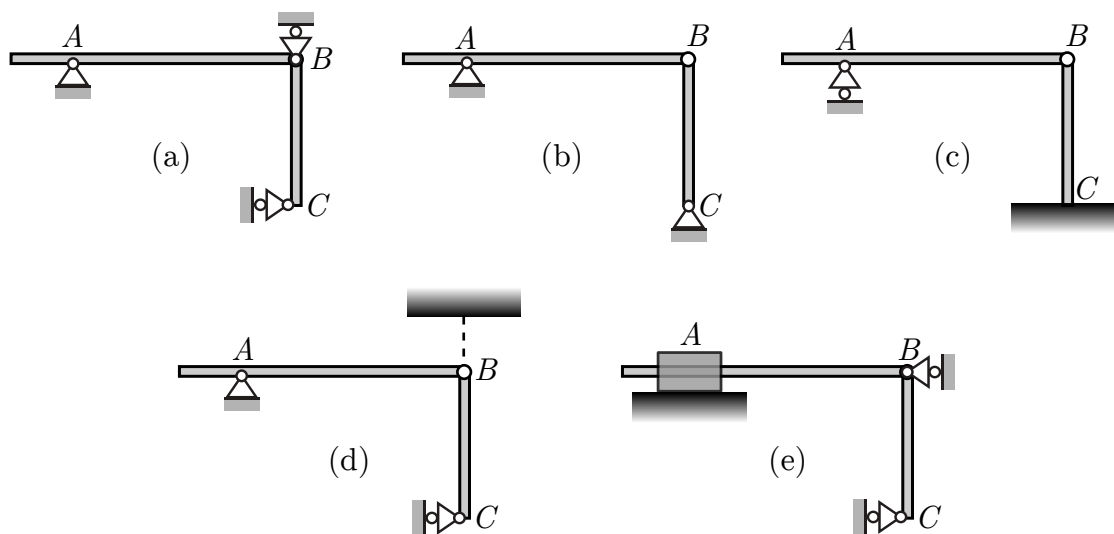


**4.9. ábra.** Statikailag nem határozott rúdszerkezet

#### Megoldás:

A két rúdnak síkban  $2 \times 3 = 6$  szabadsági foka van. Ebből kettőt leköt a  $B$  pontban található csukló, azaz még négy szabadsági fokot kell lekötni a statikai határozottsághoz. Ennél több kötöttség mellett már statikailag határozatlanná válna a szerkezet. Néhány lehetséges megoldást mutat a 4.10. ábra.

- Az (a) esetben az  $A$  csukló és a  $B$  csuklóhoz kapcsolt megtámasztás  $2+1$  szabadsági fokot vesz el, emellett a  $C$  megtámasztás is szükséges ahhoz, hogy a  $BC$  rúd minden mozgáslehetőségét elvegyük.
- A (b) esetben összesen három csuklóval biztosítjuk, hogy a kötöttségi fok hat legyen.
- A (c) esetben befogás található a  $C$  keresztmetszetben, ami három szabadsági fokot vesz el, azaz a  $BC$  rudat már a befogással rögzíteni tudjuk. Ehhez a rögzített testhez kapcsolódik csuklósan az  $AB$  rúd, és a statikai határozottsághoz még egy szabadsági fokot el kell venni az  $A$  pontba helyezett megtámasztással.



4.10. ábra. Különbféle lehetőségek a szerkezet statikailag határozottá tételére

- A (d) eset az (a) megoldás egy változata, amikor a  $BC$  rúd függőleges elmozdulását nem megtámasztás (amit kétoldalú támasznak képzelünk el), hanem kötélgátolja meg. Ez abból a szempontból különleges, hogy ebben az esetben csak akkor tudjuk lekötöni az összes szabadsági fokot, ha a terhelések olyanok, hogy a kötélfeszesség marad. Tehát szigorúan véve ez a kialakítás nem felel meg a statikai határozottság fenti definíciójának, de ha egy gyakorlati feladatban biztosak lehetünk abban, hogy a kötélfeszesség nem lazulhat meg, akkor ez a megoldás is alkalmazható.<sup>1</sup>
- Az (e) esetben egy talajhoz rögzített csúszkában mozdulhat el az  $AB$  rúd. Mivel a csúszka meggátolja a rúd elfordulását és függőleges elmozdulását, két szabadsági fokot vesz el. Az  $AB$  rúd vízszintes elmozdulásának gátlására egy megtámasztást helyeztünk el a  $B$  csuklónál. Így az  $AB$  rúd már rögzített. Ehhez a rögzített testhez kapcsolódik csuklósan a  $BC$  rúd, ami további kényszer nélkül el tudna fordulni a  $B$  csukló körül. Úgy lehet a szerkezet statikailag határozott, ha a  $C$  pont elmozdulását is meggátoljuk egy megtámasztással. ♠

<sup>1</sup>Ugyanez a probléma merül fel az egyoldalú alátámasztások esetében. Mi alapesetben kétoldalú kényszernek tekintjük a görgős támaszokat.

#### 4.1.4. A kényszererő-rendszer elemeinek jelölése

A kényszererő-rendszer komponenseinek egyértelmű azonosításához célszerű azok jelölésében utalni arra, hogy melyik pontban ébredő erőkről vagy nyomatékokról van szó. *Koncentrált erők* esetében két szokásos jelölési mód terjedt el:

- Ha a kényszer a test  $A$  pontjának (vagy rudaknál  $A$  keresztmetszetének) elmozdulását korlátozza, akkor az ott ébredő kényszererő skalárkomponenseit jelölheti  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$  és  $F_{Az}$ , vagy
- $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$  is.

Ha egy rúd adott  $A$  keresztmetszetének (vagy egy test  $A$  pontja körüli jól meghatározott résznek) az elfordulását akadályozza meg a kényszer – például befogás vagy csúszka –, akkor az ott ébredő *reakciónyomaték* jelölése során ügyelni kell arra, hogy azt ne keverhessük össze az erőrendszer  $A$  *pontra számított*  $\mathbf{M}_A$  *nyomatékával* – ami egyensúlyi erőrendszer esetében nullvektor.

- *Síkbeli erőrendszerek* esetében úgy szokták feloldani ezt a problémát, hogy a nyomatéki egyensúlyi egyenleteket az erőrendszer síkjára merőleges tengelyekre írják fel, amiket kisbetűkkel jelölnek. Tehát az  $A$  ponton áthaladó  $a$  tengelyre felírt, nyomatéki egyensúlyt kifejező egyenletet

$$\sum M_a = 0 \quad (4.3)$$

alakban írják fel, és az  $A$  pontbeli befogásban vagy csúszkában ébredő nyomaték megfelelő irányhoz tartozó skalárkomponensét  $M_A$  jelöli. Ebben a jegyzetben leginkább ezzel az esettel fogunk találkozni.

- *Térbeli feladatok* esetében általában külön-külön felírják a nyomatéki egyensúlyt kifejező vetületi egyenleteket, például

$$\sum M_{Ax} = 0, \quad \sum M_{Ay} = 0, \quad \sum M_{Az} = 0 \quad (4.4)$$

alakban. Ekkor az  $A$  pontbeli kényszer hatását megadó nyomatékokot ettől eltérő módon kell jelölni. Például használhatunk alsó index helyett felső indexet,  $M_x^A$ ,  $M_y^A$ ,  $M_z^A$  alakban.

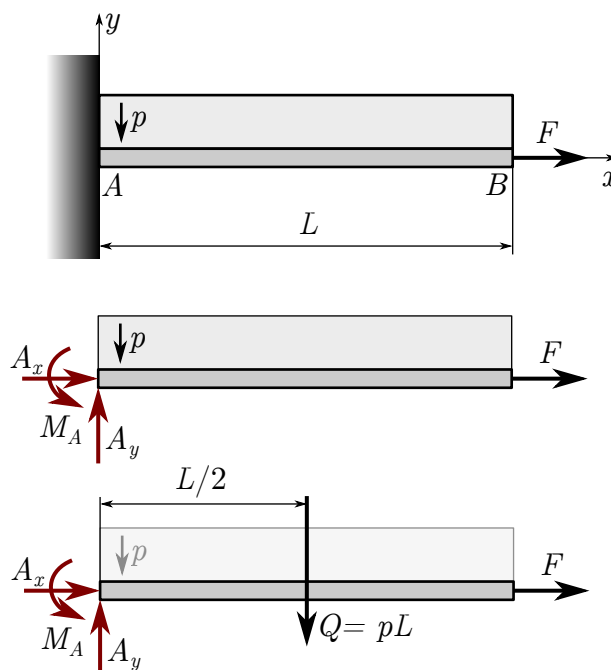
**4.2. példa:** A 4.11. ábrán vázolt befogott rudat egy koncentrált  $F$  erő és egy  $p$  intenzitású megoszló erőrendszer terheli. Határozzuk meg a reakció-erőrendszer komponenseit!

Adatok:  $F = 500$  N,  $p = 600$  N/m,  $L = 2$  m.

#### Megoldás:

A síkbeli rúd szabadsági foka 3, ami megegyezik befogás kötöttségi fokával. A befogás megakadályozza a rúd  $A$  keresztmetszetének  $x$  és  $y$  irányú elmozdulását, valamint a rúd elfordulását. E három feltétel egymástól független, ezért a szerkezet statikailag határozott. A három kényszerfeltétel teljesülését az  $A_x$  és  $A_y$  kényszererők, valamint az  $M_A$  nyomaték biztosítják. Ezek meghatározása a feladat.

Az állandó intenzitású megoszló erőrendszer a 3.7.3. fejezet szerint egy  $Q = pL$  nagyságú koncentrált erővel helyettesíthető, az  $x = L/2$  keresztmetszeten áthaladó hatásvonallal.



4.11. ábra. Megoszló és koncentrált erővel terhelt, egyik végén befogott rúd

Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + F = 0, \quad (4.5)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_y - pL = 0, \quad (4.6)$$

$$\sum M_a = 0 : \quad M_A - Q \frac{L}{2} \equiv M_A - \frac{pL^2}{2} = 0. \quad (4.7)$$

Itt a  $\sum M_a = 0$  egyenletben az  $A$  ponton áthaladó  $a$  tengelyre számított nyomatékok összegét fejeztük ki, kisbetűs indexszel megkülönböztetve az  $A$  befogásban ébredő  $M_A$  nyomatékú (kényszer)erőpártól.

Az egyenletrendszer megoldása:

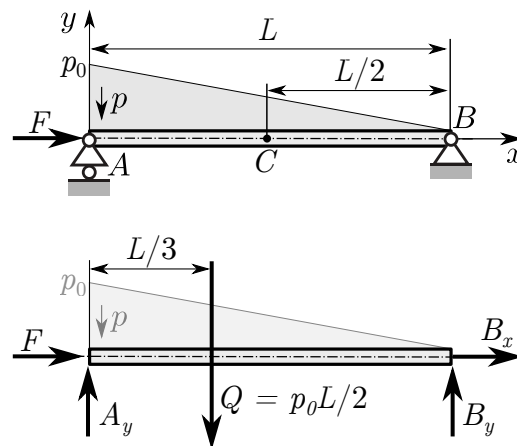
$$A_x = -F = -500 \text{ N}, \quad A_y = pL = 1200 \text{ N}, \quad M_A = \frac{pL^2}{2} = 1200 \text{ Nm}. \quad (4.8)$$

Ellenőrzésképpen felírhatjuk a  $B$  ponton áthaladó  $b$  tengelyre számított nyomatékot is:

$$\sum M_b : \quad M_A + Q \frac{L}{2} - A_y L \equiv \frac{pL^2}{2} + \frac{pL^2}{2} - pL^2 = 0. \quad (4.9)$$

4.3. példa: Határozzuk meg a reakciókat a 4.12. ábrán látható példában!

Adatok:  $F = 600 \text{ N}$ ,  $p_0 = 1200 \text{ N/m}$ ,  $L = 2 \text{ m}$ .



4.12. ábra. Lineárisan megoszló és koncentrált erővel terhelt kéttámaszú tartó

### Megoldás:

A megoszló erőrendszer eredőjének nagysága  $Q = p_0L/2$ , hatásvonala pedig az  $x = L/3$  koordinátájú pontokon halad át. Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0: \quad B_x + F = 0, \quad (4.10)$$

$$\sum M_a = 0: \quad B_yL - Q\frac{L}{3} = 0, \quad (4.11)$$

$$\sum M_b = 0: \quad Q\frac{2L}{3} - A_yL = 0. \quad (4.12)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$B_x = -F = -600 \text{ N}, \quad B_y = Q\frac{L}{3L} = \frac{Q}{3} = 400 \text{ N}, \quad A_y = Q\frac{2}{3} = 800 \text{ N}. \quad (4.13)$$

Az eredményeket többféleképpen is ellenőrizhetjük, például az alábbi egyenletekkel:

$$\sum F_y = 0: \quad A_y + B_y - Q = 0, \quad (4.14)$$

$$\sum M_c = 0: \quad -A_y\frac{L}{2} + Q\frac{L}{6} + B_y\frac{L}{2} = 0. \quad (4.15)$$



## 4.2. Rácsos szerkezetek

### 4.2.1. A rácsos szerkezetek tulajdonságai

Számos mérnöki szerkezet modellezhető ún. rácsos szerkezetként, például daruk (1.7. ábra), hidak (1.14. ábra), magasfeszültségű villanyoszlopok (4.13. ábra).

A rácsos szerkezeteket az jellemzi, hogy

- egyenes, merev rudakból állnak,
- a rudakat súrlódásmentes csuklók kötik össze úgy, hogy egy rúd csak két csuklón keresztül kapcsolódik a szerkezet többi részéhez,



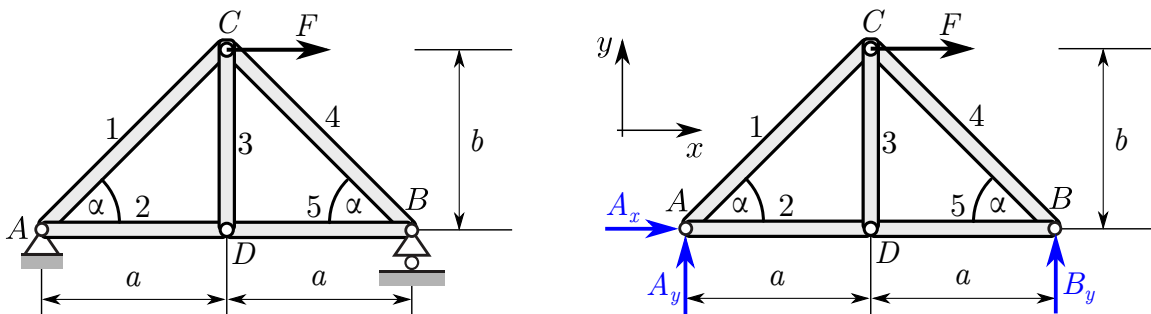


4.13. ábra. Rácsos szerkezetként modellezhető villanyoszlop [A59]

- statikailag határozott a szerkezet,
- és a terhelés csak csuklóban ható koncentrált erő lehet.

A fenti feltételeknek megfelelő rudakat *statikai rudaknak*, a csuklók geometriai középpontjait pedig *csomópontoknak* nevezzük.

Láttuk a 4.1. fejezetben, hogy egy síkbeli rácsos szerkezet statikai határozottságához szükséges, hogy a rudak háromszögeket alkossanak, mint a 4.14. ábrán látható szerkezet esetében. Ez a geometria általában a valóságos szerkezeteknél is felismerhető, bár a valóságos



4.14. ábra. Rácsos szerkezet és a hozzá tartozó szabadtest-ábra

hidak, daruk, stb. esetében a rudak kapcsolódása a leggyakrabban nem csuklós kialakítású, hanem ún. csomólemezzel közvetítéssel csavarokkal (lásd 4.13. ábra), vagy hegesztéssel kötik össze őket. Azonban ha a rúd csomólemezzel vagy hegesztéssel rögzített szakaszának hossza elhanyagolható a rúd teljes hosszához képest, és a terhelés csak a kapcsolatoknál ébred, akkor jó közelítést jelent, ha a mechanikai modellben csuklós kapcsolatokkal számolunk. A továbbiakban csak *síkbeli rácsos szerkezetekkel* foglalkozunk, de a bemutatandó módszerek térbeli esetekre (lásd például 4.13. ábra) is kiterjeszthetők. Az egyszerűség kedvéért a síkbeli szerkezet síkjában vesszük fel a koordináta-rendszer  $x$  és  $y$  tengelyeit.

A feladat a reakciók, valamint a rudakban és a csuklóokban ébredő erők meghatározása.<sup>2</sup> A feltételezett statikai határozottság miatt ezek az erők meghatározhatók egyensúlyi egyenletek segítségével. Egy statikailag határozott rácsos szerkezet a reakciók meghatározása szempontjából merev testként kezelhető, tehát három darab – az egész szerkezetre felírt – egyensúlyi egyenlet alapján kiszámíthatók a reakciókomponensek. Például a 4.14. ábrán látható esetben az alábbi egyenletek írhatók fel:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + F = 0, \quad (4.16)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + B_y = 0, \quad (4.17)$$

$$\sum M_a = 0 : \quad 2aB_y - bF = 0, \quad (4.18)$$

ahol  $\sum M_a$  az  $A$  ponton áthaladó,  $a$  tengelyre számított nyomatékok összege. Ezekből az egyenletekből a három reakciókomponens meghatározható:

$$A_x = -F, \quad A_y = -\frac{b}{2a}F, \quad B_y = \frac{b}{2a}F. \quad (4.19)$$

Síkban egy merev testre csak  $r = 3$  darab független egyensúlyi egyenlet írható fel. Ezért a többi ismeretlen erő meghatározásához az ún. *részekre bontás* elvét használjuk ki:

**4.3. tétel.** Részekre bontás elve: *ha egy test vagy szerkezet egyensúlyban van, akkor annak minden részének is egyensúlyban kell lennie.* ♠

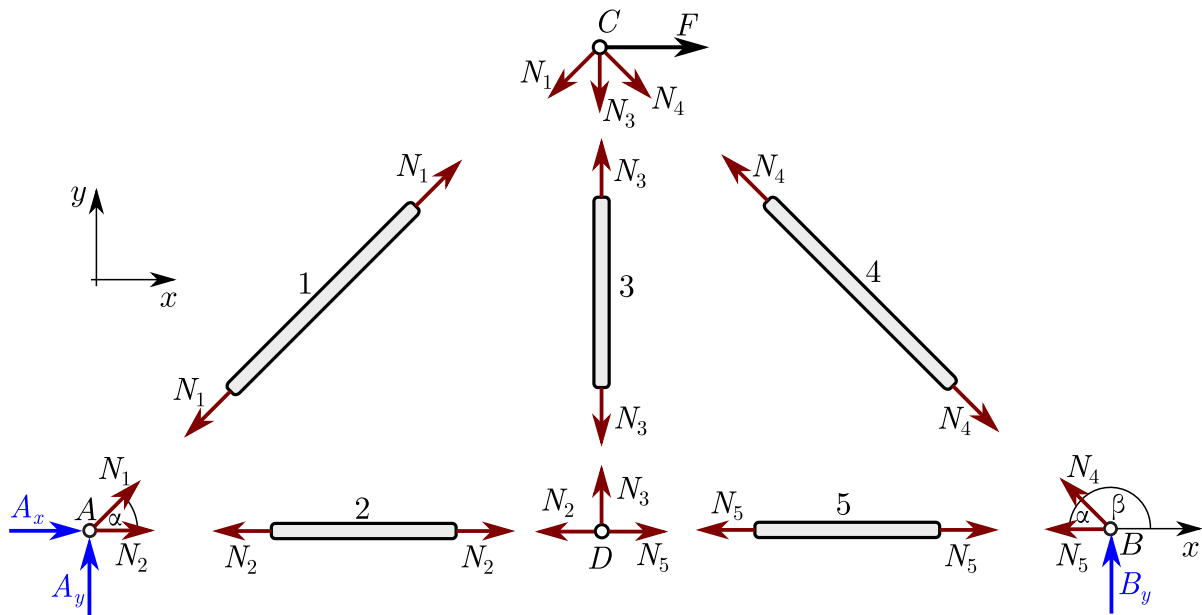
Ezt az elvet alkalmazva külön-külön vizsgálhatjuk minden egyes rúd és csukló egyensúlyát.

A csuklós kapcsolat feltételezése azért jelent számottevő egyszerűsítést a befogással modellezhető csomólemezes vagy hegesztéses kapcsolathoz képest, mert ha egy test csak két csuklóval kapcsolódik a környezetéhez és csak azokon keresztül érheti terhelés, akkor a test egyensúlyához a két, csuklóról átadódó erőnek kell egyensúlyban lennie, ahogy a kétcsuklós kényszer kapcsán már tárgyaltuk az 1.7.8. fejezetben. Mivel a csuklóról átadódó erő hatásvonala áthalad a csukló középpontján, és két erő egyensúlyának a feltétele a közös hatásvonal, azonos nagyság és ellentétes értelem (2. alapelv), a rácsos szerkezetben lévő statikai rudat csak rúdirányú (pontosabban: a két csukló középpontját összekötő egyenesbe eső hatásvonalú) erők terhelhetik.

Megállapodás szerint *a rudakat húzó erőket pozitív, a nyomó erőket negatív* előjelűnek tekintjük. Az egyensúlyi egyenletek áttekintését megkönnyíti, ha a szerkezet elemeit *szabadtest-ábrákon* rajzoljuk fel a rájuk ható erőkkel együtt (lásd 4.15. ábra), és ezeken az ábrákon *minden rudat húzottnak tüntetünk fel*, még akkor is, ha egyébként biztosak vagyunk abban, hogy valamelyik rúd nyomott. Ennek az az előnye, hogy így a megoldás során kapott pozitív értékek mindig húzott, a negatív értékek pedig nyomott rudaknak felelnek meg, és nem kell a megoldást összehasonlítani azzal, hogy eredetileg melyik rudat tekintettük húzottnak vagy nyomottnak. Ez a megközelítési mód nagyon előnyös a feladat számítógépes megoldása szempontjából is.

Newton 3. törvénye (5. alapelv) értelmében a rudakról a csuklókra ható erők a csuklókról a rudakra átadódó erőkkel azonos nagyságúak, azonos hatásvonalúak, és ellentétes értelműek.

<sup>2</sup>A rudakban és csuklóokban ébredő erőket is tekinthetjük kényszererőknek, melyek a csomópontok távolságának állandóságát, illetve a rudak adott pontjainak egymáshoz való rögzítését biztosítják. Tehát ezek meghatározása is hozzátartozik a statika alapfeladatához.



4.15. ábra. Rácsos szerkezet rúdjaiknak és csuklóinak szabadtest-ábrái

Tehát ha a csuklókra ható erőket meg tudjuk határozni, akkor a szerkezeten belüli összes erőt tudni fogjuk. A csuklókat anyagi pontokként modellezhetjük, tehát 2-2 független egyensúlyi egyenlet írható fel rájuk. Ha a rudakat húzottoknak tekintjük, és ennek megfelelően tüntetjük fel a rájuk ható erőket, akkor a csuklókra is a hozzájuk kapcsolódó rudak irányába mutató erőket kell rajzolni – hiszen ha a csukló húzza a rudat, akkor a rúd is húzza a csuklót.

Ha a síkbeli szerkezet  $t$  darab merev testből (rúdból) és  $c$  darab pontszerű csuklóból áll (amiket szintén a szerkezetbe tartozó, 2 szabadsági fokú testeknek tekintünk), akkor a lekötendő szabadsági fok  $3t + 2c$ .

Minden egyes rúd-csukló kapcsolat két szabadsági fokot köt le: a csuklók (csomópontok)  $x$  és  $y$  koordinátái megegyeznek az oda kapcsolódó rúd végpontjának a koordinátaival. Ha még egy rúd csatlakozik a csuklóhoz, annak a végpontjának a koordinátaira kapunk két további feltételt. Mivel minden rúd két darab csuklóhoz kapcsolódik, ez a teljes szerkezetre összesen  $4t$  kötöttségi fokot jelent. Emellett  $r$  darab kényszerfeltétel adódik a megtámasztásokból, tehát a rudak kapcsolódásából és a megtámasztásokból származó kényszerek  $4t + r$  szabadsági fokot kötnek le. A statikai határozottság miatt síkban  $r = 3$ , ami megegyezik a reakciókomponensek számával.

Mivel minden szabadsági fokot le kell kötni,  $3t + 2c = 4t + r$ . Ebből következik, hogy

$$2c = t + r, \quad (4.20)$$

tehát a csuklókra felírt  $2c$  darab egyensúlyi egyenlet alapján meghatározható a  $t$  darab rúderő is és az  $r$  darab reakciókomponens is.

A példában  $t = 5$  merev testből (rúdból) és  $c = 4$  csuklóból áll a szerkezet. A környezethez történő kapcsolódás  $r = 3$  szabadsági fokot köt meg. Az ismeretlenek: a  $t = 5$  darab rúderő, és az  $r = 3$  darab reakciókomponens. A csuklóra  $2c = 8$  egyenlet írható fel, ami valóban megegyezik az ismeretlenek számával. Természetesen ha a reakciókat már meghatároztuk a teljes szerkezetre felírt (ún. globális) egyenletek alapján, akkor azok már nem

ismeretlenek; ez esetben a csuklókra felírt egyenletek egy része az eredmények ellenőrzésére használható.

### 4.2.2. Csomóponti módszer

A fentiek alapján alkalmazható az ún. *csomóponti módszer* a rúderök meghatározására. Ennek során szétbontjuk a szerkezetet csuklókra és rudakra, majd a csuklók egyensúlyát vizsgáljuk, annak figyelembevételével, hogy azokra a külső terhelések mellett csak rúdirányú erők adódhatnak át. A megoldást célszerű a teljes szerkezetre felírt egyensúlyi egyenletek felírásával és a reakciókomponensek meghatározásával kezdeni. Így bizonyos csomópontokra ható erők értékét meghatározhatjuk. Ezután célszerű olyan csomópontokat kiválasztani, melyekre legfeljebb két ismeretlen rúderő hat. Az egyensúlyi egyenletek megoldása után át lehet térni egy következő csomópontra, és így minden rúderő meghatározható. A számítás végén három darab ellenőrző egyenlet is adódik.

Nézzük meg a megoldás menetét a 4.15. ábrán látható szabadtest-ábrák alapján!

- Az  $A_x$ ,  $A_y$  reakciók már ismertek a teljes szerkezetre felírt egyenletek alapján (lásd (4.19) egyenlet), ezért kezdhetjük a megoldást az  $A$  csomóponttal – hiszen ott csak két ismeretlen erő hat:  $N_1$  és  $N_2$ .

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 : \quad A_x + N_1 \cos(\alpha) + N_2 &= 0, \\ \sum F_y = 0 : \quad A_y + N_1 \sin(\alpha) &= 0,\end{aligned}\tag{4.21}$$

ahol az  $\alpha$  szög értéke ismert, hiszen  $\tan(\alpha) = b/a$ .

Innen

$$N_1 = -\frac{A_y}{\sin(\alpha)} = -\frac{-bF}{2a \sin(\alpha)} = \frac{b}{2a \sin(\alpha)} F = \frac{F}{2 \cos(\alpha)},\tag{4.22}$$

$$N_2 = -A_x - N_1 \cos(\alpha) = F - \frac{b \cos(\alpha)}{2a \sin(\alpha)} F = \frac{F}{2},\tag{4.23}$$

ahol kihasználtuk, hogy  $b/a = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$ . Mivel pozitív  $F$  érték mellett mindkét eredmény pozitív, mind a két rúd húzott.

- $N_1$  és  $N_2$  ismeretében folytathatjuk a számítást akár a  $C$ , akár a  $D$  csomóponttal, hiszen mindkét csuklóra csak két ismeretlen erő hat ( $N_3$  és  $N_4$ , illetve  $N_3$  és  $N_5$ ). Mivel a  $D$  csomópontban egymásra merőleges, és az  $(x, y)$  koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamos erők hatnak, annak az egyensúlyát könnyebb megvizsgálni. A  $D$  csukló egyensúlyának feltételei:

$$\sum F_x = 0 : \quad N_5 - N_2 = 0,\tag{4.24}$$

$$\sum F_y = 0 : \quad N_3 = 0.\tag{4.25}$$

Ezek szerint

$$N_3 = 0,\tag{4.26}$$

$$N_5 = N_2 = \frac{F}{2}.\tag{4.27}$$

Az  $N_5$ -re kapott eredmény  $F > 0$ -ra pozitív, tehát ez a rúd is húzott. A 3-as rúdra viszont azt kaptuk, hogy abban nem ébred erő. Az ilyen rudat *vakrúdnak* nevezzük. Azonban ez nem jelenti azt, hogy a 3-as rúd felesleges, hiszen más terhelés esetében teherviselővé válhat ez a rúd is! A 3-as rúd eltávolításával egy olyan szerkezet jönne létre, ami csak bizonyos terhelések mellett maradhat egyensúlyban, azaz nem statikailag határozott – a 3-as rúd nélkül nem teljesülhet az egyensúly, amikor például a  $D$  csuklóra  $y$  irányú erő hat. A valóságban a szerelési és modellezési pontatlanságok miatt általában a vakrudakban is ébred valamekkora erő, és bizonyos esetekben nélkülük a szerkezet összeomlana. Vakrudakat a biztonság növelése érdekében is használnak, hiszen ezek a rudak átvehetik egyes teherviselő rudak szerepét azok megrongálódása vagy a szerkezet deformációja esetén.

- Most már csak egyetlen ismeretlen rúderő maradt:  $N_4$ , de még négy egyensúlyi egyenletet írhatunk fel: a  $B$  és a  $C$  csukló egyenleteit. Tehát három olyan egyenlet marad, amik felhasználhatók az eredmények ellenőrzésére. Ha a  $B$  csuklót választjuk, akkor az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\sum F_x = 0 : \quad -N_5 - N_4 \cos(\alpha) = 0, \quad (4.28)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad B_y + N_4 \sin(\alpha) = 0. \quad (4.29)$$

Az első egyenlet szerint

$$N_4 = \frac{-N_5}{\cos(\alpha)} = \frac{-F}{2 \cos(\alpha)}, \quad (4.30)$$

a második egyenletből pedig ugyanezt az eredményt kapjuk, a  $b/a = \sin(\alpha)/\cos(\alpha)$  összefüggés felhasználásával:

$$N_4 = \frac{-B_y}{\sin(\alpha)} = \frac{-Fb}{2a \sin(\alpha)} = \frac{-F \sin(\alpha)}{2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)} = \frac{-F}{2 \cos(\alpha)}. \quad (4.31)$$

A 4-es rúd tehát nyomott, hiszen pozitív  $F$  erő mellett negatív rúderőt kapunk.

- A  $C$  csukló egyensúlyi egyenleteit további ellenőrzésre használhatjuk:

$$\sum F_x = 0 : \quad F - N_1 \cos(\alpha) + N_4 \cos(\alpha) = 0, \quad (4.32)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad -N_1 \sin(\alpha) - N_3 - N_4 \sin(\alpha) = 0. \quad (4.33)$$

A korábban kapott eredmények behelyettesítésével azonosságokat kapunk, amik megerősítik számításaink helyességét:

$$\sum F_x = 0 : \quad F - \frac{F}{2 \cos(\alpha)} \cos(\alpha) + \frac{-F}{2 \cos(\alpha)} \cos(\alpha) = 0, \quad (4.34)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad -\frac{F}{2 \cos(\alpha)} \sin(\alpha) - 0 - \frac{-F}{2 \cos(\alpha)} \sin(\alpha) = 0. \quad (4.35)$$

**4.29. megjegyzés:** A csomóponti módszer alkalmazása – különösen összetett szerkezeteknél – sok számítással jár, amit a gyakorlatban célszerű számítógéppel végezni. A számítógépes

megoldáshoz fontos, hogy egyértelműen legyenek felvéve az ismeretlenek. Például a reakciókomponensek a megadott  $(x, y)$  koordináta-rendszerben felvett irányoknak megfelelően szerepeljenek az egyenletekben, a rúderők pedig húzottoknak legyenek feltételezve.

Az erők mindig első hatványon szerepelnek az egyensúlyi egyenletekben, ezért azok egy lineáris egyenletrendszert alkotnak. Az ebben a fejezetben tárgyalt példában az ismeretleneket az alábbi vektorral adhatjuk meg:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ A_x \\ A_y \\ B_y \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

A vektor mérete a (4.20) egyenlet jobb oldalának megfelelően 8, ami a rudak számának ( $t = 5$ ) és a reakciókomponensek számának ( $r = 3$ ) az összege.

A külső terheléseket is egy ugyanilyen méretű vektorral adhatjuk meg, melynek egymás utáni elemei az  $A$  csomópontra ható  $x$  irányú erő, az ott ható  $y$  irányú erő, az  $x$  és  $y$  irányú erők a  $B$  csomópontban, majd a  $C$  és  $D$  csomópontokban:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Tehát minden csomópontához két elem tartozik ebben a vektorban, a (4.20) egyenlet bal oldalának megfelelően. A vizsgált példában csak a  $C$  csomópontra hat egy  $x$  irányú  $F$  erő, tehát csak a vektor ötödik eleme nem nulla.

Az egyensúlyi egyenleteket tömören

$$\mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (4.38)$$

alakban lehet felírni, ahol az  $\mathbf{M}$  mátrix (lásd 8.1. definíció) az ismeretlen erők egyensúlyi egyenletekben szereplő együtthatóit tartalmazza:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos(\alpha) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\cos(\alpha) & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & -1 & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Az  $\mathbf{M}$  mátrix és az  $\mathbf{x}$  vektor szorzása (lásd 8.2. definíció) során úgy kell eljárni, hogy a mátrix egy adott (mondjuk  $i$ -edik) sorában szereplő kifejezéseket egymás után össze kell szorozni az

$\mathbf{x}$  oszlopvektor ugyanolyan sorszámú elemével, és ezeknek a szorzatoknak az összegét kell beírni az eredményvektor  $i$ -edik helyére. Ebből következik, hogy a mátrix oszlopai az  $\mathbf{x}$  vektor elemeinek, az egymás alatti sorok pedig az  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$  csomópontokra felírt  $x$  és  $y$  irányú komponens egyenleteknek felelnek meg. Például az első két sor a (4.21) egyenletekhez tartozik, hiszen az  $\mathbf{M}\mathbf{x}$  szorzást végrehajtva, és figyelembe véve, hogy a  $\mathbf{c}$  vektor első két eleme nulla, azt kapjuk, hogy

$$\cos(\alpha) \cdot N_1 + 1 \cdot N_2 + 1 \cdot A_x = 0, \quad (4.40)$$

$$\sin(\alpha) \cdot N_1 + A_y = 0. \quad (4.41)$$

Ezzel a módszerrel tehát ebben a példában nyolc darab egyenletet írhatunk fel. Az így kapható, (4.38) alakban megadható egyenletrendszer megoldására jól használható matematikai algoritmusok léteznek. A megoldhatóság matematikai feltétele az, hogy az egyenletek lineárisan függetlenek legyenek, azaz ne legyen nulla az  $\mathbf{M}$  együtthatómátrix determinánsa:  $\det \mathbf{M} \neq 0$  (lásd 8.5. definíció).

Tovább egyszerűsítheti a megoldást, ha a rúderők irányát az  $x$  tengelytől mért szöggel adjuk meg, mert ebben az esetben azok  $x$  irányú vetületét a szög koszinuszával,  $y$  irányú vetületét pedig annak szinuszával számolhatjuk, és nincs szükség az előjelek átgondolására sem. Például ha a  $B$  csuklónál az  $\alpha$  szög helyett a 4.15. ábrán látható  $\beta$  szöveget használnánk, akkor a (4.28) egyenletben az  $N_4$  erő együtthatója  $\cos(\beta)$  lenne ( $-\cos(\alpha)$ ) helyett. ♣

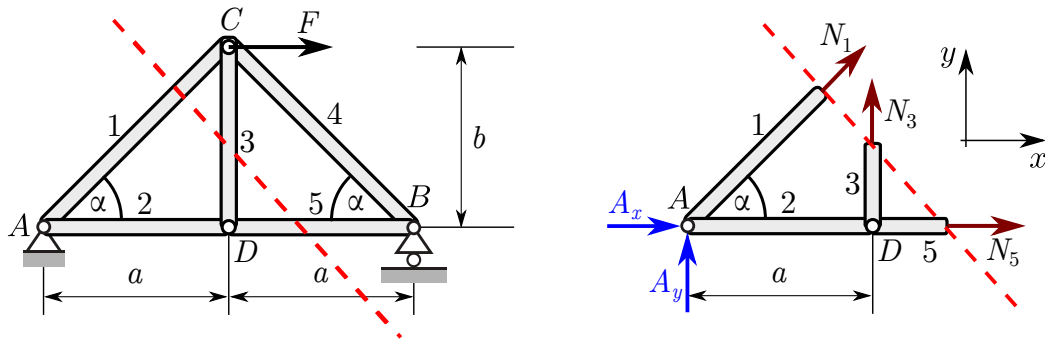
### 4.2.3. Átmetsző módszer

A csomóponti módszerrel szisztematikusan kiszámítható minden rúderő. Azonban ha csak néhány rúderőt szeretnénk meghatározni, akkor célszerűbb az ún. *átmetsző módszer* használata. Ennek lényege az, hogy a szerkezetet képzeletben kettévágjuk a vizsgált rudaknál, és a szerkezet egyik vagy másik felére felírt egyensúlyi egyenleteket oldjuk meg. Ebben az esetben a szerkezet elvágás után kapott, kiválasztott részét merev testnek tekinthetjük, ezért nemcsak erő egyensúlyi, hanem nyomatéki egyenleteket is felírhatunk – de természetesen ekkor is legfeljebb csak három egymástól független egyenlet található. Az átmetsző módszer alkalmazásának ezért az a feltétele, hogy *ha csak egy átmetszést alkalmazunk*, akkor

- legfeljebb három ismeretlen terhelésű rúd átmetszésével kell szétválasztani a szerkezetet,
- úgy, hogy a három rúderő hatásvonala nem egy pontban metszi egymást. Ez utóbbi esetben ugyanis a nyomatéki egyenletet nem tudjuk felhasználni.

Ha csak két ismeretlen rúderő van, de a két rúd hatásvonala egy pontban metszi egymást, akkor a csomóponti módszert kapjuk vissza. Egy adott szerkezetet egymás után többféleképpen is szétvághatunk, az egyes átmetszéseknél más-más rúderőket meghatározva. Ha minden átmetszésnél fel tudunk írni olyan egyenleteket, melyek a korábban felírtaktól függetlenek, akkor megoldhatóvá tehető az egyenletrendszer abban az esetben is, ha háromnál több rudat vágunk el egy metszésnél, vagy a három elvágott rúd egyenesese egy pontban metszi egymást.

Ha az előző példában csak az 1-es, 3-as és 5-ös rudakban ébredő erőkre vagyunk kíváncsiak, akkor elvághatjuk a szerkezetet a 4.16. ábrán látható módon. Az elvágás után meghagyott részt már merev testként kezelhetjük, azaz erre három független egyensúlyi egyenletet írhatunk fel – például az  $A$  és  $D$  pontokon áthaladó  $a$  és  $d$  tengelyekre vonatkozó nyomatéki



4.16. ábra. Rácsos szerkezet rúderőinek számítása átmetsző módszerrel

egyenleteket, valamint az erők  $x$  irányú egyensúlyát kifejező egyenletet:

$$\sum M_a = 0 : \quad N_3 a = 0, \quad (4.42)$$

$$\sum M_d = 0 : \quad -A_y a - N_1 \sin(\alpha) a = 0, \quad (4.43)$$

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + N_1 \cos(\alpha) + N_5 = 0. \quad (4.44)$$

Az első egyenletben nem szerepel  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $N_1$  és  $N_5$ , mivel mindegyiknek a hatásvonala áthalad az  $A$  ponton. A második egyenletben hasonló okokból nem szerepel  $A_x$ ,  $N_3$  és  $N_5$ . Ha  $N_1$ -et eltoljuk a hatásvonala mentén az  $A$  pontba és felbontjuk  $x$  és  $y$  irányú komponensekre, akkor  $x$  komponensének a hatásvonala is áthalad a  $D$  ponton, ezért csak az  $y$  irányú,  $N_1 \sin(\alpha)$  nagyságú komponensével kell számolni ebben az egyenletben.

Az egyenletrendszer első egyenlete szerint  $N_3 = 0$ . A második egyenletből

$$N_1 = -\frac{A_y}{\sin(\alpha)} = \frac{F}{2 \cos(\alpha)}, \quad (4.45)$$

a harmadik szerint pedig

$$N_5 = -A_x - N_1 \cos(\alpha) = F - \frac{F}{2} = \frac{F}{2}. \quad (4.46)$$

Mindhárom eredmény megegyezik a csomóponti módszerrel kapott kifejezésekkel.

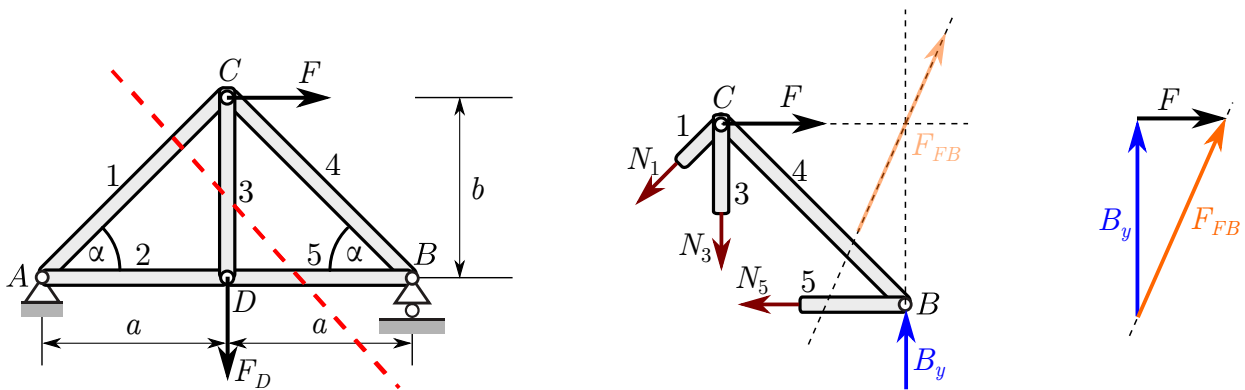
Az átmetsző módszer alap gondolatát felhasználva nemcsak számítással, hanem a 2.7.2. fejezetben tárgyalt *Culmann-szerkesztéssel* is megoldhatjuk a feladatot. Ebben az esetben három ismeretlen nagyságú, de ismert hatásvonallú erőt keresünk, amik egyensúlyban vannak egy negyedik, a külső erők eredőjeként számítható, ismert erővel.

Az előző példában  $N_3 = 0$  jött ki, ezért az nem alkalmas a Culmann-szerkesztés szemléltetésére. *Módosítsuk a feladatot* egy  $D$  csuklóban támadó  $F_D$  erő hozzávételével, a 4.17. ábra szerint! Egy ilyen erő mellett a 3-as rúdnak húzotttnak kell lennie ( $N_3 > 0$ ), és az előző esethez képest megnő a  $B_y$  reakcióerő nagysága is. Az  $A$  ponton átmenő tengelyre felírt nyomatéki egyenletből

$$B_y = \frac{b}{2a} F + \frac{1}{2} F_D \quad (4.47)$$

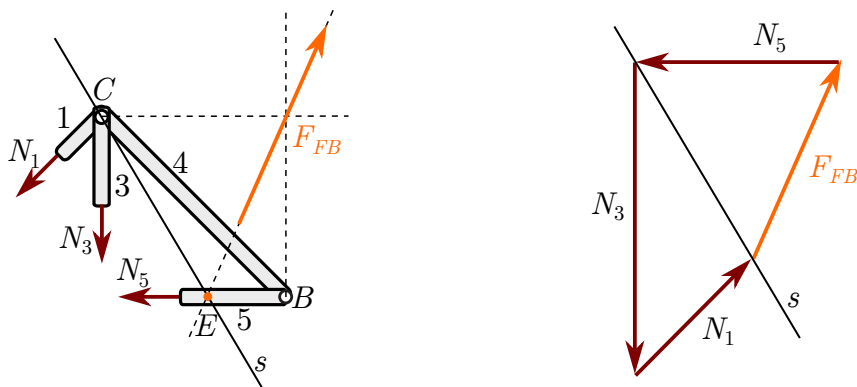
adódik, ami természetesen szerkesztéssel is meghatározható. Tegyük fel, hogy a reakciókat már meghatároztuk, és ugyanazt a metszést alkalmazzuk, mint az előző esetben, de most a





4.17. ábra. Átmetsző módszer alkalmazása Culmann-féle szerkesztéssel, az előző példához képest módosított esetben

szerkezet másik felének egyensúlyát vizsgáljuk! A szerkesztés első lépése az ismert  $F$  és  $B_y$  erők  $F_{FB}$  eredőjének meghatározása, aminek a hatásvonala a két erő hatásvonalainak metszéspontján halad át, nagyságát és értelmét pedig a vektorábrából (4.17. ábra) olvashatjuk le. Most már helyettesíthetjük e két erőt az eredőjükkel, a 4.18. ábrán látható módon. A



4.18. ábra. Rácsos szerkezet rúderőinek számítása a Culmann-féle szerkesztéssel

problémát tehát arra az esetre vezettük vissza, amikor egy merev testre egy darab ismert erő ( $F_{FB}$ ) és három ismeretlen nagyságú és értelmű, de ismert hatásvonálú erő ( $N_1$ ,  $N_3$ ,  $N_5$ ) hat, és ezek egyensúlyának feltételét vizsgáljuk. E négy erő közül kettőt-kettőt összegezve két erő egyensúlyára vezethető vissza a feladat. Az  $F_{FB}$  és  $N_5$  erők eredőjének hatásvonala át kell hogy menjen a hatásvonalaik  $E$  metszéspontján. Ehhez hasonlóan, az  $N_1$  és  $N_3$  erők eredőjének a  $C$  ponton kell áthaladnia.

Mivel  $F_{FB}$  és  $N_5$  eredőjének, valamint  $N_1$  és  $N_3$  eredőjének egyensúlyi erőrendszer kell alkotnia, ezeknek azonos hatásvonálúaknak kell lenniük. Ez a hatásvonal áthalad mindkét részeredő támadáspontján, tehát a  $CE$  egyenesre esik. Ennek megfelelően felvesszünk egy  $CE$ -vel párhuzamos  $s$  segédegyenest az ábrán.

Az  $s$  egyenes ismeretében már megszerkeszthető az ismert irányú  $N_5$  erő a vektorábrán, majd a nyílfolyam folytatásával és zárásával a szintén ismert irányú  $N_3$  és  $N_1$  erők vektora is.

#### 4.2.4. A rácsos szerkezetek előnyei és hátrányai

A rácsos szerkezetek nagy terhek hordására képesek, kevés anyaghasználat mellett. Mégsem célszerű minden szerkezetet rácsos szerkezetként megvalósítani, a következő okok miatt:

- A rácsos szerkezetek könnyen megrongálódhatnak, ha nem a csomópontokban éri őket terhelés – különösen a rudak közepén ható erőkre érzékenyek.
- Csak olyan anyagokból készíthetők el, melyek megfelelően elviselik a húzást és a nyomást. Sok építőanyag – például a beton – csak kismértékben terhelhető húzásra, a nyomott rudak esetében pedig ügyelni kell, hogy az 1.14. megjegyzésben tárgyalt kihajlás jelensége ne következzen be. Kihajlás során a nyomott rúd meghajlik, a görbülete nő, végül az esetek többségében tönkremegy, például eltörik. Ez a jelenség a szilárdságtan eszközeivel tárgyalható.
- Ha statikailag határozott a rácsos szerkezet, akkor egy rúd tönkremenetele esetén előfordulhat, hogy a többi rúd nem tudja átvenni a terhelést, és az egész szerkezet összeomlik.
- A rácsozáshoz szükséges háromszöges szerkezet kialakítása bizonyos esetekben túl nagy helyet igényel.

### 4.3. Síkbeli csuklós szerkezetek

Ebben a fejezetben olyan szerkezeteket vizsgálunk, melyek geometriája hasonló a rácsos szerkezetekéhez, de a terhelésekre vonatkozóan nem adunk meg korlátozást. A csuklós szerkezeteket tehát a következőképpen jellemezhetjük:

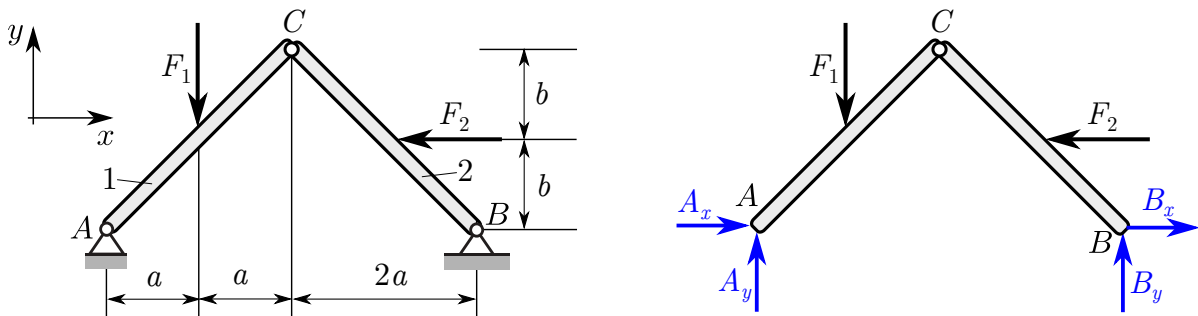
- Egymáshoz csuklósan kapcsolódó, merev rudakból állnak.
- Tetszőlegesen terhelhetők, azaz a terhelés állhat a rudakra vagy a csuklókra ható koncentrált erőkből, erőpárokból és megoszló erőkből is.
- Mivel most is csuklósan kapcsolódnak a rudak, a csuklókról átadódó erők hatásvonala ebben az esetben is áthalad a csuklók középvonalán, de ezek az erők általában *nem rúdírányúak*, mert most más terhelés is hathat a rudakra.
- A cél a rudakat terhelő erők meghatározása. Csuklós szerkezetek esetében nemcsak húzottak vagy nyomottak lehetnek a rudak, hanem a rájuk ható erőrendszernek többek között hajlító hatása is lehet. A hajlítói igénybevétel meghatározása nagyon fontos a rudak szilárdsági méretezése során – azaz amikor meghatározzák, hogy milyen méretűnek kell lennie a rúd ahhoz, hogy ne menjen tönkre a terhelések hatására. Ezzel a témával az 5. fejezetben foglalkozunk bővebben.
- A csuklós szerkezetek esetében is igaz, hogy ha a teljes szerkezet egyensúlyban van, akkor minden egyes része is. Tehát most is alkalmazható a *részekre bontás elve* (4.2.1. fejezet és 4.3. tétel) a csuklókról a rudakra ható erők meghatározása során.

### 4.3.1. Bakállvány csuklóiban ébredő erők meghatározása

A rácsos szerkezetek esetében alkalmazható megoldási módszereket a legegyszerűbb ilyen szerkezet, az ún. *bakállvány* vagy más néven *háromcsuklós szerkezet* példáján keresztül tekintjük át. A bakállvány két, egymáshoz és a környezethez egyaránt csuklósan kapcsolódó merev rúdból áll. A két rúd szabadsági foka  $2 \times 3 = 6$ , a három csukló együttes kötöttségi foka pedig  $3 \times 2 = 6$ .

**4.4. példa:** A 4.19. ábrán látható példában egy-egy koncentrált erő terheli a két rudat. Határozzuk meg az A és B csuklóokban ébredő reakciókat!

Adatok:  $F_1 = 200$  N,  $F_2 = 400$  N,  $a = b = 0,5$  m.



**4.19. ábra.** Két koncentrált erővel terhelt bakállvány, és a teljes szerkezet szabadtest-ábrája

#### Megoldás:

Írjuk fel a teljes szerkezet egyensúlyát kifejező egyensúlyi egyenleteket (az ún. globális egyenleteket)! A 4.19. szabadtest-ábra alapján

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + B_x - F_2 = 0, \quad (1)$$

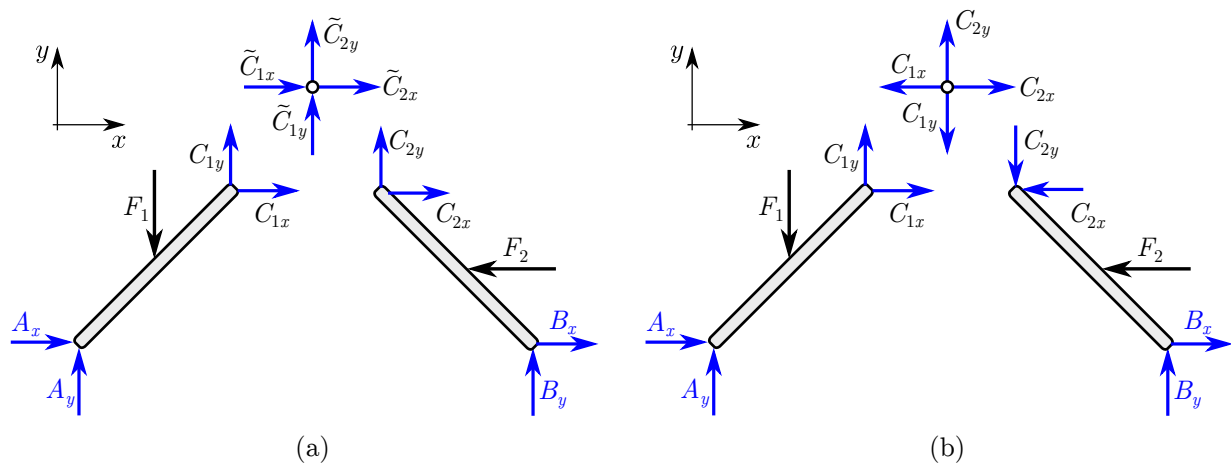
$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + B_y - F_1 = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_b = 0 : \quad -A_y 4a + F_1 3a + F_2 b = 0. \quad (3)$$

Síkban mindössze három egymástól független egyensúlyi egyenletet írhatunk fel, az ismeretlenek száma viszont négy:  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$  és  $B_y$ .

További egyenleteket írhatunk fel a részekre bontás elvének alkalmazásával. Szedjük szét a szerkezetet három részre: az ábrán 1-gyel jelölt AC rúdra, a 2-vel jelölt CB rúdra, és a C csuklóra!

Az általában javasolt eljárás az, hogy ha felbontjuk a keresett erővektorokat  $x$  és  $y$  irányú komponensekre, akkor azokat a koordináta-tengelyek pozitív irányításának megfelelően rajzoljuk be a szabadtest-ábrába, és így is szerepeltetjük azokat az egyensúlyi egyenletekben. Így az eredmények értelmezése egyértelmű, hiszen ekkor a nyilak a koordináta-rendszer bázisvektorait szimbolizálják, az azok mellé írt skalármennyiségek pedig az erővektorok koordinátáit. Ennek megfelelően rajzoltuk fel a 4.20/a szabadtest-ábrát. A jelölésben már figyelembe vettük, hogy bizonyos erőkomponensek erő-ellenereő párokat alkotnak, például  $C_{1x}$  a C csuklóról az 1-es rúdra ható erő  $x$  komponensét,  $\tilde{C}_{1x}$  pedig ennek ellenerejét, azaz a rúdról a csuklóra ható erő  $x$  komponensét jelöli. Azt is megtehetjük volna, hogy a csuklót is megszámozzuk, mondjuk 3-as számmal, és  $C_{13x}$ -szel jelöljük a rúdról a csuklóra,  $C_{31x}$ -szel pedig a csuklóról a rúdra átadódó erőt.



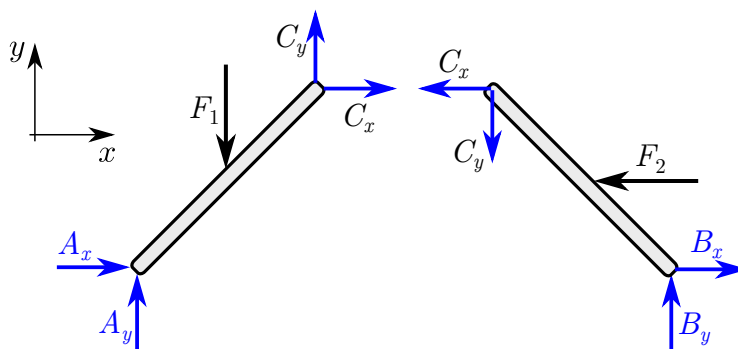
**4.20. ábra.** Részekre bontott bakállvány szabadtest-ábrái. (a): Minden reakciókomponens külön jelölve (például  $C_{1x}$  a  $C$  csuklóról az 1-es rúdra ható,  $\tilde{C}_{1x}$  pedig a rúdról a csuklóra ható erő  $x$  komponensét jelöli). (b): Az erő-ellenerő párok ugyanazzal a szimbólummal jelölve, de ellentétes értelemben felvett nyíllal

Bár ez a jelölésrendszer jól mutatja, hogy itt több különböző erőről van szó, az ismeretlenek száma nagyon nagy lesz (a 4.20/a ábrán 12 ismeretlen szerepel). A feladatok könnyebb áttekinthetősége érdekében ezért két test kapcsolódásánál kivételesen el szoktunk tekinteni a fent leírt jelölési konvenciótól, és már a szabadtest-ábra felrajzolásakor figyelembe vesszük Newton 3. törvényét.

Az ennek megfelelő szabadtest-ábra a 4.20/b ábrán látható. Itt azt a szabályt követtük, hogy az elsőként megrajzolt szabadtest ábrán – ami most az 1-es jelű,  $AC$  rudat ábrázolja – minden ismeretlen erőkomponenst pozitív irányítással vettünk fel, így rajzoltuk be a  $C_{1x}$ ,  $C_{1y}$  erőket. Ezután egy olyan test szabadtest-ábrája következik, ami az 1-es rúddal kapcsolatban van, tehát jelen esetben a  $C$  csuklóra ható erőket kell berajzolni. Itt az 1-es rúdról átadódó erőkire nem vezettünk be új jelölést, viszont a  $C_{1x}$ ,  $C_{1y}$  jelű erőket ellentétes értelmű nyíllal ábrázoltuk. A 2-es rúdról a csuklóra ható  $C_{2x}$ ,  $C_{2y}$  erőket ezután megint pozitív értelemben rajzoljuk fel a csuklóhoz. Ezzel a csukló szabadtest-ábrája elkészült, és továbbléphetünk a csuklóhoz kapcsolódó 2-es rúdra. Most itt vesszük figyelembe Newton 3. törvényét, és a 2-es rúd szabadtest-ábráján negatív értelemben tüntetjük fel a  $C_{2x}$ ,  $C_{2y}$  erőkhöz tartozó nyilakat. A  $B_x$ ,  $B_y$  jelű erőkomponenseket viszont – mivel azok először fordulnak elő – ismét pozitív irányítással szerepeltetjük. Ezzel a megoldással jelentősen csökkentettük az ismeretlenek számát, 12-ről 8-ra.

További egyszerűsítést is el lehet érni, ha már a szabadtest-ábrán figyelembe vesszük a csukló egyensúlyának feltételét. Ez a 4.20/b ábra szerint annak felel meg, hogy  $C_{1x} = C_{2x}$  és  $C_{1y} = C_{2y}$ , azaz további kettővel tudjuk csökkenteni az ismeretlenek számát, ha ezek helyett  $C_x$ -szel illetve  $C_y$ -nal jelöljük a két rúd kölcsönhatását jellemző erőket, ahogy a 4.21. ábra mutatja.

Összefoglalva, a követendő eljárás a következő: egymás után felrajzoljuk a szabadtest-ábrákat az összes testre. Ennek során az elsőként előforduló erőkomponenseket mindig pozitív irányítással vesszük fel, míg a következő ábrán azok ellenerőit (ha a két ábrázolt test kölcsönhatását kifejező erőkről van szó) negatív irányítással. *Ha egy olyan csukló van két rúd között, amire nem hat külső erő*, akkor elhagyhatjuk a csukló szabadtest-ábráját, és a rudak kölcsönhatását két ismeretlen komponens segítségével kifejezhetjük. Ezután az ábrák alapján



**4.21. ábra.** Részekre bontott bakállvány egyszerűsített szabadtest-ábrái, figyelembe véve Newton 3. törvényét és a csukló egyensúlyát

fel kell írni az egyensúlyi egyenleteket a vizsgált testekre.

A példában az ismeretlenek számát lecsökkentettük 6-ra, és a két rúdra is  $2 \times 3 = 6$  egyensúlyi egyenletet írhatunk fel a korábban felírt (1), (2), (3) globális egyenletek mellett:

1-es rúd egyensúlya:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + C_x = 0, \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + C_y - F_1 = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_c = 0 : \quad A_x 2b - A_y 2a + F_1 a = 0, \quad (6)$$

2-es rúd egyensúlya:

$$\sum F_x = 0 : \quad B_x - C_x - F_2 = 0, \quad (7)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad B_y - C_y = 0, \quad (8)$$

$$\sum M_c = 0 : \quad B_x 2b + B_y 2a - F_2 b = 0. \quad (9)$$

Itt a (6)-os és (9)-es egyenlet úgy is értelmezhető, hogy a csukló nem visz át nyomatékot, ezért a szerkezet bármelyik felére ható erőrendszer nyomatéka nulla a csuklóra.

Az (1), (2), (6), (9) egyenletekből álló egyenletrendszer önmagában megoldható lenne az  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $B_x$ ,  $B_y$  ismeretlenekre. Viszont az 1-es és 2-es rudak terhelésének megállapításához az  $C_x$ ,  $C_y$  reakciókat is meg kell határozni. A felírt 9 darab egyenlet közül további kettőt (például a (4) és (5) vagy (7) és (8) egyenleteket) fel tudunk használni  $C_x$  és  $C_y$  meghatározásához, és még három egyenlet marad, amikkel ellenőrizni tudjuk az eredményeket.

A számításhoz és az ellenőrzéshez felhasznált egyenletek közül az alapján választhatunk, hogy az erő egyensúlyra felírt három hasonló jellegű egyenletből (például a három  $\sum F_x = 0$  jellegű egyenletből) csak kettő lesz egymástól független. A nyomatéki egyenletek esetében nem ilyen egyszerű a helyzet, mert több különböző pontra is felírhatunk nyomatéki egyenleteket, melyek kiválthatják az erő egyensúlyra felírt összefüggéseket. Az egyenletrendszer felírásának és papíron elvégzett megoldásának tehát többféle útja is lehet, melyek közül egyesek gyorsabban, mások kevésbé gyorsan vezetnek eredményre. A legcélravezetőbb módszer megtalálásának módját csak sok gyakorlással lehet elsajátítani.

A megoldás természetesen nemcsak intuitív módon határozható meg: a (4)-(9) egyenletek egymástól függetlenek (ún. lineárisan független egyenletrendszert alkotnak), így azokat választva biztosan megkaphatjuk a megoldást, például a 4.29. megjegyzésben leírt módszerrel, számítógép felhasználásával. Mi is ezeket az egyenleteket alkalmazzuk, és azt a stratégiát kö-

vetjük, hogy minden változót kifejezünk a  $C_x$  és  $C_y$  skalárkomponensek segítségével. Ennek az az előnye, hogy ezek az ismeretlenek mindkét rúd egyenleteiben megjelennek.

$$(4) \Rightarrow A_x = -C_x, \quad (4.48)$$

$$(5) \Rightarrow A_y = F_1 - C_y, \quad (4.49)$$

$$(7) \Rightarrow B_x = C_x + F_2, \quad (4.50)$$

$$(8) \Rightarrow B_y = C_y. \quad (4.51)$$

Ha ezeket a kifejezéseket behelyettesítjük a (6)-os egyenletbe, akkor az alábbi egyenletre jutunk:

$$\underbrace{-C_x 2b}_{=A_x} - \underbrace{(F_1 - C_y) 2a}_{=A_y} + F_1 a \equiv C_y 2a - C_x 2b - F_1 a = 0. \quad (4.52)$$

Felismerhető, hogy a kapott egyenlet megfelel az 1-es rúd  $A$  ponton átmenő  $a$  tengelyre felírt nyomatéki egyensúlyi egyenletének. Ez is mutatja, hogy egy újabb, másik tengelyre felírt nyomatéki egyenlet már nem ad új információt, az kifejezhető a már korábban felírt egyenletekből (feltéve, hogy már a szabadsági fokok számával egyenlő számú független egyenletünk van).

Ha az  $A$  és  $B$  pontokban ébredő erőkomponenseket a (9)-es egyenletbe helyettesítjük, akkor arra jutunk, hogy

$$\underbrace{(C_x + F_2) 2b}_{=B_x} + \underbrace{C_y 2a}_{=B_y} - F_2 b \equiv C_x 2b + C_y 2a + F_2 b = 0. \quad (4.53)$$

Ezúttal behelyettesítés után a 2-es test  $B$  ponton átmenő  $b$  tengelyre számított nyomatéki egyenletét kaptuk vissza. Ez nem meglepő, hiszen abban természetesen nem szerepelhetnek a  $B_x, B_y$  ismeretlenek. A fentiek szerint nem célszerű a két rudat összekapcsoló csomópontra felírni a nyomatéki egyensúly egyenleteit. Gyorsabban célt értünk volna, ha mindkét rúd esetében a másik csomópontot – ebben a példában az  $A$  illetve  $B$  pontokat – választjuk, mert az így kapható egyenletekben csak a kapcsolódást jellemző erő  $C_x, C_y$  komponensei jelennek meg.

A (4.52) egyenletből – kihasználva, hogy  $a = b$  – azt kapjuk, hogy

$$C_x = C_y \frac{2a}{2b} - F_1 \frac{a}{2b} = C_y - \frac{F_1}{2}, \quad (4.54)$$

amit behelyettesítve a (4.53) egyenletbe,  $C_y$  kifejezhető:

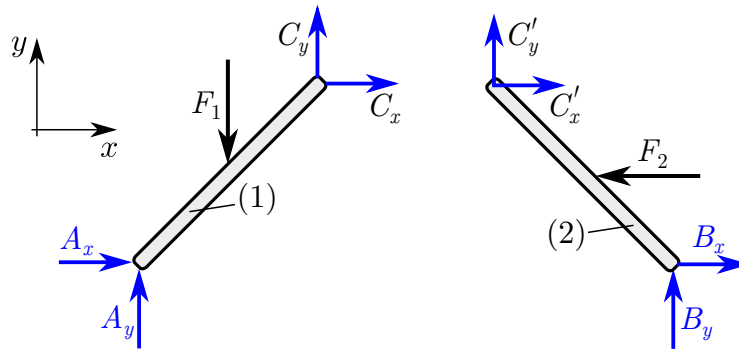
$$C_y = \frac{(F_1 - F_2)b}{2a + 2b} \equiv \frac{F_1 - F_2}{4} = -50 \text{ N}. \quad (4.55)$$

Ez alapján már a többi ismeretlen is meghatározható:

$$A_x = 150 \text{ N}, \quad A_y = 250 \text{ N}, \quad B_x = 250 \text{ N}, \quad B_y = -50 \text{ N}, \quad C_x = -150 \text{ N}. \quad (4.56)$$

Az eredmények ellenőrzésére a számításban fel nem használt (1)-(3) egyenleteket használhatjuk. ♠

A részekre bontás elvét az 5. fejezetben tárgyalt, ún. *igénybevételek* meghatározása kapcsán is fogjuk alkalmazni. Az igénybevételek azzal kapcsolatosak, hogy ha kettévágunk egy egyensúlyban lévő szerkezetet, akkor az elvágás helyén mindegyik testre olyan erőrendszer adódik át, ami a másik testre ható erőrendszer eredőjeként értelmezhető. Az alábbi példában ezt mutatjuk meg a bakállvány esetében.



4.22. ábra. Részekre bontott bakállvány szabadtest-ábrája a 4.5. példához

4.5. példa: A 4.22. ábra szerint megrajzolhatjuk a szerkezet mindkét részének szabadtest-ábráit, és kifejezhetjük a belső erőkomponenseket a rudakra ható többi erővel:

1-es rúd egyensúlya:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + C_x = 0 \quad \Rightarrow \quad C_x = -A_x, \quad (4.57)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + C_y - F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_y = F_1 - A_y, \quad (4.58)$$

2-es rúd egyensúlya:

$$\sum F_x = 0 : \quad B_x + C'_x - F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C'_x = F_2 - B_x, \quad (4.59)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad B_y + C'_y = 0 \quad \Rightarrow \quad C'_y = -B_y. \quad (4.60)$$

Mivel Newton 3. törvénye miatt  $C_x = -C'_x$  és  $C_y = -C'_y$ , arra az eredményre jutunk, hogy

$$C'_x = A_x, \quad (4.61)$$

$$C'_y = A_y - F_1, \quad (4.62)$$

$$C_x = B_x - F_2, \quad (4.63)$$

$$C_y = B_y. \quad (4.64)$$

Ez azt jelenti, hogy a (2)-es testre ható,  $C'_x$  és  $C'_y$  koordinátákkal megadható belső erő az (1)-es testre ható külső erők eredőjével egyenlő, az (1)-es testre a  $C$  pontban átadódó belső erő pedig megegyezik a (2)-es rúdra ható külső erők eredőjével. Ehhez a megállapításhoz azért nem kellett nyomatéki egyensúlyi egyenleteket felírni, mert a (6) és (9) egyenletek szerint a csukló nem visz át nyomatékot.

Hasonlóan vizsgálhatók azok a szerkezetek is, melyekben csúszkával kapcsolódnak egymáshoz rudak (lásd 4.7. példa). Ebben az esetben azonban nyomaték is átadódik a csúszkánál, és ennek a belső nyomatéknak az értéke a másik rúdra ható erőrendszer csúszkára számított nyomatékával egyenlő. ♠

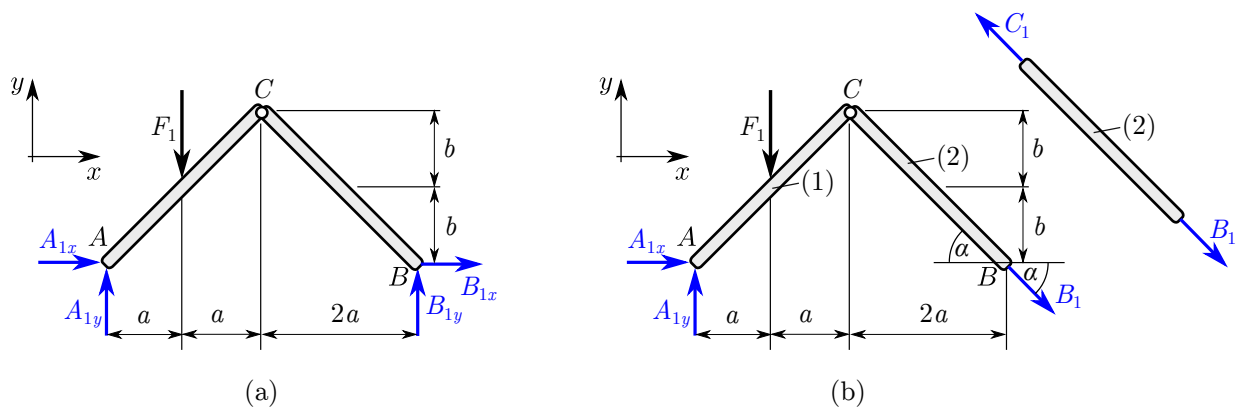
### 4.3.2. A reakciók meghatározása a szuperpozíció elv alapján

A bakállványra ható reakcióerő komponenseket a szuperpozíció elv alapján is meghatározhatjuk. Ebben az esetben az 1. alapelvnel bővebb értelemben használjuk a szuperpozíció

elvet. Ahogy az 1.11. megjegyzésben volt már róla szó, a szuperpozíció elv lényege az, hogy egy adott testre ható erők egymás hatását nem befolyásolják. Ennek következménye, hogy az egyensúlyi egyenletek matematikai szempontból lineáris egyenletrendszer alakot vesznek.<sup>3</sup>

A szuperpozíció elvet most úgy alkalmazzuk, hogy az  $F_1$  és  $F_2$  erők közül egyszerre csak az egyiknek a hatását vesszük figyelembe a reakciók meghatározása során. Például ha  $F_1$  hatására  $A_{x1}$ ,  $A_{y1}$ ,  $B_{x1}$  és  $B_{y1}$  reakcióerők,  $F_2$  hatására pedig  $A_{x2}$ ,  $A_{y2}$ ,  $B_{x2}$  és  $B_{y2}$  reakcióerők ébrednek, akkor a két erő együttes hatása során ezek összegei adják meg a megfelelő reakciókomponenseket, tehát például  $A_x = A_{x1} + A_{x2}$ .

A 4.23/a ábrán annak az esetnek a szabadtest-ábrája látható, amikor csak az  $F_1$  aktív erő hat a bakállványra. Ezen az ábrán még nem látszik, hogy milyen előnye volt az  $F_2$  erő elhagyásának, hiszen úgy tűnik, hogy továbbra is négy ismeretlen reakciókomponenst kell meghatározni. Azonban ha belegondolunk, hogy a 2-es jelű,  $BC$  rúdra csak a két végpontjában hat erő, egy-egy csuklón keresztül, akkor világossá válik, hogy e két erő egyensúlya miatt ez a rúd statikai rúd. Következésképpen vagy húzott, vagy nyomott, és a  $B$  csuklóban ébredő  $B_1$  erő a rúddal párhuzamos. A 4.23/b ábrán már ennek figyelembevételével rajzoltuk meg a szabadtest-ábrát, a 2-es rudat húzottnak feltételezve.



4.23. ábra. Az  $F_1$  erővel terhelt bakállvány szabadtest-ábrája két változatban

Ha csak az  $F_2$  erő hat a szerkezetre, akkor az 1-es rúd lesz statikai rúd, hiszen ebben az esetben arra csak a két végén adódhat át egy-egy koncentrált erő, amik szintén csak akkor lehetnek egyensúlyban, ha rúdirányúak. A 4.24. ábrát ennek figyelembevételével rajzoltuk meg.

E két esetre vonatkozó egyensúlyi egyenletek

Ha csak  $F_1$  hat:

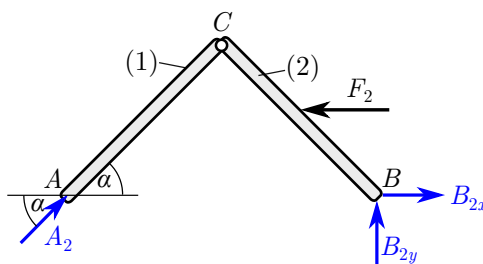
$$\sum F_x = 0 : \quad A_{1x} + B_1 \cos(\alpha) = 0 \quad (4.65)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_{1y} - F_1 - B_1 \sin(\alpha) = 0, \quad (4.66)$$

$$\sum M_a = 0 : \quad -F_1 a - B_1 \sin(\alpha) 4a = 0, \quad (4.67)$$

<sup>3</sup>Ha az erők befolyásolnák egymás hatását, akkor az egyensúlyi egyenletekben megjelennének az erők nemlineáris kifejezései is. Ebben az esetben két erő együttes hatása nem lenne egyenlő a hatásaik összegével.



4.24. ábra. Az  $F_2$  erővel terhelt bakállvány szabadtest-ábrája

Ha csak  $F_2$  hat:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_2 \cos(\alpha) + B_{2x} - F_2 = 0, \quad (4.68)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_2 \sin(\alpha) + B_{2y} = 0, \quad (4.69)$$

$$\sum M_b = 0 : \quad F_2 b - A_2 \sin(\alpha) 4a = 0. \quad (4.70)$$

Ezeknek az egyenleteknek a megoldásából, figyelembe véve, hogy  $\tan(\alpha) = b/a$ , a következő eredményeket kapjuk:

$$A_{1x} = 50 \text{ N}, \quad A_{1y} = 150 \text{ N}, \quad B_{1x} = -50 \text{ N}, \quad B_{1y} = 50 \text{ N}, \quad (4.71)$$

$$A_{2x} = 100 \text{ N}, \quad A_{2y} = 100 \text{ N}, \quad B_{2x} = 300 \text{ N}, \quad B_{2y} = -100 \text{ N}. \quad (4.72)$$

Ellenőrizhető, hogy a megfelelő reakciókomponensek összegeként a (4.56) képletben megadott eredményeket kapjuk.

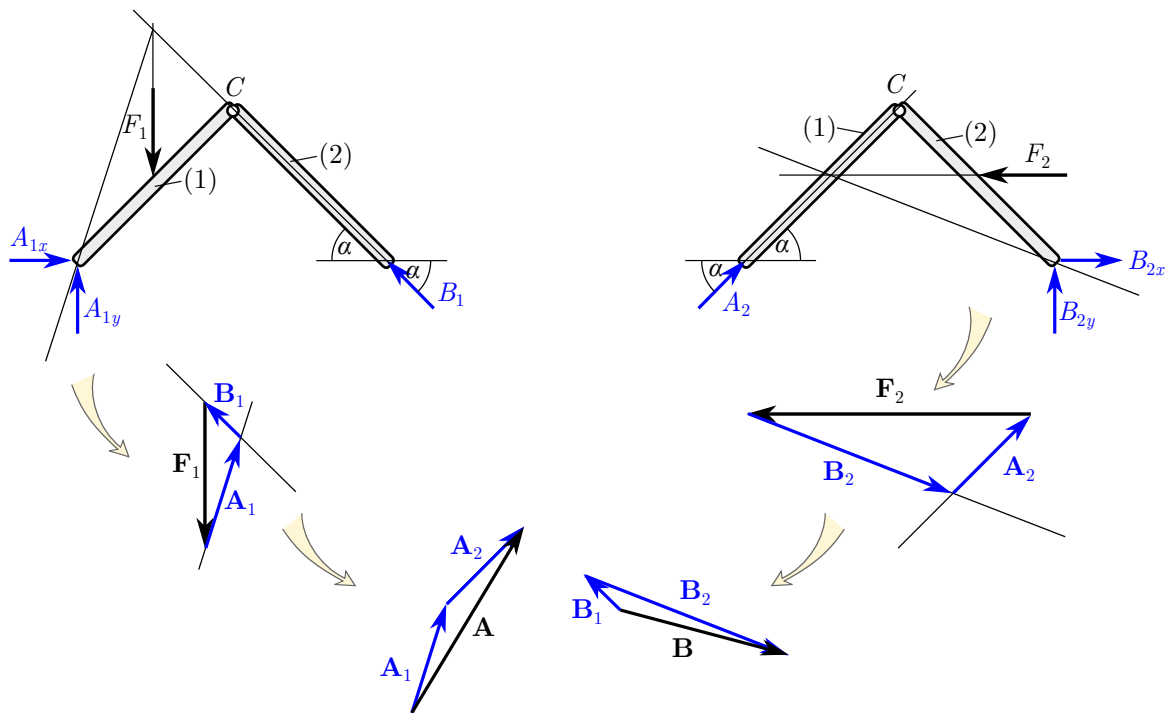
A szuperpozíció elv felhasználásával szerkesztéssel is megoldható a feladat, a 4.25. ábrán látható módon. Ha csak az egyik vagy a másik terhelő erő hat, akkor a két részfeladat visszavezethető három-három erő egyensúlyának vizsgálatára:  $\mathbf{F}_1$  illetve  $\mathbf{F}_2$  nagysága is, iránya is ismert,  $\mathbf{B}_1$ -nek és  $\mathbf{A}_2$ -nek csak az irányát tudjuk, továbbá ismert az  $\mathbf{A}_1$  és  $\mathbf{B}_2$  erők támadáspontja. Vektorábrák segítségével megszerkeszthetők a két esetre vonatkozó reakcióerők vektorai, amik ezután további vektorábrákon összegezhetők.

### 4.3.3. Gerber-tartó

A 4.1. fejezetben láttuk, hogy a kéttámaszú tartók statikailag határozott szerkezetek, ezért a terhelések nyomán ébredő, rájuk ható reakcióerő-komponensek egyértelműen meghatározhatók.

Ha nagy távolságok áthidalására van szükség, akkor a megfelelő teherbíró képesség elérése érdekében nem kerülhető el, hogy több ponton is alá legyen támasztva a szerkezet. Azonban az alátámasztások számának növelésével a kéttámaszú tartóból statikailag határozatlan szerkezetet kapunk (lásd 4.5. ábra), ami megfelelően megtervezve nagyobb terheket is elvisel, de az ilyen szerkezetek nem elemezhetők a statika keretein belül.

A megoldást az jelenti, hogy a merev rudat több részre bontjuk csuklókkal. Egy csukló behelyezése két kötöttségi fokú kényszerfeltételnek számít, viszont a rúd kettébontása hárommal növeli a szabadsági fokot, mert például egy helyett két rúd jelenik meg a szerkezetben. Így egy további megtámasztásra adódik lehetőség, a statikai határozottság fenntartása mellett.



4.25. ábra. Bakállványra ható reakcióerők szerkesztése a szuperpozíció elv alapján

Az ilyen jellegű, többtámaszú, de belső csuklókat tartalmazó tartókat *Gerber-tartónak*<sup>4</sup> nevezik. Egy Gerber-tartó mechanikai modellje (terhelési ábrája) és a hozzá tartozó szabadtest-ábra látható a 4.26. ábrán.<sup>5</sup>

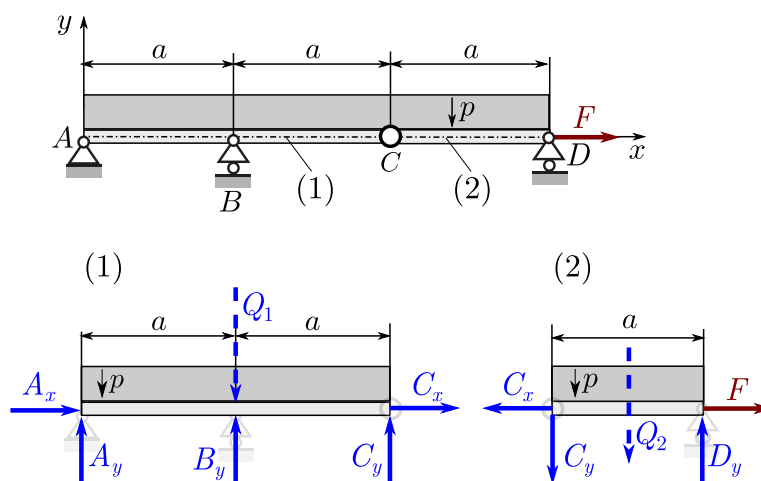
Ezek a szerkezetek több részre bonthatók: egyik részük, az ún. *fő rész* önmagában is megáll, statikailag határozott, míg a másik, *befüggesztett rész* önmagában nem áll meg, egyensúlyát az biztosítja, hogy csuklóval kapcsolódik a fő részhez. Egy összetettebb szerkezetben akár több fő rész és befüggesztett rész is lehet.

A 4.26. ábrán látható Gerber-tartó két darab rúdból áll, melyek kényszerek nélkül síkban 3-3 szabadsági fokkal rendelkeznének. Ebből a hat darab szabadsági fokból hármat leköt az *A* csukló és a *B* görgős támasz, egyet a *D* alátámasztás, további kettőt pedig a két rudat összekötő *C* jelű síkcsukló. Tehát a szerkezet statikailag határozott. Az (1) jelű rúdból álló kéttámaszú tartó a (2) rész nélkül is statikailag határozott lenne, tehát ez a fő rész, a (2) rúd viszont nem lehetne egyensúlyban az (1) nélkül, az a befüggesztett rész.

A reakció-erőrendszer meghatározása során célszerű először a befüggesztett rész egyensúlyát vizsgálni. A (2) rúdra ható megoszló erőrendszert helyettesíthetjük egy  $Q_2 = pa$  nagyságú koncentrált erővel, ami a rúd középső keresztmetszetében hat. A 4.26. szabadtest-

<sup>4</sup>Gottfried Heinrich Gerber (1832-1912)

<sup>5</sup>Akkor is Gerber-tartót kapnánk, ha az (1) rudat a csuklós és görgős támasz helyett egy befogás tartaná, lásd 5.4. példa.



4.26. ábra. Gerber-tartó

ábra alapján a (2) jelű rúd egyensúlyát kifejező egyenletek:

$$\sum F_x = 0 : \quad F - C_x = 0, \quad (4.73)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad -C_y + D_y - pa = 0, \quad (4.74)$$

$$\sum M_d = 0 : \quad C_y a + pa \frac{a}{2} = 0. \quad (4.75)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$C_x = F, \quad C_y = -p \frac{a}{2}, \quad D_y = C_y + pa = p \frac{a}{2}. \quad (4.76)$$

Megfigyelhető, hogy a (2) rúdra ható  $C_y$  és  $D_y$  erők pozitív  $y$  irányúak és egyenlő nagyságúak, ami a rúd szimmetriájából is következik.

Most már a  $C_x$ ,  $C_y$  reakciókomponensek ismertek, azok felhasználhatók az (1) rúdra ható reakciók meghatározása során. Az erre a rúdra ható megoszló erőrendszer egy  $Q_1 = p2a$  nagyságú koncentrált erővel helyettesíthető, a rúd mindkét végétől  $a$  távolságban elhelyezkedő hatásvonalal. Az (1) rúd egyensúlyi egyenleteit annak figyelembevételével írjuk fel, hogy általában egyszerűbb a megoldás, ha nem a két rudat összekötő csuklón átmenő tengelyre írjuk fel a nyomatéki egyenletet. Ezért most az  $A$  ponton átmenő  $a$  tengelyt választottuk:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + C_x = 0, \quad (4.77)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + B_y + C_y - p2a = 0, \quad (4.78)$$

$$\sum M_a = 0 : \quad B_y a + C_y 2a - p2a^2 = 0. \quad (4.79)$$

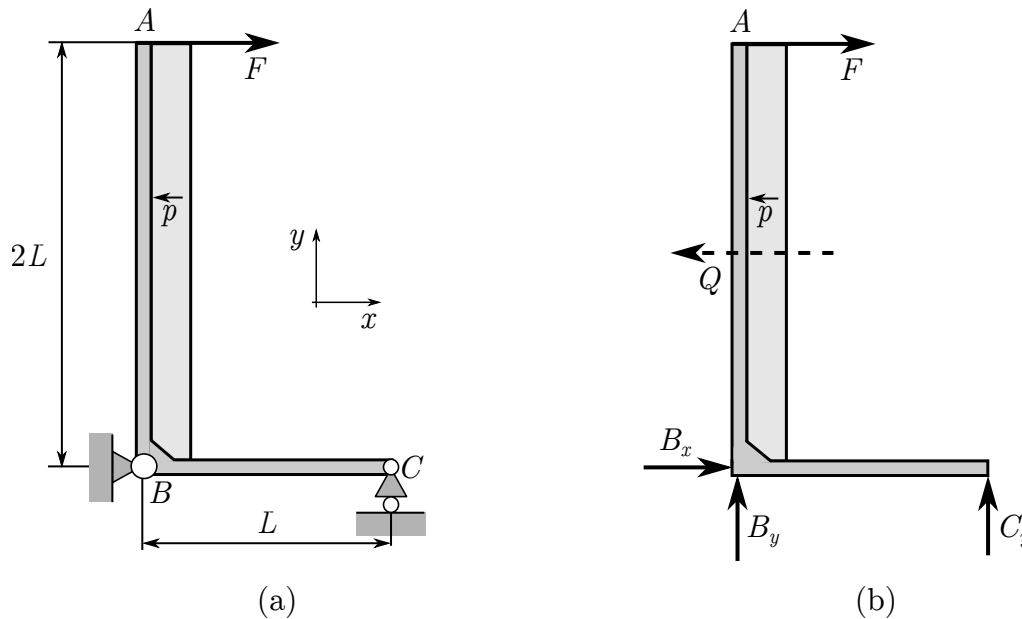
Ennek az egyenletrendszernek a megoldása, (4.76) figyelembevételével:

$$A_x = -C_x = -F, \quad A_y = pa - C_y - B_y = -p \frac{a}{2}, \quad B_y = p2a - 2C_y = 3pa. \quad (4.80)$$

## 4.4. Példák

**4.6. példa:** Határozzuk meg a reakció-erőrendszer komponenseit a 4.27/a ábrán látható példában!

Adatok:  $L = 0,5 \text{ m}$ ,  $F = 200 \text{ N}$ ,  $p = 500 \text{ N/m}$



4.27. ábra. Törtvonalú tartó szerkezeti (a) és szabadtest-ábrája (b)

### Megoldás:

A  $p$  intenzitású megoszló erőt helyettesíthetjük egy  $Q = 2Lp$  nagyságú koncentrált erővel, aminek a hatásvonala a függőleges rúdszakasz felénél helyezkedik el. A  $C$  csuklóban ható reakcióerő iránya ismert, a  $B$  csuklóban pedig két ismeretlen reakciókomponenst veszünk fel a 4.27/b szabadtest-ábrán. Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 : \quad B_x + F - Q = 0, \quad (4.81)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad B_y + C_y = 0, \quad (4.82)$$

$$\sum M_b = 0 : \quad F2L - QL - C_yL = 0. \quad (4.83)$$

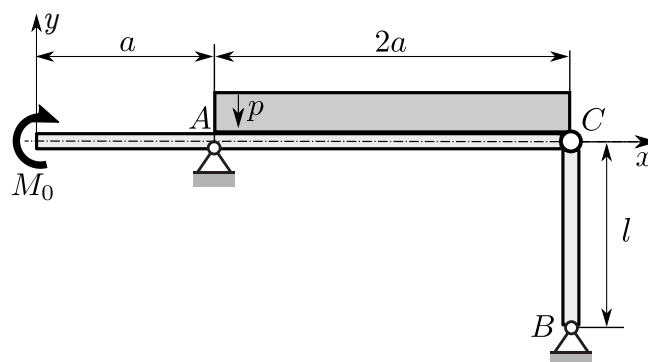
Célszerű volt a  $B$  ponton áthaladó  $b$  tengelyre felírni a nyomatéki egyenletet, mert erre a  $B_x$  és  $B_y$  erők nyomatéka zérus.

Az egyenletrendszer megoldása

$$B_x = 2Lp - F = 300 \text{ N}, \quad B_y = 2Lp - 2F = 100 \text{ N}, \quad C_y = 2(F - Lp) = -100 \text{ N}. \quad (4.84)$$



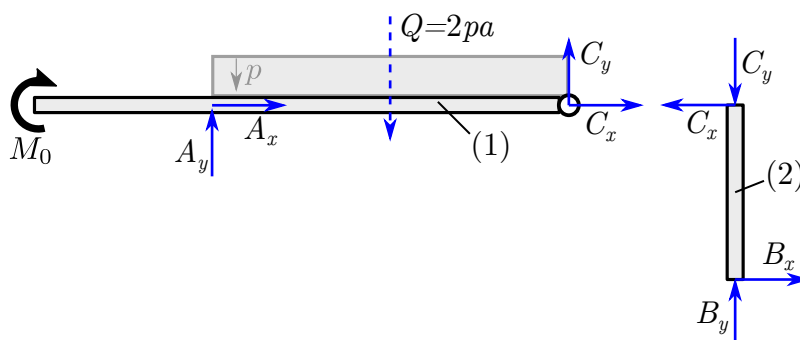
**4.7. példa:** Határozzuk meg a reakció-erőrendszer komponenseit a 4.28. ábrán látható példában! Adatok:  $l = 0,5 \text{ m}$ ,  $a = 0,5 \text{ m}$ ,  $M_0 = 200 \text{ Nm}$ ,  $p = 200 \text{ N/m}$



4.28. ábra. Csuklós szerkezet

**Megoldás:**

Három csukló támasztja meg a szerkezetet, ezért a reakciók meghatározásához külön kell vizsgálnunk a tartót alkotó két rúd egyensúlyát, a 4.29. szabadtest-ábra alapján. A megoszló erőt egy  $Q = p2a$  nagyságú koncentrált erővel helyettesíthetjük, melynek hatásvonala az A és C pontok közötti felezőpontot halad át. Célszerű először a (2)-vel jelölt rúd egyensúlyát



4.29. ábra. Csuklós szerkezet két részének szabadtest-ábrái

vizsgálni, mert arra csak a B és C csuklóban adódik át erő. Két erő csak akkor lehet egyensúlyban, ha azonos hatásvonalúak, tehát ebben az esetben ezek az erők rúdírányúak, ezért  $B_x = C_x = 0$ .

A feladat megoldásához ezután már elegendő csak az (1) jelű rúd egyensúlyi egyenleteit felírni:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + C_x = 0, \quad (4.85)$$

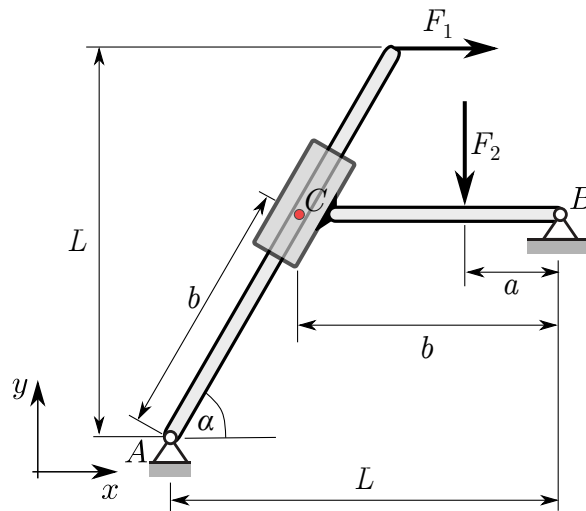
$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + C_y - Q = 0, \quad (4.86)$$

$$\sum M_a = 0 : \quad C_y 2a - M_0 - Qa = 0. \quad (4.87)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$A_x = 0, \quad A_y = -100 \text{ N}, \quad B_x = C_x = 0, \quad B_y = C_y = 300 \text{ N}, \quad (4.88)$$

ahol  $C_y$  az AC rúdra ható erő  $y$  irányú skalárkomponense. ♠



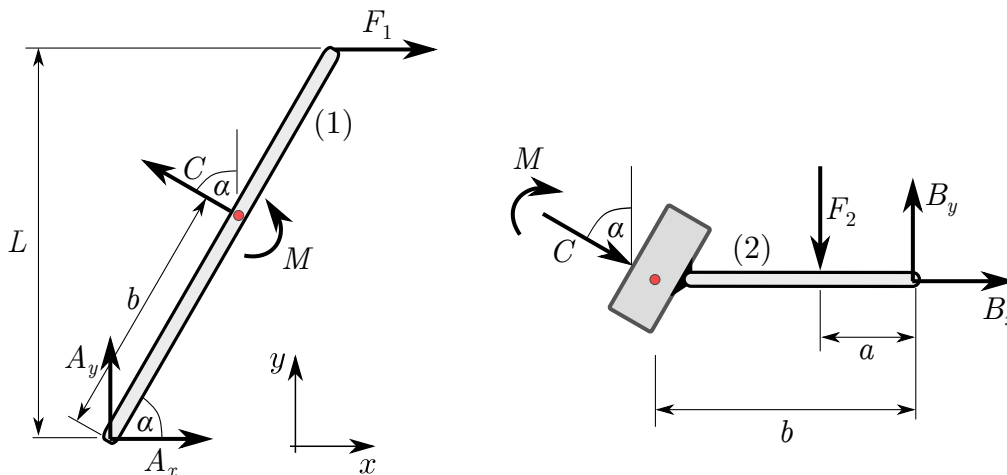
4.30. ábra. Csúszkás szerkezet

**4.8. példa:** Határozzuk meg a reakció-erőrendszer komponenseit a 4.30. ábrán látható példában! A csúszkánál elhanyagolható a súrlódás.

Adatok:  $F_1 = 2000 \text{ N}$ ,  $F_2 = 900 \text{ N}$ ,  $L = 1,5 \text{ m}$ ,  $a = 0,5 \text{ m}$ ,  $b = 1 \text{ m}$

**Megoldás:**

A reakciók meghatározásához szét kell bontani a szerkezetet, a 4.31. szabadtest-ábrákon látható módon. Mivel a csúszka a benne csúszó rúd irányára merőleges  $C$  erőt és az elfordulást megakadályozó  $M$  nyomatékot tud átvenni, ennek megfelelő belső erőrendszert vettünk fel a két rúd kapcsolódásánál, figyelembe véve a hatás-ellenhatás elvét.



4.31. ábra. Csúszkás szerkezet szabadtest-ábrái

A  $C$  erő komponensekre bontásához meg kell határozni az  $\alpha$  szög értékét:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{L-b}{L}\right) = 60^\circ. \quad (4.89)$$

A bal oldali, (1) jelű rúd egyensúlyi egyenletei:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + F_1 - C \sin(\alpha) = 0, \quad (4.90)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad A_y + C \cos(\alpha) = 0, \quad (4.91)$$

$$\sum M_a = 0 : \quad M + Cb - F_1L = 0. \quad (4.92)$$

A jobb oldali, (2) jelű rúd esetében felírható egyenletek:

$$\sum F_x = 0 : \quad B_x + C \sin(\alpha) = 0, \quad (4.93)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad B_y - F_2 - C \cos(\alpha) = 0, \quad (4.94)$$

$$\sum M_b = 0 : \quad Cb \cos(\alpha) + F_2a - M = 0. \quad (4.95)$$

A két nyomatéki egyensúlyi egyenletben csak két ismeretlen van,  $C$  és  $M$ , ezért érdemes ezek meghatározásával kezdeni az egyenletrendszer megoldását:

$$C = \frac{F_1L - F_2a}{b(1 + \cos(\alpha))} = 1700 \text{ N}, \quad M = Cb \cos(\alpha) + F_2a = 1300 \text{ Nm}. \quad (4.96)$$

A többi egyenletben most már csak egy-egy ismeretlen található, ezért ezek könnyen megoldhatók:

$$A_x = -527,757 \text{ N}, \quad A_y = -850 \text{ N}, \quad B_x = -1472,24 \text{ N}, \quad B_y = 1750 \text{ N}. \quad (4.97)$$

A megoldást a teljes szerkezet egyensúlyi egyenleteinek felírásával ellenőrizhetjük:

$$A_x + B_x + F_1 = 0, \quad A_y + B_y - F_2 = 0. \quad (4.98)$$



A reakció erőrendszer számítására számos további példa található az 5. fejezetben.





## 5. fejezet

# Rudak igénybevételei

### 5.1. A testekben ébredő belső erőrendszer

A 3. fejezetben láttuk, hogy az egyensúly feltételeinek vizsgálata során helyettesíthetjük az adott testet terhelő erőrendszert egy kiválasztott  $A$  pontban támadó  $\mathbf{F}$  erővel és egy  $\mathbf{M}_A$  nyomatékú, tetszőleges helyen ható erőpárral. Merev testek esetében nem kell foglalkoznunk azzal, hogy a tényleges terhelések (koncentrált vagy megoszló erők, erőpárok) hol érik a testet, ugyanis az eredeti erőrendszer és az  $A$  pontba redukált  $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_A]_A$  erőrendszer *statikailag egyenértékűek*.

A valóságos, deformálható testek esetében azonban megfigyelhető, hogy még az ugyanolyan vektorkettősökkel jellemezhető erőrendszereknek is különbözhet a hatása. Például könnyen belátható, hogy az 5.1. ábrán látható szivacs deformációja függ a rá ható koncentrált erő támadáspontjától: bár az asztalról átadódó kényszererő-rendszer akkor is biztosítja a test egyensúlyát, ha más pontban terheljük (egyensúlyban a statikai vektorkettős mindkét vektora nullvektor), a deformáció mindig az erő támadáspontja közelében lesz a legnagyobb. Egyúttal egy belső, megoszló erőrendszer is kialakul a test pontjaiban, aminek intenzitása jó közelítéssel egyenesen arányos az adott pontbeli deformációval.



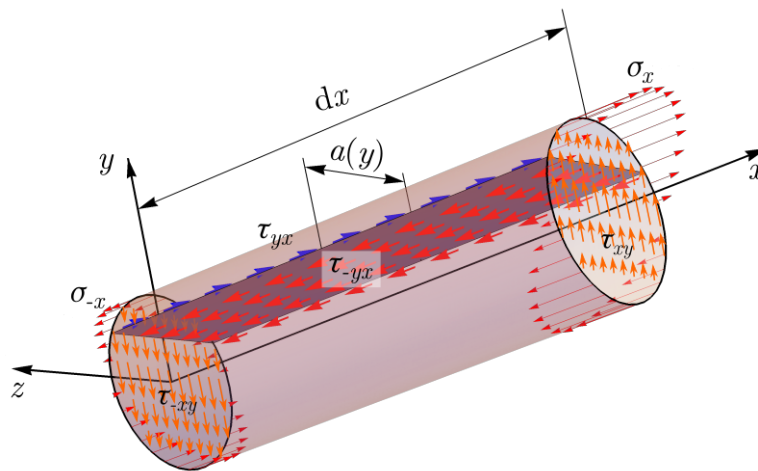
5.1. ábra. Szivacs terhelése koncentrált erővel [A31]

A deformálható testek mechanikájával a *szilárdságtan* tudománya foglalkozik, melynek elsődleges célja annak biztosítása, hogy a szerkezetek *tönkremenetel nélkül* elviseljék a rájuk ható terheléseket. Tönkremenetel – például repedés, törés vagy más maradó alakváltozás –

akkor következhet be, amikor a terhelések következtében egy olyan nagy intenzitású megoszló erőrendszer, azaz nagy *mechanikai feszültség* alakul ki a test belsejében, amittől a test bizonyos atomjai vagy molekulái eltávolodnak egymástól, és felszakadnak köztük a kémiai kötések.

**5.30. megjegyzés:** A testben ébredő belső erőrendszer intenzitását a test belsejében felvett felületekre szokták értelmezni; az ennek megfelelően definiált, pascal ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ) mértékegységű, irányával és nagyságával jellemezhető felületi erőintenzitást nevezzük *feszültségvektornak*. Belátható, hogy ha egy adott pontban három, egymásra merőleges síkon ismerjük a feszültségvektort, akkor ez alapján tetszőleges irányú felületen is meghatározhatjuk az ott fellépő belső erőrendszer intenzitásának nagyságát és irányát. Ez azt jelenti, hogy a pontbeli feszültségállapotot a három feszültségvektor  $3 \times 3 = 9$  darab koordinátájával jellemezhetjük. A kiválasztott felületre merőleges feszültségkomponenseket normálfeszültségnek nevezzük és a  $\sigma$  (szigma) görög betűvel jelöljük, a párhuzamos komponenseket – a csúsztatófeszültségeket – pedig  $\tau$  (tau) szimbólummal jelöljük (lásd 5.2. ábra). A feszültség fogalmát a szilárdságtan tárgyalja részletesen. ♣

Ebben a fejezetben azzal foglalkozunk, hogy milyen módon jellemezhető a test belsejében ébredő, felületen megoszló erőrendszer a statika eszközeivel. A belső erőrendszer intenzitása – a deformációhoz hasonlóan – pontról pontra változhat a testen belül, és még az sem mindegy, hogy milyen irányban vesszük fel azt a felületet, amire az erőrendszer hatását vizsgáljuk. Az 5.2. ábrán egy rúdból kivágott kis  $dx$  hosszúságú darab különféle felületein illusztráljuk az azokon ébredő megoszló erőrendszereket.



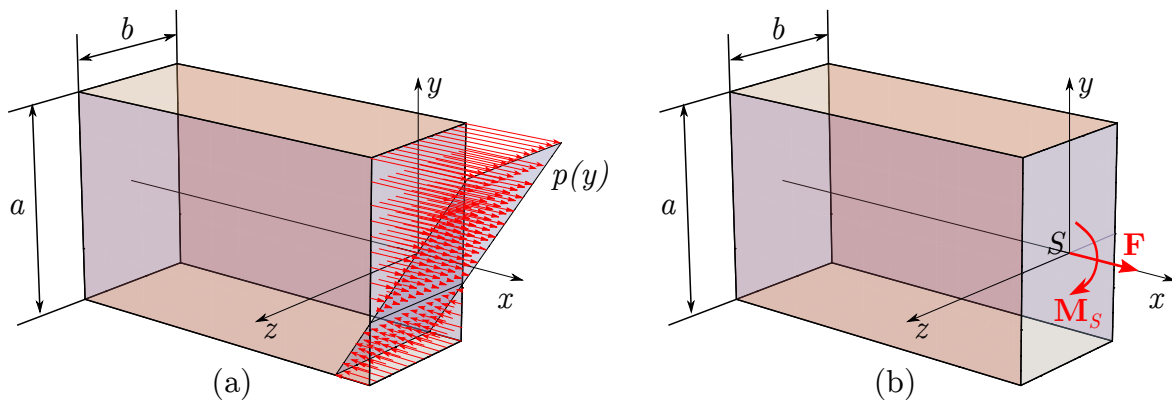
**5.2. ábra.** Hajlító és nyíróigénybevételnek kitett rúdból kivágott kis  $dx$  hosszúságú darab végkeresztmetszetein ébredő feszültségek ( $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_{-x}$ ,  $\tau_{-xy}$ ), valamint egy rúddal párhuzamosan felvett belső felület két oldalán ébredő feszültségek ( $\tau_{yx}$  és  $\tau_{-yx}$ )

Statikai szempontból kétféleképpen vizsgálhatunk egy adott felületen ébredő megoszló erőrendszert:

1. Az egyik megközelítés szerint ha ismernénk a megoszló belső erőrendszer intenzitását, akkor a 3.7. fejezetben írtakhoz hasonlóan meg lehetne határozni egy azzal statikailag egyenértékű, a felület súlypontjára számított  $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_S]_S$  vektorkettőst, ahogy az 5.3.

ábra mutatja.<sup>1</sup> Ezt a vektorkettőst nevezzük az adott felület *igénybevételének*. Bizonyos igénybevételek ilyen alapon történő meghatározásáról a 6. fejezetben lesz szó. Rudak esetében az  $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_S]_S$  vektorkettős megfelelően definiált komponenseiből származtathatjuk az *alapi igénybevételeket*: ezek a *normáligénybevétel* (húzás vagy nyomás), a *nyíróigénybevétel*, a *hajlítóigénybevétel* és a *csavaróigénybevétel*. Az alapi igénybevételek elnevezéséből látszik, hogy ezek olyan jellegzetes terhelés típusokból származtathatók, amilyenekkel a hétköznapiakban is találkozhatunk. Pontosabb meghatározásukra az 5.3. fejezetben kerül sor.

2. A statikai feladatokban inkább az a jellemző szituáció, hogy a testre ható *külső erőrendszer ismert*. Ilyenkor a test *egyensúlyának feltételeiből* következtetünk a belső erőrendszert jellemző igénybevételekre.



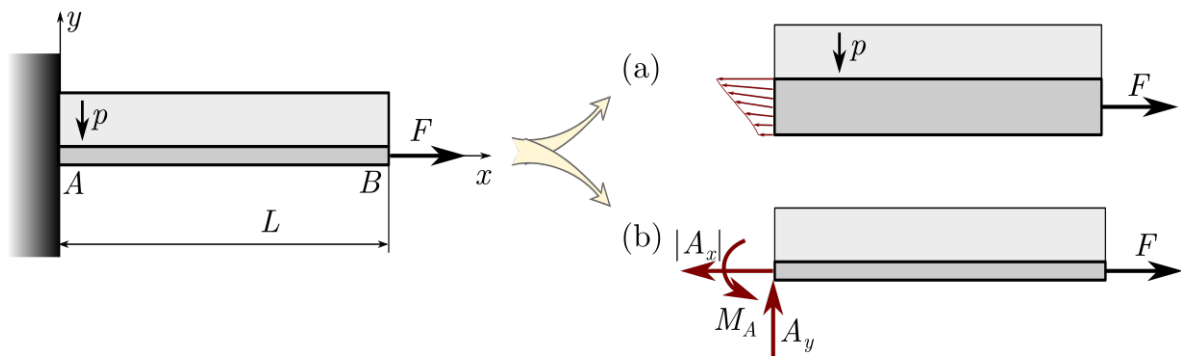
**5.3. ábra.** (a) Rúd keresztmetszetén ébredő megoszló erőrendszer. (b) A megoszló erőrendszerrel egyenértékű, koncentrált erőből és erőpárból álló erőrendszer

Az 5.4. ábrán a 4.2. feladatban már tárgyalt befogott tartó kapcsán mutatjuk be e két megközelítési módot. A befogás keresztmetszetében a rúd és a befogás (például fal) részecskéi közötti anyagi kapcsolatok akadályozzák meg a rúd adott keresztmetszetének elmozdulását és elfordulását, amiknek a hatását az (a) ábrán mutatott megoszló erőrendszerrel jellemezhetjük. Ennek az eloszlását a statika módszereit felhasználva nem lehet megadni, viszont a rúd egyensúlyi egyenletei alapján meghatározható a befogásban ébredő kényszererő-rendszer három komponense, azaz a (b) ábrára berajzolt  $A_x$ ,  $A_y$  erők és az  $M_A$  nyomaték. Ez utóbbiak *statikai szempontból egyenértékűen helyettesítik az (a) ábrán mutatott megoszló erőrendszert, és jellemzik a befogás keresztmetszetének különféle alapi igénybevételeit*. A példában  $|A_x|$  a normáligénybevételt,  $A_y$  a nyíróigénybevételt,  $M_A$  pedig a hajlítóigénybevételt jellemzi a befogás keresztmetszetében.

A szilárdságtan eszközeivel<sup>2</sup> meg lehet határozni, hogy a külső terhelések alapján számított igénybevételeket milyen méretű alkatrész képes elviselni – ezt az eljárást nevezik

<sup>1</sup>Erre utal az igénybevételek angol megnevezése: „stress resultant”, ami szó szerint a „feszültség eredőjét” jelenti.

<sup>2</sup>A szilárdságtani levezetésekben gyakran kihasználják, hogy a belső megoszló terhelés eredőjének meghatározása, illetve a külső és belső erőrendszerek egyensúlyának figyelembevétele ugyanazokra az igénybevételekre vezet.



**5.4. ábra.** (a) A befogás keresztmetszetében ébredő belső megoszló erőrendszer (a jobb láthatóság érdekében a rúd keresztirányú méretét felnagyítva ábrázoltuk). (b) A befogásnál ébredő megoszló erőrendszerrel statikailag egyenértékű reakcióerőrendszer

*méretezésnek.* Például adott kényszerekkel lekötött, adott hosszúságú és adott anyagminőségű rudak esetében ez a vastagsági (keresztirányú) méretek megfelelő megválasztásával érhető el. Az igénybevételek meghatározása elvégezhető pusztán statikai eszközökkel, ezért ez a témakör a statika tárgykörébe tartozik, míg magával a méretezéssel a szilárdságtan foglalkozik.

## 5.2. A rudak geometriai leírása

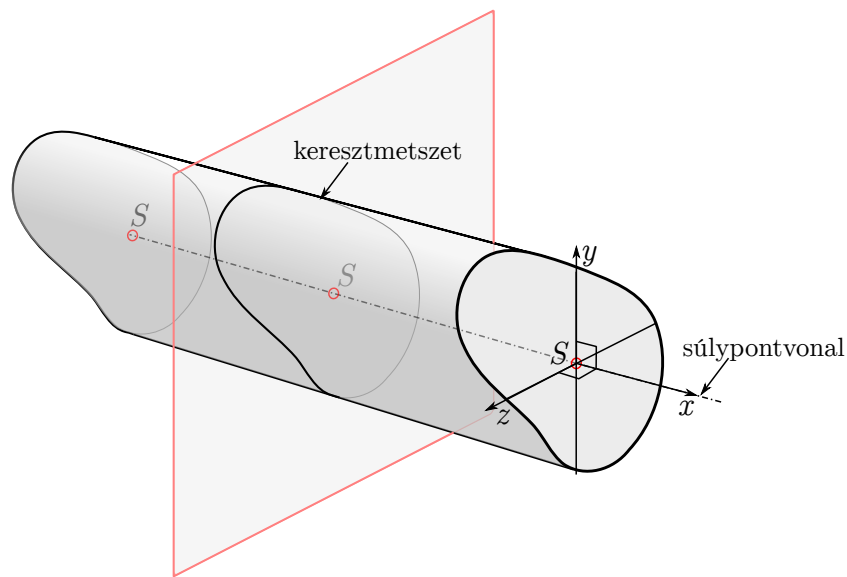
A továbbiakban csak a rudak igénybevételeivel foglalkozunk. Az 1.5. definíció szerint úgy határoztuk meg a rudakat, mint olyan anyagi testeket, melyek egyik mérete sokkal nagyobb, mint a másik kettő. Ebben a fejezetben pontosítjuk ezt a definíciót.

Egy rúd geometriai leírásához először is meg kell adnunk a rúd *súlypontvonalát* (5.5. ábra). A súlypontvonal általában sima görbe, de véges számú töréspont is lehet benne – például egy  $L$  alakú rúd (lásd 4.27. ábra) esetében ez a helyzet.<sup>3</sup> Általános esetben térbeli görbe is lehet a súlypontvonal (például egy csavarrugó esetében, mint az 5.6/b ábrán), de tartószerkezeteknél inkább *síkgörbe rudakkal* (5.6/a ábra) vagy *egyenes rudakkal* találkozunk. A súlypontvonal (ív)hossza az, ami rudaknál lényegesen nagyobb kell legyen a test súlypontvonalának érintőjére merőlegesen – azaz keresztirányban – mérhető méreteinél.

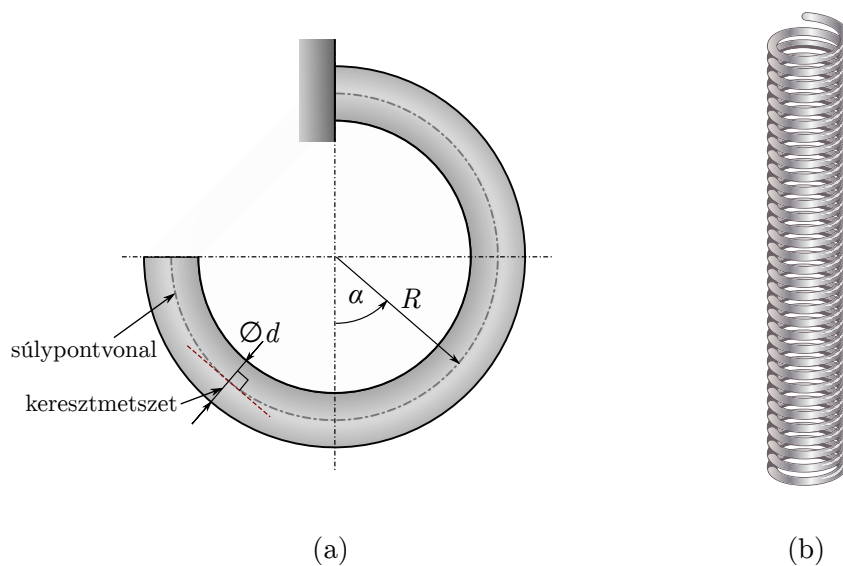
A rúd keresztirányú méreteit és alakját úgy definiálhatjuk, hogy a súlypontvonal minden pontjában felvehetünk egy síkidomot, ami a *súlypontvonal érintőjére merőleges*, és súlypontja a súlypontvonalba esik. Ezt a síkidomot nevezzük az adott ponthoz tartozó *keresztmetszetnek* (5.5. ábra). A keresztmetszet mérete és alakja változhat a rúd mentén. Ez a változás általában folytonos, mint az 5.7. ábrán, de véges számú ugrásszerű keresztmetszetváltozás is lehetséges. Különösen fontos az az eset, amikor a rúd keresztmetszete a súlypontvonal mentén mindenhol ugyanolyan alakú és méretű. Az ilyen rudakat *prizmatikus* rudaknak nevezzük (5.5. ábra).

A keresztmetszet fogalmának fenti pontosítására azért volt szükség, mert *rudak igénybevételeit mindig a keresztmetszetekre értelmezzük.* Ennek módjáról szól a következő fejezet.

<sup>3</sup>A valóságos rudak esetében természetesen mindig van valamilyen lekerekítés a sarkoknál.



5.5. ábra. Egyenes prizmatikus rúd keresztmetszete és súlypontvonal

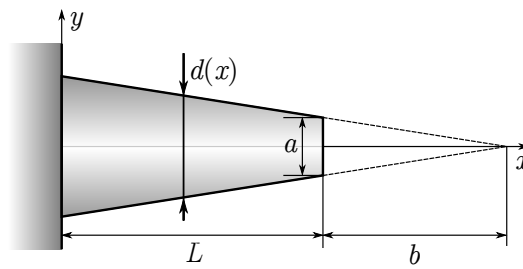


5.6. ábra. (a) Síkgörbe rúd. A súlypontvonal egy körív háromnegyede, ezért ívhossza  $2R\pi \cdot 3/4 = 3R\pi/2$ . (b) Csavarrugó, csavarvonal alakú súlypontvonallal

### 5.3. Az igénybevétel fogalma

Az 5.4. ábra kapcsán láttuk, hogy egy befogott rúd esetében a reakció-erőrendszer statikai szempontból egyenértékű a rúd befogott keresztmetszetére ható megoszló erőrendszerrel – hiszen a reakciók a rúd és a befogás (például fal) részecskéi közötti anyagi kapcsolatok révén fejtik ki hatásukat, ami megoszló erőrendszerrel modellezhető. A méretezéshez azonban nemcsak a rúd végén, hanem az *összes keresztmetszetben* ismerni kell az azokon ébredő erőrendszer tulajdonságait, azaz az igénybevételeket.

Az igénybevételek meghatározása a korábban megismert *részekre bontás elvén* (4.3. tétel)



5.7. ábra. Változó keresztmetszetű rúd

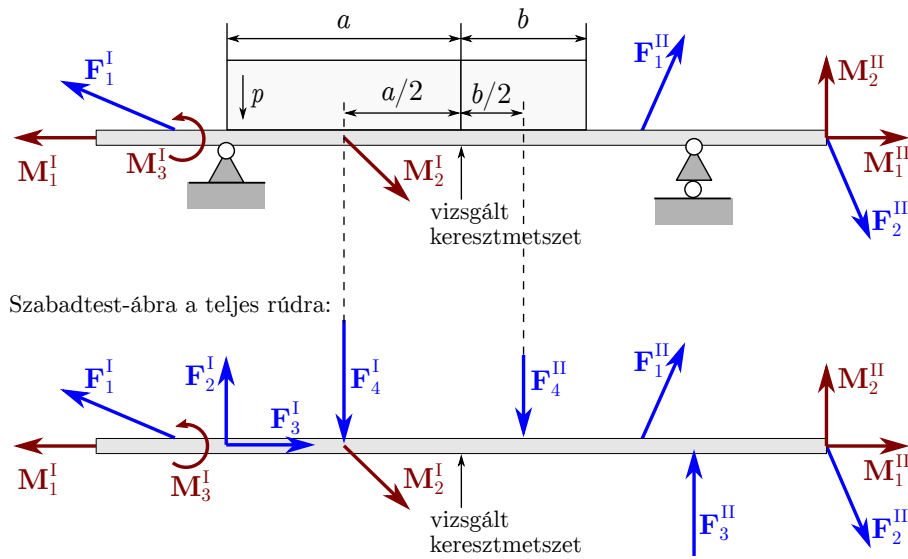
alapul, ami szerint ha az egész test egyensúlyban van, akkor annak minden egyes részének is egyensúlyban kell lennie. Ezt az elvet alkalmaztuk a szabadtest-ábrák rajzolása során is, például a csuklós szerkezeteket tárgyaló 4.3. fejezetben. Azonban nemcsak a csuklós kapcsolatoknál alkalmazhatjuk a részekre bontást: magukat a szerkezeteket alkotó *testeket* is elvághatjuk képzeletben, és vizsgálhatjuk az így kapott darabok egyensúlyát. Ezt alkalmaztuk az átmetsző módszer esetében is (4.2.3. fejezet), de ott csak rúdírányú belső erők jelenhettek meg. Általános esetben egy tetszőleges irányú és nagyságú erővektor és egy tetszőleges irányú és nagyságú nyomatékvektor segítségével jellemezhetjük a belső erőrendszert az elvágott keresztmetszetben.

**5.31. megjegyzés:** A testeket tekinthetjük úgy, mintha bonyolult rácsos szerkezetek lennének, ahol az anyagot alkotó atomok vagy molekulák a csomópontok, a rudak pedig az azok közti erőket modellezik. A terheléstől függően a modellben szereplő rudak egy része nyomott, más része húzott lesz. Ha az átmetsző módszert alkalmazva képzeletben szétvágjuk a testet alkotó atomrácsot, akkor a számos, különféle irányú elemi belső erő egy megoszló erőrendszerként értelmezhető. ♣

Tegyük fel, hogy az 5.8. ábrán szereplő kéttámaszú tartó bejelölt keresztmetszetében szeretnénk meghatározni az igénybevételeket! A következőkben sorra kerülő számítások megkönnyítése érdekében, a vizsgált keresztmetszet két oldalán lévő rúdrészekre ható erőket eltérő jelöléssel vesszük fel:  $F_i^I$  illetve  $M_j^I$  jelöli az ábrán bal oldali,  $F_i^{II}$  illetve  $M_j^{II}$  pedig a jobb oldali darabra ható erőket, nyomatékokat, ahol  $i, j = 1, 2, \dots$ . Mivel a rúd igénybevétele szempontjából közömbös, hogy az erőrendszer elemei közül melyek terhelések és melyek reakciók, az aktív- és kényszererőket nem különböztetjük meg a szabadtest-ábrán. Azt viszont kihasználjuk, hogy a tartó egyensúlyban van; statikailag határozott szerkezetnél ez automatikusan teljesül, mert mindig olyan kényszererő-rendszer ébred, ami biztosítja a rúd egyensúlyát. A példában egy olyan keresztmetszetet vizsgálunk, ami egy  $p$  intenzitású megoszló külső erővel terhelt rúdszakaszon helyezkedik el. Az igénybevételek meghatározásához a megoszló erőrendszert is két részre kell bontani a vizsgált keresztmetszetnél, és két koncentrált erővel ( $|\mathbf{F}_4^I| = pa$  és  $|\mathbf{F}_4^{II}| = pb$ ) kell helyettesíteni.

Ha a rudat kettévágjuk a vizsgált keresztmetszetben, akkor e két darabnak is egyensúlyban kell lennie. Ennek vizsgálatához figyelembe kell vennünk mindkét darab esetében a másik rúdrészről átadódó, a rúd belsejében ébredő megoszló erőrendszert is, amit az 5.9. ábrán illusztrálunk.

A (II) jelű rúdrészről az (I) jelűre átadódó megoszló erőrendszer redukálható a vizsgált keresztmetszet  $S$  súlypontjába, így statikailag egyenértékűen helyettesíthető egy  $\mathbf{F}^{II}$  erővel



**5.8. ábra.** Kéttámaszú tartó, melynek bejelölt keresztmetszetében szeretnénk meghatározni az igénybevételeket

és egy  $\mathbf{M}_S^{\text{II}}$  nyomatékkal. A másik rúdrészre Newton 3. törvénye értelmében ezekkel ellentétes értelmű erőrendszer hat, amit egy  $\mathbf{F}^{\text{I}} = -\mathbf{F}^{\text{II}}$  erővel és egy  $\mathbf{M}_S^{\text{I}} = -\mathbf{M}_S^{\text{II}}$  nyomatékkal jellemezhetünk. Feladatunk ezeknek az erő- és nyomatékvektoroknak a meghatározása.

A fentiek figyelembevételével a keresett  $\mathbf{F}^{\text{I}}$  és  $\mathbf{M}_S^{\text{I}}$  vektorok meghatározhatók az (I) rúd egyensúlyának feltételei alapján:

$$\mathbf{F}^{\text{II}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{I}} = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{I}} = -\mathbf{F}^{\text{II}} = \mathbf{F}^{\text{I}}, \quad (5.1)$$

$$\mathbf{M}_S^{\text{II}} + \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j^{\text{I}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{\text{I}} \times \mathbf{F}_i^{\text{I}} = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j^{\text{I}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{\text{I}} \times \mathbf{F}_i^{\text{I}} = -\mathbf{M}_S^{\text{II}} = \mathbf{M}_S^{\text{I}}, \quad (5.2)$$

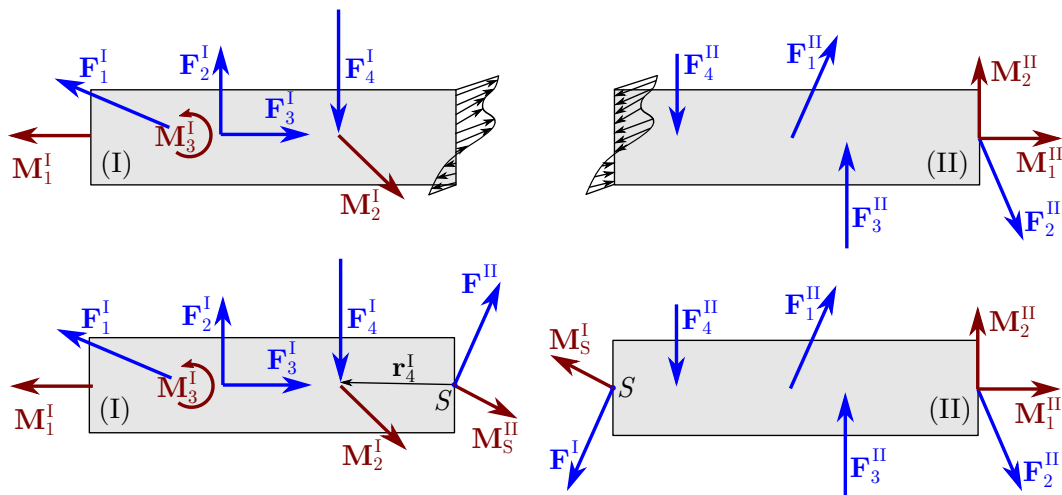
ahol  $\mathbf{r}_i^{\text{I}}$  a vizsgált keresztmetszet  $S$  súlypontjából az (I) rúdra ható  $i$ -edik koncentrált erő hatásvonalához húzott helyvektor (ezek közül csak az  $\mathbf{r}_4^{\text{I}}$  vektort tüntettük fel az 5.9. ábrán). Az illusztrációként választott példában  $n = 4$  és  $m = 3$ , de tetszőleges számú koncentrált erő és erőpár esetében is ugyanilyen alakú egyenleteket kapnánk. Következésképpen általánosan is igaz, hogy az (I) jelű rúdszakaszra ható külső erőrendszer  $S$  pontba redukált vektorkettősével egyenlő a (II) rúdszakaszra a keresztmetszetben ható belső megoszló erőrendszer  $[\mathbf{F}^{\text{I}}; \mathbf{M}_S^{\text{I}}]_S$  statikai vektorkettőse, azaz a vizsgált keresztmetszet igénybevétele.

Hasonló eredményt kapunk a (II) rúdszakasz egyensúlyi egyenleteiből is:

$$\mathbf{F}^{\text{I}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{II}} = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{\text{II}} = -\mathbf{F}^{\text{I}} = \mathbf{F}^{\text{II}}, \quad (5.3)$$

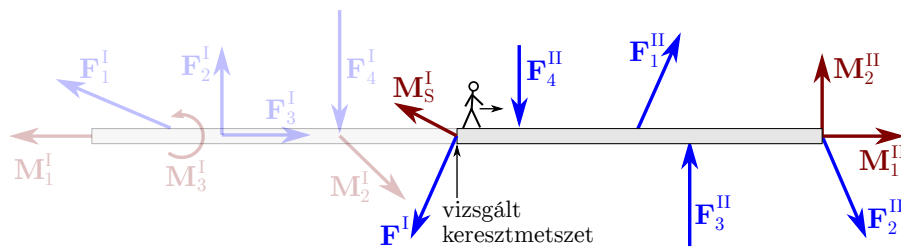
$$\mathbf{M}_S^{\text{I}} + \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j^{\text{II}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{\text{II}} \times \mathbf{F}_i^{\text{II}} = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{j=1}^m \mathbf{M}_j^{\text{II}} + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i^{\text{II}} \times \mathbf{F}_i^{\text{II}} = -\mathbf{M}_S^{\text{I}} = \mathbf{M}_S^{\text{II}}. \quad (5.4)$$

A fentiek úgy értelmezhetőek, hogy egy keresztmetszet igénybevétele a keresztmetszet egyik oldalán ható erőrendszernek a keresztmetszet súlypontjába való redukáltja.



**5.9. ábra.** Rúd adott keresztmetszetének két oldalán ébredő megoszló erőrendszerek (felső ábrák), és az azokkal statikailag egyenértékű vektorkettősök vektorai (alsó ábrák)

Eredményeink szerint tehát a rúd igénybevételeit úgy határozhatjuk meg, hogy végighaladunk a rúd mentén, az elhagyott részt képzeletben levágjuk, és az arra ható erőrendszert az elvágás keresztmetszetének súlypontjába redukáljuk, ahogy az 5.10. ábra mutatja. Ha ezt



**5.10. ábra.** Az igénybevételek meghatározása: adott irányban végighaladva a rúdon, az elhagyott részt képzeletben levágjuk, és az arra ható erőrendszert az elvágás keresztmetszetének súlypontjába redukáljuk

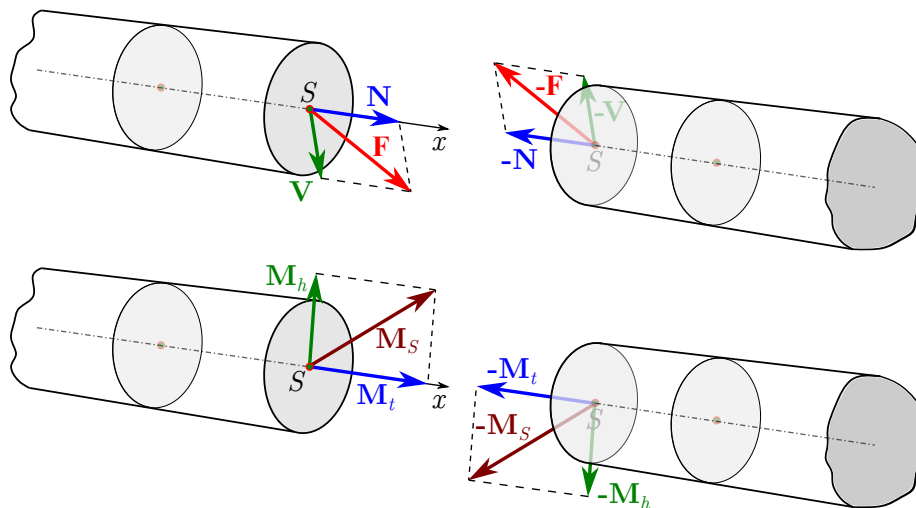
az eljárást alkalmazzuk, akkor a rúd mentén balról jobbra haladva mindig a keresztmetszetek bal oldalán ébredő erő- és nyomatékvektorokat kapunk eredményül, míg jobbról balra haladva azokkal ellentétes értelmű vektorokat – hiszen Newton 3. törvénye értelmében egy adott keresztmetszet két oldalán ellentétes értelmű vektorok jellemzik az igénybevételeket, az 5.11. ábrának megfelelően.

Ez az oka annak, hogy az igénybevételeket nem egy külső, adott  $(x, y, z)$  koordináta-rendszerben szokták megadni, hanem a keresztmetszethez viszonyítva. Ennek során figyelembe kell venni, hogy a keresztmetszet melyik oldalát vizsgáljuk – ezt a keresztmetszet síkjának normálvektorával (azaz a síkra merőleges egységvektorral) adhatjuk meg. Felbontva az  $[\mathbf{F}; \mathbf{M}_S]_S$  vektorkettős vektorait az adott keresztmetszetre merőleges és azzal párhuzamos komponensekre, az alábbi négy alapigénybevétel vezethető be (lásd 5.11. ábra):

Az  $\mathbf{F}$  erővektor két komponense

- a keresztmetszetre merőleges  $\mathbf{N}$  normáligénybevétel (normálerő), és





**5.11. ábra.** Az alapigénybevételeket a keresztmetszetben ébredő erő- és nyomatékvektor keresztmetszetre merőleges és azzal párhuzamos összetevőkre történő felbontásával határozhatjuk meg

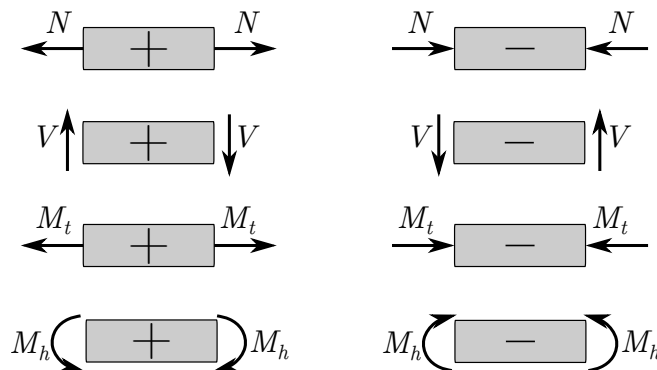
- a keresztmetszet síkjával párhuzamos  $\mathbf{V}$  *nyíróigénybevétel* (nyíróerő).

Az  $\mathbf{M}_S$  nyomaték komponensei pedig

- a keresztmetszetre merőleges irányú  $\mathbf{M}_t$  *csavaróigénybevétel* (csavarónyomaték, amit szokás  $\mathbf{M}_{cs}$ -vel is jelölni), és
- a keresztmetszet síkjába eső  $\mathbf{M}_h$  *hajlítóigénybevétel* (hajlítónyomaték).

Ha csak egy alapigénybevétel különbözik nullától, akkor *tiszta igénybevételről* beszélünk (pl. tiszta hajlítás), ellenkező esetben *összetettnek* nevezzük az igénybevételt (pl. hajlítás és nyírás általában együtt lép fel).

A bemutatott felbontás lehetővé teszi az igénybevételek *skalármennyiségekkel* történő jellemzését. A skalár értékű alapigénybevételek előjelét síkbeli esetben (amikor a hajlítónyomaték és a nyíróerő vektora merőleges) az 5.12. ábrán látható ún. *előjelkonvenciók* szerint állapíthatjuk meg. Az ábrán a vizsgált rúdból kivágott kis darabok bal és jobb ol-

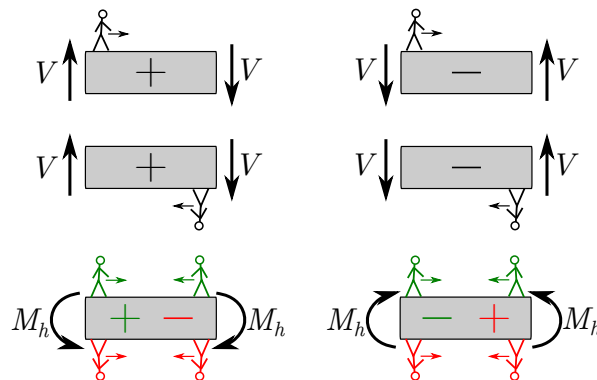


**5.12. ábra.** Az igénybevételekre vonatkozó előjelkonvenciók

dali végkeresztmetszeteire rajzoltuk be a pozitív illetve negatív igénybevételeket. Ezeknek a kis daraboknak az egyensúlyához szükséges, hogy a két keresztmetszeten ellenkező értelmű vektorok adják meg az igénybevételeket. Viszont az előjelkonvenciók szerint akár a jobb oldali, akár a bal oldali keresztmetszetet vizsgálhatjuk, a skalármennyiségekkel megadott alapigénybevételek előjelét ez nem befolyásolja.

**5.32. megjegyzés:** A legáltalánosabb esetben a nyíróigénybevétel és a hajlítói igénybevétel vektorai nem merőlegesek egymásra. Ekkor további két-két komponensre bontható ez a két vektor, és ezeknek megfelelő vetületi ábrákon értelmezhető a nyíróerő és a hajlítónyomaték komponenseinek előjele. ♣

A *normáligenybevétel* és a *csavaróigenybevétel* előjelének megállapításához elegendő a keresztmetszet irányának megadása: a pozitív értékek a keresztmetszetről kifelé (a felület normálvektora irányában, azaz a rúdból elhagyott rész felé), a negatívok a keresztmetszet felé mutató vektoroknak felelnek meg. Ennek megfelelően a negatív  $N$  normáligenybevétel nyomást, a pozitív pedig húzást jelent, amik fizikailag jól elkülöníthető esetek. A *hajlítói igénybevétel* esetében azonban meg kell adni, hogy a rúd melyik oldalán haladunk végig, hiszen ha azt a hajlítónyomatékot tekintjük pozitívnak, ami a rúd végeit „lefelé” hajlítja, akkor az ellenkező oldalról nézve éppen ellentétes előjelek jönnek ki, ahogy az 5.13. ábra mutatja. Különleges a *nyíróigenybevétel* esete, mert az nem szimmetrikus. Ezért meg kell különböztetnünk a tőlünk „jobbra” és „balra” lévő keresztmetszeteket is, és akkor tekintjük a nyíróerőt pozitívnak, ha a balra lévő keresztmetszetben felfelé mutat.

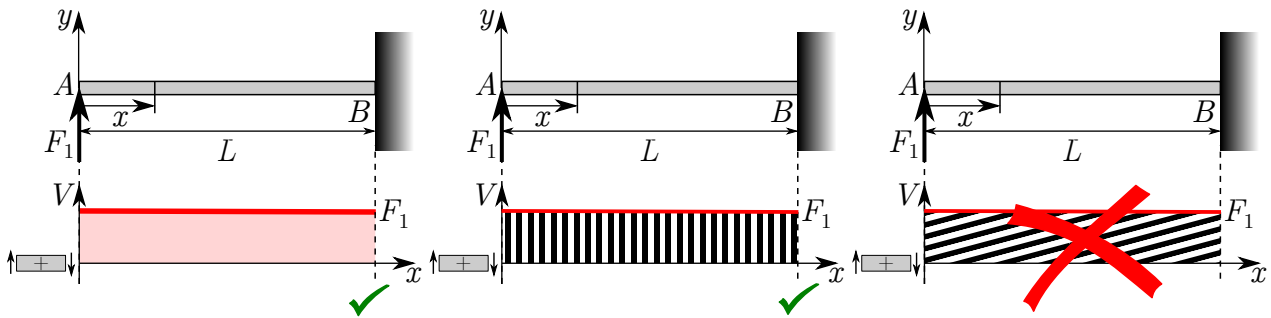


**5.13. ábra.** A nyíró- és hajlítói igénybevételre vonatkozó előjelkonvenciók speciális esetei

## 5.4. Igénybevételi függvények és igénybevételi ábrák

Méretezéshez a rudak igénybevételeit minden keresztmetszetben ismerni kell, ezért célszerű felvenni egy koordinátát a rúd súlypontvonalára mentén, és annak függvényeként megadni az igénybevételeket. Az így előállítható függvényeket *igénybevételi függvényeknek* nevezzük, melyek grafikonjai az *igénybevételi ábrák*.

Sok esetben – elsősorban amikor törtvonalú vagy görbe rúd súlypontvonalára rajzoljuk fel az igénybevételi ábrákat (lásd 5.6. fejezet) – célszerű lehet jelölni a rúd mentén felvett tengely

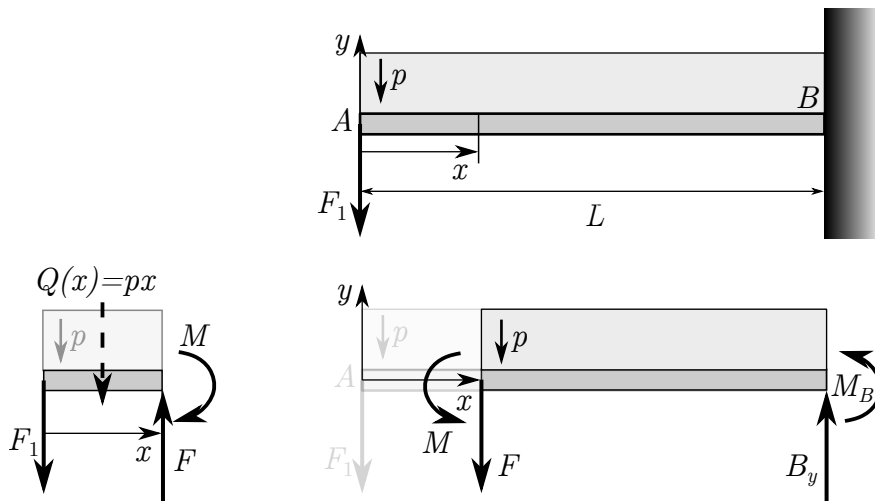


**5.14. ábra.** Az igénybevételi függvény grafikonja alatti területet színezéssel vagy a rúd súlypontvonalára merőleges irányú vonalkázással jelölhetjük, de a ferde sraffozás nem megengedett

és a függvényérték közötti területet, hogy jobban elkülönüljön a tengely és a függvényérték vonala. Az 5.5. fejezetben látni fogjuk, hogy sok esetben fizikai tartalom is rendelhető a grafikon alatti területhez.

Nyomatásban gyakran beszínezik ezt a területet, kézi rajzoláskor pedig a rúd mentén felvett tengely érintőjére merőleges (például az 5.14. ábrán függőleges, kör alakba görbített rúdnál pedig sugárirányú) vonalkázást lehet alkalmazni. Ebben az esetben a vonalak úgy értelmezhetőek, hogy azok összekötik az adott  $x$  koordináta értékét a hozzá tartozó függvényértékkel. Éppen ezért a *ferde vonalkázást kerülni kell!*

**5.1. példa:** Határozzuk meg az 5.15. ábrán látható befogott rúd igénybevételi függvényeit és ábráit!



**5.15. ábra.** Az 5.1. feladat szerkezeti ábrája és a kettévágott rúd szabadtest-ábrái

### Megoldás:

A rúdra csak a súlypontvonalára merőleges  $F_1$  erő és  $p$  intenzitású megoszló terhelés hat, ezért a normáligénybevételi függvény és a csavaróigénybevételi függvény egyaránt azonosan nulla:

$$N(x) \equiv 0, \quad \text{ha } x \in [0, L] \quad (5.5)$$

$$M_t(x) \equiv 0, \quad \text{ha } x \in [0, L]. \quad (5.6)$$

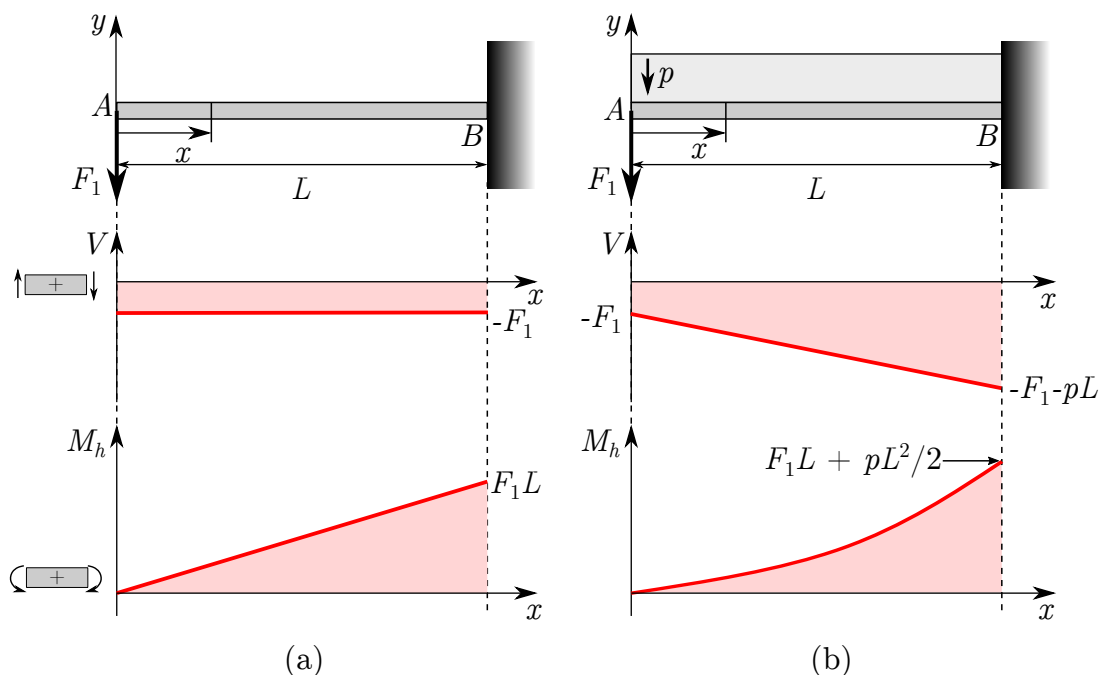
Ha az  $x$  tengely pozitív irányában (azaz balról jobbra) haladunk a rúd mentén, akkor az  $x$  koordinátájú keresztmetszettől balra található részt hagyjuk el gondolatban, és az arra ható erőrendszert redukáljuk a keresztmetszet súlypontjába. A szóban forgó erőrendszer az  $F_1$  erőből és az  $x$  hosszban ható  $p$  intenzitású megoszló terhelésből áll. A megoszló terhelést  $Q(x) = px$  nagyságú koncentrált erővel helyettesíthetjük. Az elhagyott rész hatását egy  $F = F_1 + Q$  nagyságú erővel és egy  $M = F_1x + Qx/2$  nyomatékú erőpárral tudjuk jellemezni, mert az  $F_1$  erő hatásvonala  $x$ , a  $Q$  erő hatásvonala pedig  $x/2$  távolságban helyezkedik el a vizsgált,  $x$  koordinátájú keresztmetszettől. Az 5.15. ábrán látszik, hogy a rúd két részére ellentétes értelmű  $F$  erő és  $M$  nyomaték hat a vizsgált keresztmetszet két oldalán, de az előjelkonvenciók figyelembevételével ezek egyaránt pozitív hajlítónyomatéknak és negatív nyírőerőnek felelnek meg. Tehát az alábbi igénybevételi függvényeket kapjuk:

$$V(x) = -F \equiv -F_1 - Q(x) \equiv -F_1 - px, \quad \text{ha } 0 \leq x \leq L, \quad (5.7)$$

$$M_h(x) = M \equiv F_1x + Q(x)\frac{x}{2} \equiv F_1x + p\frac{x^2}{2}, \quad \text{ha } 0 \leq x \leq L. \quad (5.8)$$

Fontos, hogy csak az  $x$  koordinátájú keresztmetszettől balra lévő, *külső* erőrendszert vesszük figyelembe! Tehát sem az ábrán feltüntetett, a keresztmetszetben ható belső erőrendszert helyettesítő  $F$  erő és  $M$  nyomaték, sem pedig az  $x$  koordinátájú keresztmetszettől jobbra ható külső erőrendszer (például a  $B_y$  erő és az  $M_B$  nyomaték) nem kerül be az igénybevételi függvényekbe.

Az igénybevételi ábrákat az 5.16. ábra mutatja két különböző esetre: az (a) ábrán  $p = 0$ , tehát nincs megoszló terhelés. Ekkor állandó értékű a nyíróigénybevétel és lineárisan változik a hajlítónyomaték. A (b) ábrán az  $F_1 > 0$ ,  $p > 0$  eset látható. Megfigyelhető,



**5.16. ábra.** Az 5.1. feladat nyíró- és hajlítóigénybevételi ábrái (a):  $F_1 > 0$  és  $p = 0$ , (b):  $F_1 > 0$  és  $p > 0$

hogy állandó intenzitású megoszló terhelés mellett lineárisan változó nyíróigénybevételt és másodfokú függvény szerint változó hajlítóigénybevételt kapunk.

A reakciók értéke meghatározható az igénybevételi ábrák alapján, ugyanis az  $x = L$  keresztmetszetben leolvasható nyíróerő illetve hajlítónyomaték a teljes rúdra ható külső erőrendszert jellemzi, a rúd végénél ébredő reakciók kivételével.<sup>4</sup> A teljes erőrendszer egyensúlyi, tehát a  $V(L)$  és  $M_h(L)$  erőrendszerrel kell egyensúlyt tartaniuk a rúd jobb oldali végén ébredő reakcióknak. A befogásnál negatív a nyíróigénybevétel, ami negatív  $y$  irányú erőnek felel meg a befogás keresztmetszetének bal oldalán, ezért az ezzel egyensúlyt tartó kényszererő a keresztmetszet jobb oldalán  $B_y = F_1 + pL > 0$ . Az  $x = L$  helyen pozitív a hajlítónyomaték, ami pozitív  $z$  irányú nyomatéknak felel meg a  $B$  keresztmetszet bal oldalán. Következésképpen a jobb oldalon ébredő  $M_B$  reakciónyomaték negatív, azaz az 5.15. ábrán felvett ellentétes értelmű:  $M_B = -F_1L - pL^2/2 < 0$ . Természetesen ugyanezeket a reakciókat kapjuk az egyensúlyi egyenletek alapján is.

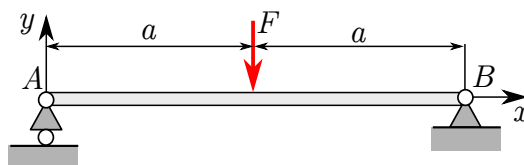
Érdemes minden feladatot a reakciók meghatározásával kezdeni, még akkor is, ha azok nem feltétlenül szükségesek az igénybevételek meghatározásához (ez a helyzet, ha egy befogott rúd szabad vége felől haladunk az igénybevételek meghatározása során). Így ugyanis ellenőrizhető, hogy az egyensúlyi egyenletek alapján kapott reakciókkal összhangban vannak-e az igénybevételi ábrák.

Általánosan is igaz, hogy a rúd végein ébredő erőrendszereket is figyelembe véve az igénybevételi ábráknak zérus értékeket kell adniuk a rúd mindkét végén. Ezzel a megközelítéssel úgy vehetjük, hogy például az  $F_1$  erő egy negatív irányú  $0 \rightarrow -F_1$  értékű szakadást okoz a nyíróigénybevételi függvényben  $x = 0$ -nál, míg a befogásnál ébredő  $B_y > 0$  reakcióerő hatására egy pozitív irányú  $-F_1 - pL \rightarrow 0$  szakadás következik be  $x = L$ -nél.

Ehhez hasonlóan, ha egy koncentrált erőpár hat a rúdra, akkor a hajlítónyomatéki függvényben következik be szakadás: a példában az  $M_B$  nyomaték hatására áll vissza a hajlítónyomaték nullára a befogás keresztmetszetében.

Ezeket az összefüggéseket csak az igénybevételi ábrák ellenőrzésére használjuk. Ha koncentrált erő vagy erőpár hat a rúd végén, akkor méretezéskor természetesen a nemzérus igénybevételt veszik figyelembe. ♠

**5.2. példa:** Határozzuk meg az igénybevételi függvényeket és ábrákat az 5.17. ábrán látható feladatban!



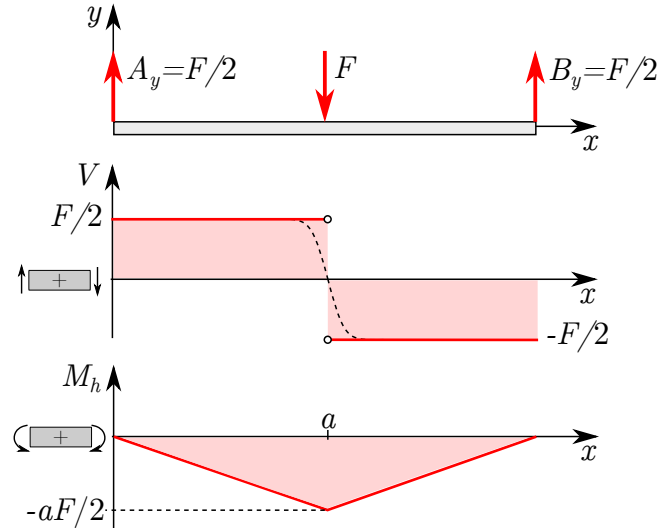
5.17. ábra. Az 5.2. példához tartozó szerkezeti ábra

### Megoldás:

Mivel nincs  $x$  irányú terhelés, a  $B$  csuklóban nem ébred  $x$  irányú erő, ezért a normáligénybevételi függvény azonosan nulla:  $N(x) \equiv 0$ . A rúddal párhuzamos irányú nyomaték sem terheli a rudat, tehát a csavarónyomatéki függvény is zérus értékű:  $M_t(x) \equiv 0$ .

<sup>4</sup>Korábban is említettük, hogy csak a vizsgált keresztmetszettől balra (vagy a másik irányból haladva jobbra) ható erőket és nyomatékokat kell figyelembe venni az igénybevételi függvényekben.

Ebben az esetben a rúd mindkét végén hatnak kényszererők, ezért azokat mindenképpen meg kell határoznunk az igénybevételek elemzése előtt. A szerkezet és a terhelés szimmetriája miatt az  $A$  és  $B$  pontokban ébredő  $y$  irányú kényszererők egyenlők:  $F/2$  nagyságúak, ahogy a tartó szabadtest-ábráján is jelöltük (5.18. ábra). A rúd  $0 \leq x < a$  szakaszán végighaladva, az



**5.18. ábra.** Az 5.2. példához tartozó szabadtest-ábra és igénybevételi ábrák. A nyíróigénybevételi ábrán szaggatott vonal jelöli, hogy egy valóságos,  $F$  eredőjű megoszló erőrendszer mellett folytonosan változna a  $V(x)$  függvény

aktuális  $x$  koordinátától balra lévő elhagyott részre csak pozitív értelmű  $A_y = F/2$  nagyságú erő hat,  $a < x \leq 2a$  esetben viszont  $A_y - F = -F/2$  lesz az elhagyott részre ható erők előjeles összege. Tehát a nyíróigénybevételi függvény

$$V(x) = \begin{cases} A_y \equiv F/2, & \text{ha } 0 \leq x < a, \\ A_y - F \equiv -F/2, & \text{ha } a < x \leq 2a. \end{cases} \quad (5.9)$$

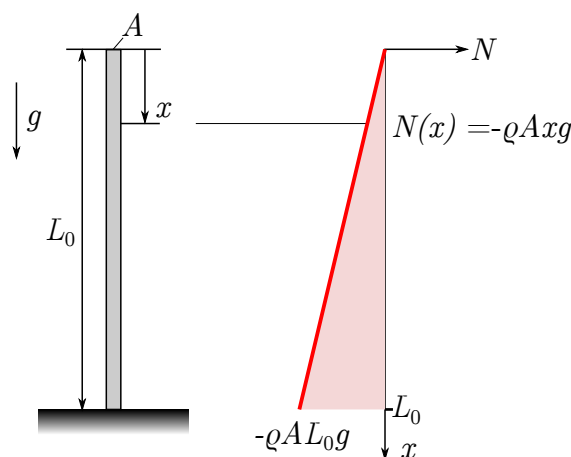
Az  $x = a$  keresztmetszetben ható  $F$  koncentrált erő egy szakadást (negatív értelmű ugrást) okoz a függvényben, amit ezért két külön szakaszon adunk meg, és úgy vesszük, hogy a szakadás keresztmetszetében nem értelmezett a nyíróigénybevételi függvény. Ez annak felel meg, hogy a koncentrált erő csak egy idealizáció, a valóságos erők mindig megoszlóak. Tehát a valóságban a nyíróerő folytonosan csökken le  $F/2$ -ről  $(-F/2)$ -re, de a függvény lefutásának megállapításához ismernünk kellene, hogy pontosan milyen megoszló erőrendszert modelleztünk az  $F$  koncentrált erővel. Mivel ezt nem tudjuk, egy szakadással vesszük figyelembe a koncentrált erőt. Ehhez hasonlóan, a koncentrált erőpárok a hajlítónyomatéki vagy csavarónyomatéki függvényekben okoznak szakadást. Méretezéskor mindig a nagyobb abszolút értékű igénybevétellel számolunk a szakadásnál kiadódó két igénybevétel közül – bármilyen alapigénybevételről legyen is szó.

A hajlítói igénybevételi függvény esetében az első szakaszon csak az  $A_y$  erőt kell figyelembe venni,  $x$  erőkarral, a második szakaszon pedig ehhez hozzá kell venni az  $F$  erőt is,  $x - a$  erőkarral:

$$M_h(x) = \begin{cases} -A_y x = -Fx/2, & \text{ha } 0 \leq x < a, \\ -A_y x + F(x - a) = Fx/2 - Fa, & \text{ha } a < x \leq 2a. \end{cases} \quad (5.10)$$

Az igénybevételi függvények felírása során fontos az értelmezési tartományok feltüntetése, mert így meg tudjuk különböztetni az egyes szakaszokra felírt függvényeket. A feladathoz tartozó igénybevételi ábrák az 5.18. ábrán láthatók. ♠

**5.3. példa:** *Határozzuk meg a normáligenybevételi függvényt az 5.19. ábrán illusztrált, függőleges helyzetű rúd mentén!*



**5.19. ábra.** *Függőleges helyzetű, befogott rúd szerkezeti ábrája, és a hozzá tartozó normáligenybevételi függvény grafikonja*

**Megoldás:**

A normáligenybevételi függvényt az alapján írhatjuk fel, hogy a rúd felső végétől  $x$  távolságra lévő keresztmetszetet a felette lévő rúdszakasz súlya nyomja. Az  $x$  hosszúságú és  $A$  keresztmetszet területű rúdszakasz térfogata  $V = Ax$ , tömege  $m = \rho Ax$ , súlya pedig  $F = \rho Axg$ . Mivel ez az erő nyomja az  $x$  koordinátájú keresztmetszetet, a normáligenybevételi függvény negatív értékű lesz a rúd mentén:

$$N(x) = -\rho Axg. \quad (5.11)$$



## 5.5. Kapcsolat a megoszló terhelés intenzitása, a nyíróigénybevételi függvény és a hajlítónyomatéki függvény között

Az előző fejezet példái alapján az alábbi összefüggéseket figyelhettük meg a megoszló terhelés intenzitását megadó  $p(x)$  függvény, a  $V(x)$  nyíróigénybevételi függvény, és az  $M_h(x)$  hajlítóigénybevételi függvény között (lásd még 5.5. példa):

- Ha a vizsgált szakaszon nem hat megoszló terhelés, akkor a nyíróigénybevétel konstans.
- Ha a vizsgált szakaszon állandó intenzitású a megoszló terhelés, akkor a nyíróigénybevétel lineáris függvénnyel adható meg.

- Állandó nyíróigénybevétel mellett a hajlítónyomatéki függvény lineáris.
- Lineárisan változó nyíróigénybevétel mellett a hajlítónyomatéki függvény másodfokú.

Ezeket a tapasztalatokat a következő táblázat foglalja össze:

Függvény	Függvény jellege		
$p(x)$	0	állandó	lineáris
$V(x)$	állandó	lineáris	másodfokú
$M_h(x)$	lineáris	másodfokú	harmadfokú

Az itt szereplő összefüggések általában is igazak, a következő tétel szerint.

**5.1. tétel.** *Balról jobbra felvett  $x$  koordináta mellett, és a felfelé mutató irányú megoszló erőt pozitív intenzitásának véve*

$$V'(x) \equiv \frac{dV(x)}{dx} = p(x), \quad (5.12)$$

$$M_h'(x) \equiv \frac{dM_h(x)}{dx} = -V(x) \quad (5.13)$$

*a rúd olyan szakaszain, ahol nem hat koncentrált terhelés. Tehát a nyíróigénybevételi függvény koordináta szerinti deriváltja megegyezik a megoszló erő intenzitását megadó függvénnyel, a hajlítónyomatéki függvény koordináta szerinti deriváltja pedig a nyíróigénybevételi függvény (-1)-szeresével.*

#### Bizonyítás:

A fenti egyenletek levezetéséhez a rúd egy kis elemi  $dx$  hosszúságú darabjának egyensúlyát vizsgáljuk, az 5.20. ábrával illusztrált módon. Feltételezzük, hogy a  $dx$  hossz elég rövid ahhoz, hogy a megoszló terhelés intenzitását itt állandónak vehessük. Emellett számításainkban elhanyagoljuk a normáligénybevétel hatását.<sup>5</sup>

Feltesszük, hogy a rúdból kivágott kis darab bal oldali,  $x$  koordinátájú keresztmetszetében  $V$  nyíróigénybevétel és  $M_h$  hajlítóigénybevétel ébred. Mivel az igénybevételek még e rövid szakasz mentén is megváltozhatnak egy kicsit, az  $x + dx$  keresztmetszetben  $V + dV$  nyíróerőt és  $M_h + dM_h$  hajlítónyomatékot veszünk fel.

Az erők egyensúlyából következik, hogy

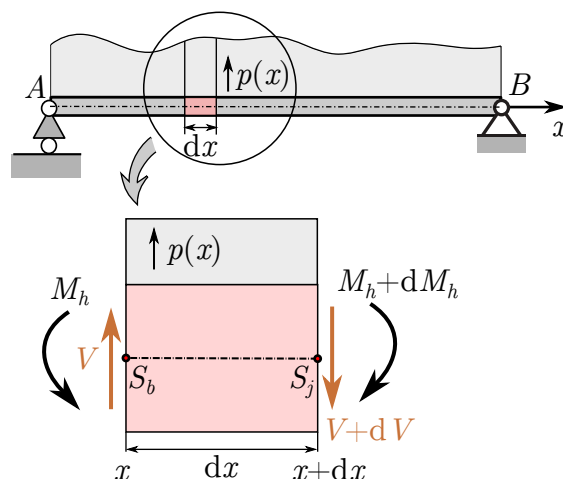
$$p(x)dx + V - V - dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dV(x)}{dx} = p(x). \quad (5.14)$$

Felírva a nyomatéki egyensúlyi egyenletet a jobb oldali keresztmetszet  $S_j$  súlypontjára, az alábbi kifejezést kapjuk:

$$M_h - M_h - dM_h - Vdx - p(x) \frac{(dx)^2}{2} = 0. \quad (5.15)$$

<sup>5</sup>A valóságos rudak eldeformálódnak a terhelések hatására, ezért a kivágott darab két végkeresztmetszetében a statikai összefüggésekkel meghatározott normáligénybevételek vektorai nem feltétlenül maradnak azonos hatásvonalúak, így ezek befolyásolhatják a nyomatéki egyensúlyt. Ez a hatás hosszú, nyomott rudak esetében különösen jelentős, mert a rúd ún. kihajlásához (lásd 1.49. ábra) vezethet. A kihajlás témakörével a szilárdságtan foglalkozik; mi a továbbiakban feltételezzük, hogy a normáligénybevétel hatása nem számottevő a nyomatéki egyensúly szempontjából.





5.20. ábra. Egy elemi  $dx$  hosszúságú rúdszakasz igénybevételei

Mivel  $dx$  feltételezéseink szerint kicsi, annak négyzete még sokkal kisebb – ezt úgy szokták kifejezni, hogy „másodrendben” kicsi. Ezért a  $p(x)$ -et tartalmazó tagot elhanyagolhatjuk, amiből következik, hogy

$$\frac{dM_h(x)}{dx} = -V. \quad (5.16)$$

A nyomatéki egyensúlyt vizsgálhatnánk a kis kivágott szakasz bal oldali keresztmetszetének  $S_b$  súlypontjára felírt egyenlettel is. Ebben az esetben megjelenne az egyenletben egy  $dVdx$  alakú tag is, de mivel ebben is két kicsi mennyiség szorzata szerepel, az is másodrendben kicsi, azaz elhanyagolható.

Az itt közölt képletek síkgörbe rudak esetére is általánosíthatók (lásd 5.33. megjegyzés). Érdeemes megjegyezni, hogy ha *jobbról balra* vennék fel az  $x$  tengelyt a rúdon, akkor az 5.20. ábrán a kis szakasz bal oldalán szerepelne  $x+dx$ ,  $V+dV$  és  $M_h+dM_h$ . Mivel az igénybevételek előjeleit nem a koordináta-tengely irányítása határozza meg, a berajzolt nyilak ekkor is pozitív igénybevételeknek felelnek meg, azonban az (5.16) egyenlet úgy módosul, hogy a jobb oldalán pozitív előjellel szerepel a nyíróigénybevételi függvény. ♠

Ezek az eredmények jól felhasználhatók az igénybevételi ábrák felrajzolása során. Mivel egy adott pontbeli differenciálhányados a függvény érintőjének meredekségét adja meg, nagyobb  $p(x)$  intenzitású megoszló terhelésnél meredekebb lesz a  $V(x)$  függvény grafikonja. Ehhez hasonlóan, a *nyíróigénybevétel adott pontbeli értéke a hajlítónyomatéki függvény érintőjének meredekségét adja meg, negatív előjellel.*

A példák kapcsán láttuk, hogy ha egy koncentrált erő hat a rúdra merőlegesen, akkor annak támadáspontjában szakadása van a nyíróigénybevételi függvénynek. A  $V(x)$  függvény ugrásszerű megváltozása pedig az  $M_h(x)$  hajlítónyomatéki függvény meredekségének megváltozását – azaz a függvény grafikonjának törését – okozza az (5.13) képlet szerint, ahogy az 5.2. példában is láthattuk. Ha a *nyíróigénybevétel előjele* is megváltozik az ugrásnál, akkor a hajlítónyomaték *változásának iránya* is megfordul. Például pozitív nyíróigénybevétel mellett  $M_h(x)$  csökken, negatív nyíróigénybevételnél pedig nő, ezért az ilyen váltásoknál a hajlítónyomatéknak minimuma van (ami az abszolút értékének lokális maximuma lehet), ahogy az 5.18. ábrán is látható.

Az 5.1. tételben megfogalmazott differenciális összefüggéseknek az ad különös jelentőséget, hogy a méretezés során mindig meg kell keresni, hogy az igénybevételi függvényeknek hol vannak a szélsőértékei, azaz a maximumai és minimumai. Ezek közül is az abszolút értékben vett maximális értékek számítanak. A nyíró- és hajlítói igénybevételek közül az utóbbinak van nagyobb szerepe rudak méretezése során, ezért *elsősorban a hajlítónyomaték szélsőértékeinek meghatározásával foglalkozunk.*

Matematikából ismert, hogy az egyváltozós függvények vagy az értelmezési tartományuk szélső pontjaiban veszik fel szélsőértéküket, vagy ott, ahol a deriváltjuk nulla. Ha több szakaszon kell megadni egy igénybevételi függvényt, mint az 5.2. példában, az azt jelenti, hogy minden egyes szakasz az ott érvényes függvény értelmezési tartománya, így a szakaszhatárokon is lehet szélsőérték.

A fenti gondolatmenetből következik, hogy *a hajlítónyomatéki függvény azokban a keresztmetszetekben veheti fel szélsőértékeit, ahol*

- a nyíróigénybevételi függvény értéke előjelet vált – akár folytonosan változva és felvéve a zérus értéket, akár szakadással –, vagy
- ahol koncentrált erőpár hat, a hajlítónyomatéki függvény szakadását okozva.

Az egyensúlyi egyenletekből következik, hogy a rúd végeinél csak akkor lehet zérustól különböző a hajlítónyomaték (tehát csak akkor lehet ott az abszolút értékének maximuma), ha ott koncentrált erőpár hat.

**5.1. következmény.** *Az 5.1. tétel szerint levezetett ún. differenciális kapcsolatokból következik, hogy integrál alakban is megfogalmazhatók a  $p(x)$ ,  $V(x)$  és  $M_h(x)$  függvények közötti összefüggések. Az (5.12) egyenlet szerint*

$$dV = p(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int dV = \int p(x)dx. \quad (5.17)$$

*Ha a határozatlan integrál helyett határozott integrált számolunk, akkor megjelenik egy  $V_0 \equiv V(x_0)$  integrálási konstans:*

$$V(x) = V_0 + \int_{x_0}^x p(x)dx. \quad (5.18)$$

*Ugyanezzel a gondolatmenettel a hajlítónyomatéki és nyíróerő függvények kapcsolata is megfogalmazható integrál alakban:*

$$M_h(x) = M_h(x_0) - \int_{x_0}^x V(x) dx. \quad (5.19)$$



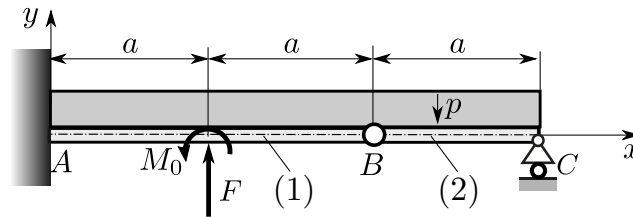
Az (5.18) egyenlet úgy értelmezhető, hogy ha egy adott  $x_0$  pontban  $V_0$  a nyíróigénybevételi függvény értéke, akkor egy  $x > x_0$  pontban felvett értékének meghatározásához már csak az  $x_0$  és  $x$  közötti szakaszon kell összegezni a megoszló erőrendszert, a 3.7.3. fejezetben leírtakhoz hasonlóan. Tehát *a nyíróigénybevételi függvény megváltozása a megoszló terhelés integráljával, azaz a  $p(x)$  függvény grafikonja alatti területtel arányos.*

Az (5.19) egyenlet szerint pedig *a hajlítónyomaték  $x_0$  és  $x$  közötti megváltozása a nyíróigénybevételi függvény alatti területtel arányos.* Pozitív nyíróigénybevétel mellett a hajlítónyomaték csökken, negatív nyíróigénybevétel mellett pedig nő.

Ha egy függvény negatív értéket vesz fel egy szakaszon, akkor ott a grafikonja „alatti” területet úgy értelmezzük, hogy az a grafikon és az  $x$  tengely közötti terület  $(-1)$ -szerese (ilyen előjeles területeket jelöl  $T_2$  és  $T_4$  az 5.23. ábrán).

**5.4. példa:** Az 5.21 ábrán vázolt síkbeli szerkezet két darab rúdból áll. Az (1) jelű rúd be van fogva az  $A$  keresztmetszetben, a (2) jelű rúd  $C$  végpontjánál görgős támasz található, továbbá egy síkcukló köti össze a két rudat a  $B$  keresztmetszetben. Határozzuk meg a tartó igénybevételi függvényeit és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!

Adatok:  $a = 1$  m,  $p = 800$  N/m,  $F = 1400$  N,  $M_0 = 200$  Nm.

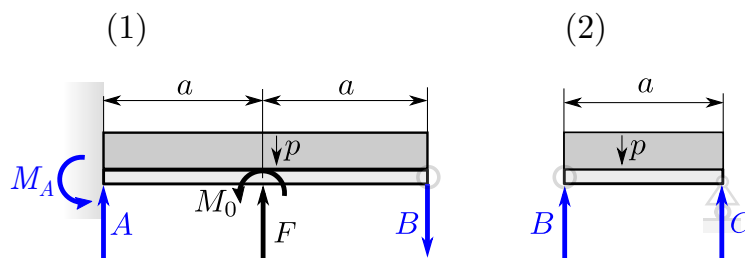


5.21. ábra. Gerber-tartó

#### Megoldás:

Az igénybevételek meghatározásának első lépéseként a kényszererő-rendszer komponenseit határozzuk meg. A szerkezet két darab rúdból áll, melyek kényszerek nélkül síkban 3-3 szabadsági fokkal rendelkeznek. Ebből a hat darab szabadsági fokból hármat leköt a befogás, egyet az alátámasztás, további kettőt pedig a két rudat összekötő síkcukló. Tehát a szerkezet statikailag határozott. Az (1) jelű befogott rúdból álló tartó a (2) rész nélkül is statikailag határozott lenne, a (2) rúd viszont nem lehetne egyensúlyban az (1) nélkül, tehát ez egy Gerber-tartó (lásd 4.3.3. fejezet).

A megoldáshoz szét kell bontani a tartót két részre, és ezeknek a részeknek az egyensúlyát külön-külön meg kell vizsgálni. A reakció-erőrendszer komponenseit az 5.22. ábrán vettük fel. Mivel  $x$  irányú (azaz rúdírányú) terhelések nem hatnak,  $x$  irányú reakciókomponensek sem jelennek meg.



5.22. ábra. A tartó szétbontása és a reakció-erőrendszer komponenseinek felvétele szabadtest-ábrákon

Az (1) rúdra az alábbi egyensúlyi egyenleteket írhatjuk fel:

$$\sum M_a = 0: M_A + Fa - p(2a)a + M_0 - B2a = 0, \quad (5.20)$$

$$\sum M_b = 0: M_A - Fa + p(2a)a + M_0 - A2a = 0. \quad (5.21)$$

A (2) rúdra felírt egyenletek:

$$\sum M_b = 0 : Ca - p \frac{a^2}{2} = 0, \quad (5.22)$$

$$\sum M_c = 0 : p \frac{a^2}{2} - Ba = 0. \quad (5.23)$$

Ez utóbbi egyenletekből azonnal látszik, hogy

$$B = C = \frac{pa}{2} = 400 \text{ N}. \quad (5.24)$$

Egyszerűbben is kiszámíthattuk volna ezt az eredményt, ha kihasználjuk, hogy a (2) tartórész szimmetriája miatt a  $B$  és  $C$  erők egyenlők, tehát

$$\sum F_y = 0 : C + B - pa \equiv 2B - pa = 0 \Rightarrow C = B = \frac{pa}{2}. \quad (5.25)$$

Gerber-tartók esetében általában is igaz, hogy célszerű azzal a tartószakasszal kezdeni az egyensúlyi egyenletek megoldását, amelyik a szerkezet tényleges szétszedése után nem lehetne egyensúlyban.

Az (1) tartószakasz egyensúlyi egyenleteinek megoldása:

$$A = B - F + 2ap = 600 \text{ N}, \quad M_A = B 2a - F a - M_0 + 2pa^2 = 800 \text{ Nm}. \quad (5.26)$$

Ellenőrzésre használhatjuk a

$$\sum F_y = 0 : A - B + F - p 2a = 600 - 400 + 1400 - 1600 = 0 \quad (5.27)$$

egyenletet, ami láthatóan teljesül.

A reakciók ismeretében következhet az igénybevételek meghatározása.  $x$  irányú erő vagy nyomaték nem terheli a szerkezetet, ezért  $N(x) \equiv 0$  és  $M_t(x) \equiv 0$ , tehát csak a nyíró- és hajlítói igénybevétellel kell foglalkoznunk. Az igénybevételi ábrákat a teljes tartóra vonatkozó szabadtest-ábra alá rajzoltuk, hogy jól látszódjon az egyes terhelések hatása (5.23. ábra). Akár külön ábrákat is rajzolhatnánk az (1) és (2) jelű rudakra, de most egyben ábráztuk a tartót az  $A$  és  $C$  keresztmetszetek között. Fontos, hogy ennek az egészben vett tartónak a szempontjából a  $B$  csuklóban ébredő erők már belső erőnek számítanak, tehát a  $B$  erőt már *nem szabad* ezen az ábrán feltüntetni. Mivel most a csuklóban nem hat külső koncentrált erő vagy erőpár, sem a nyíró-, sem a hajlítónyomatéki függvénynek nem lesz itt szakadása; bár mind  $V(x)$ , mind  $M_h(x)$  két-két darab folytonos függvényből tehető össze, azok értelmezési tartományainak határa nem a csuklónál lesz, hanem az  $x = a$  helyen.

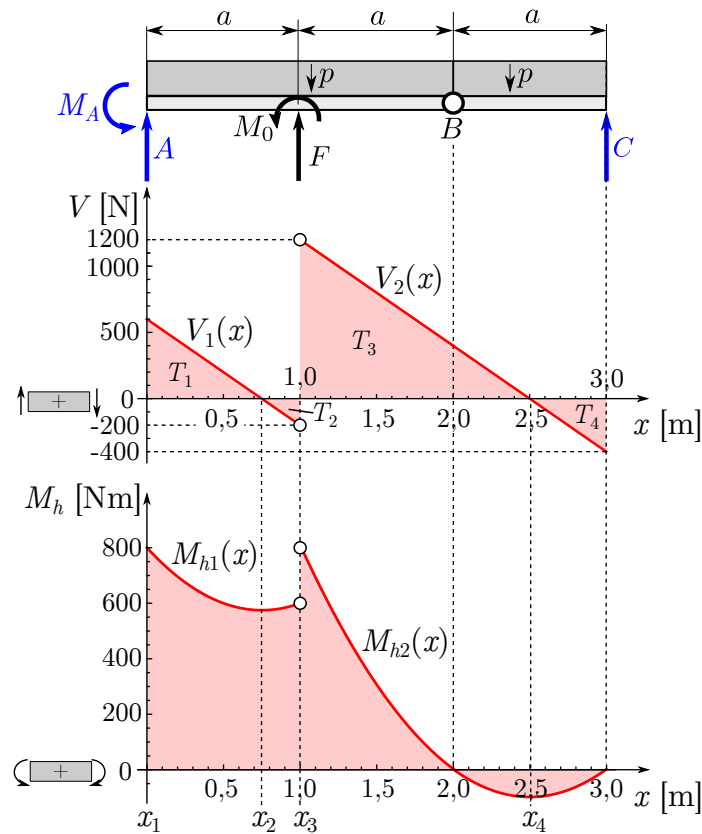
A nyíróigénybevételi függvény ( $x$  értékét  $m$ -ben mérve):

$$\begin{aligned} V_1(x) &\equiv A - px = 600 - 800x \text{ N}, & \text{ha } 0 \leq x < a \\ V_2(x) &\equiv A - px + F = 2000 - 800x \text{ N}, & \text{ha } a < x \leq 3a. \end{aligned} \quad (5.28)$$

A nyíróigénybevételi ábrán ellenőrizhető, hogy a csuklónál a  $B$ , a tartó két végpontjában pedig az  $A$  illetve  $C$  erők nagyságának megfelelő nyíróerő lép fel.

A hajlítónyomatéki függvény a két szakaszon

$$\begin{aligned} M_{h1}(x) &\equiv M_A - Ax + p \frac{x^2}{2} = 800 - 600x + 400x^2 \text{ Nm}, & \text{ha } 0 \leq x < a, \\ M_{h2}(x) &\equiv M_A - Ax + p \frac{x^2}{2} - F(x - a) + M_0 = 2400 - 2000x + 400x^2 \text{ Nm}, & \text{ha } a < x \leq 3a. \end{aligned} \quad (5.29)$$



5.23. ábra. A tartó igénybevételi ábrái

Az (5.28) és (5.29) egyenletek összehasonlításából látható, hogy a hajlítónyomatéki függvények valóban csak konstans tagban különböznek a nyíróigénybevételi függvények határozatlan integrálásával kapható függvényektől. Mivel a nyíróigénybevételi függvényben csak koncentrált és megoszló *erők* szerepelnek, a koncentrált erópárok nyomatékát külön kell figyelembe vennünk a hajlítónyomatéki függvényben. Tehát ha az (5.19) összefüggés szerint, integrálással akarjuk meghatározni a hajlítónyomatéki függvényeket, azt a következőképpen tehetjük meg:

$$M_{h1}(x) = M_A - \int_0^x V_1(x) dx = M_A - Ax + p \frac{x^2}{2}, \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} M_{h2}(x) &= M_0 + M_{h1}(a) - \int_a^x V_2(x) dx \\ &= M_0 + \underbrace{M_A - Aa + p \frac{a^2}{2}}_{\equiv M_{h1}(a)} - A(x-a) + p \frac{x^2}{2} - p \frac{a^2}{2} - F(x-a). \end{aligned} \quad (5.31)$$

$M_{h2}(x)$  fenti kifejezésében csak az  $x = a$  értéktől történik integrálás, ezért a koncentrált erópár  $M_0$  nyomatéka mellett figyelembe kell venni az  $x = 0$  keresztmetszettől balra támaszó erőrendszer hatását is, amit  $M_{h1}(a)$  jellemez. Egyszerűsítések után itt is visszkapjuk az (5.29) egyenlettel megadott kifejezést.

Az igénybevételi ábrák alapján négy olyan keresztmetszet azonosítható, ahol maximális lehet a hajlítónyomaték:

- $x_1 = 0$ . Itt koncentrált erópár hat,  $M_{h1}(x_1) = M_A = 800$  Nm.

- Az  $x_2$  keresztmetszetben előjelet vált a rúd  $0 \leq x < a$  szakaszán érvényes  $V_1(x) = A - px$  nyíróigénybevételi függvény. Tehát  $x_2 = A/p = 0,75$  m. Itt a hajlítónyomaték értéke

$$M_{h1}(x_2) = M_A - Ax_2 + p\frac{x_2^2}{2} = 575 \text{ Nm.} \quad (5.32)$$

Ezt az értéket az alapján is megkaphatjuk, hogy a nyíróigénybevételi függvény alatti terület az  $x = (0, x_2)$  tartományon  $T_1 = Ax_2/2 = 225$  Nm, tehát ennyivel csökken a hajlítónyomaték az  $x = 0$ -ban felvett 800 Nm-es értékhez képest.

- Az  $x_3 = 1$  m keresztmetszetben előjelet vált a nyíróigénybevétel ( $-200$  N-ról  $1200$  N-ra változik az értéke) ezért itt lehet lokális szélsőértéke a hajlítónyomatéknak. Mivel nemcsak koncentrált erő, hanem koncentrált erópár is hat ebben a keresztmetszetben, a hajlítónyomatéki függvénynek szakadása van. A bal- és jobboldali határértékek behelyettesítéssel adódnak:

$$M_{h1}(x_3^-) = 600 \text{ Nm,} \quad (5.33)$$

$$M_{h2}(x_3^+) = M_A - Ax_3 + p\frac{x_3^2}{2} - F(x_3 - a) + M_0 = 800 \text{ Nm.} \quad (5.34)$$

$M_{h1}(x_3^-)$  esetében úgy is számolhatunk, hogy az  $x_2$  és  $x_3$  közötti,  $0,25$  m-es szakaszon a nyíróigénybevételi függvény grafikonja és az  $x$  tengely közötti előjeles terület  $T_2 = (1/2)(-200 \text{ N})(0,25 \text{ m}) = -25$  Nm. Tehát ezen a szakaszon  $25$  Nm-t nő a hajlítónyomaték értéke.

- Az  $x_4$  pontban ismét előjelet vált a nyíróigénybevételi függvény. A (2) tartórész szimmetriája miatt  $x_4 = 2,5$  m, ami a  $V_2(x_4) = A - px_4 + F = 0$  egyenlet megoldásaként is adódik. Ebben a keresztmetszetben

$$M_{h2}(x_4) = M_A - Ax_4 + p\frac{x_4^2}{2} - F(x_4 - a) + M_0 = -100 \text{ Nm.} \quad (5.35)$$

Ez az érték a nyíróigénybevételi függvény  $x_3$  és  $x_4$  közötti grafikonja alatti  $T_3$  terület  $900$  Nm-es értékéből is számítható: a hajlítónyomaték ennyit csökken az  $x_3$  keresztmetszet jobb oldalán felvett értékéről.

Ellenőrzésképpen vegyük figyelembe, hogy a nyíróigénybevételi függvény  $x_4$  utáni szakaszán a grafikon és az  $x$  tengely közötti előjeles terület  $T_4 = (0,5 \text{ m})(-400 \text{ N})/2 = -100$  Nm. Tehát  $x_4$ -től a rúd végéig  $100$  Nm-rel nő a hajlítónyomaték, így a  $C$  keresztmetszetben zérus értéket vesz fel, az egyensúlyi egyenleteknek megfelelően.

A fenti számítás szerint a maximális nagyságú hajlítónyomaték  $M_{h,\max} = 800$  Nm. Mind az  $x_1$ , mind az  $x_3$  keresztmetszetben ezt a hajlítónyomaték értéket kaptuk. ♠

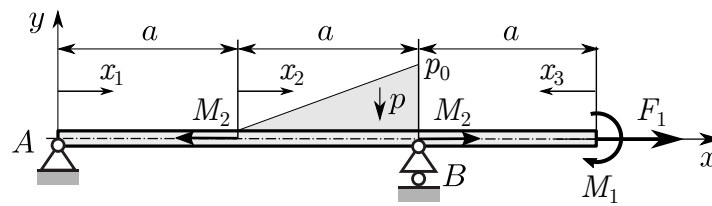
**5.5. példa:** Határozzuk meg az 5.24. ábrán látható rúdszerkezet igénybevételi függvényeit és rajzoljuk meg az igénybevételi ábráit!

Adatok:  $a = 1,5$  m,  $p_0 = 2$  kN/m,  $F_1 = 1$  kNm,  $M_1 = 3$  kNm,  $M_2 = 2$  kNm.

**Megoldás:**

A lineárisan növekedő  $p(x)$  megoszló terhelés intenzitása

$$p(x) = -\frac{p_0}{a}(x - a) \quad (5.36)$$



5.24. ábra. A vizsgált rúdszerkezet

alakban adható meg. A megoszló erő eredőjének nagysága

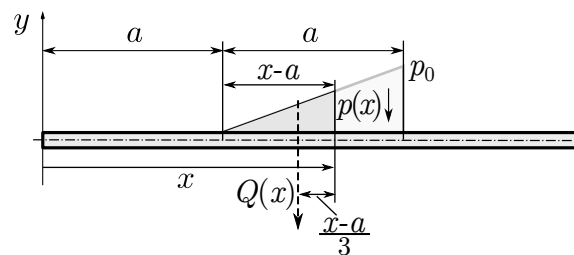
$$Q = \frac{p_0 a}{2} = 1500 \text{ N}, \quad (5.37)$$

az eredő hatásvonala a  $p(x)$  függvény grafikonja alatti terület súlypontján halad át, az

$$x_Q = \frac{5}{3}a \quad (5.38)$$

koordinátájú pontban.

A további számításokhoz vizsgáljuk meg, hogy mekkora és milyen hatásvonalú eredővel lehetne helyettesíteni a megoszló erőt, ha csak egy adott  $x$  koordinátájú keresztmetszetig vennénk figyelembe, mint az 5.25. ábrán.

5.25. ábra. A lineárisan változó intenzitású megoszló erő helyettesítése a  $Q(x)$  koncentrált erővel egy kiválasztott szakaszon

A megoszló terhelés figyelembe vett részét az ábrán sötétebb színnel jelöltük. Itt a grafikon alatti terület

$$Q(x) = \frac{1}{2}p(x)(x-a) = -\frac{p_0}{2a}(x-a)^2, \quad (5.39)$$

tehát egy ilyen nagyságú, az  $x$  koordinátától  $(x-a)/3$  távolságban húzódó hatásvonalú erővel lenne helyettesíthető a megoszló terhelés bejelölt része. Ellenőrizhető, hogy  $x = 2a$  mellett (tehát amikor a teljes megoszló terhelést figyelembe vesszük)  $Q(a) = p_0 a/2 = 1500 \text{ N}$ , ahogy korábban láttuk.

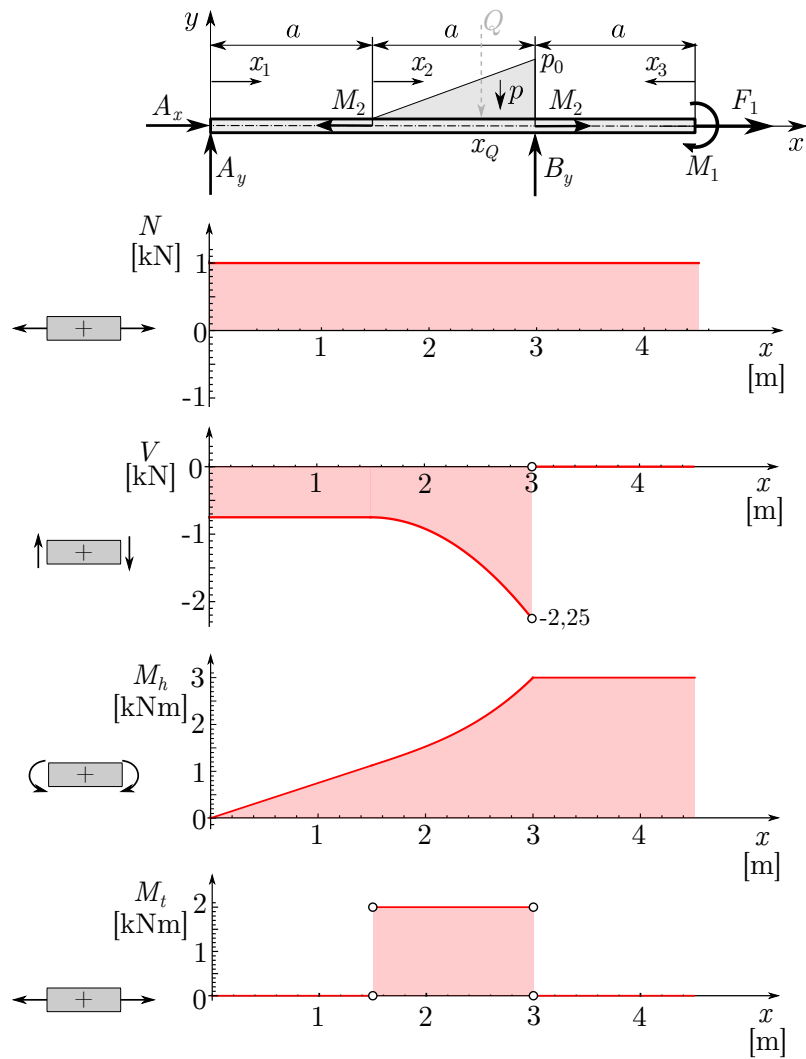
A kényszererőket az 5.26. ábra szerint felvéve, az alábbi egyensúlyi egyenleteket írhatjuk fel:

$$\sum F_x = 0 : \quad A_x + F_1 = 0, \quad (5.40)$$

$$\sum M_a = 0 : \quad Q \cdot x_Q - B_y \cdot 2a + M_1 = 0, \quad (5.41)$$

$$\sum M_b = 0 : \quad A_y \cdot 2a - Q \cdot (2a - x_Q) + M_1 = 0. \quad (5.42)$$

Az egyenletrendszer megoldása



5.26. ábra. Szabadtest-ábra és igénybevételi ábrák

$$A_x = -F_1 = -1000 \text{ N}, \quad A_y = -750 \text{ N}, \quad B_y = 2250 \text{ N}. \quad (5.43)$$

Ellenőrizhető, hogy  $A_y + B_y - Q = 0$ .

- A normáligénybevételi függvény:

$$N(x) = -A_x = 1 \text{ kN}. \quad (5.44)$$

- A nyíróigénybevételi függvény:

$$V(x) = A_y = -750 \text{ N}, \quad (0 \leq x \leq a) \quad (5.45)$$

$$V(x) = A_y - \frac{p_0(x-a)^2}{2a}, \quad (a \leq x < 2a) \quad (5.46)$$

$$V(x) = A_y - Q + B_y = 0, \quad (2a < x \leq 3a). \quad (5.47)$$

A középső szakaszon érvényes függvény az alapján határozható meg, hogy az  $a \leq x < 2a$  szakaszon a megoszló terhelés grafikonja alatti terület az (5.39) egyenlet szerint



adható meg. Ennek megfelelően csökken a nyíróigénybevétel értéke az első szakaszon felvett  $A_y = -750$  N-hoz képest.

- A hajlítónyomatéki függvény:

$$M_h(x) = -A_y x, \quad (0 \leq x \leq a) \quad (5.48)$$

$$M_h(x) = -A_y x + \frac{p_0(x-a)^3}{6a}, \quad (a \leq x \leq 2a) \quad (5.49)$$

$$M_h(x) = -A_y x + Q(x-x_Q) - B_y(x-2a), \quad (2a \leq x \leq 3a). \quad (5.50)$$

A második szakaszon az  $x$  koordinátáig figyelembe vett megoszló terhelés nyomatóka az  $x$  koordinátájú keresztmetszet súlypontjára

$$|Q(x)| \frac{x-a}{3} = \frac{p_0}{2a}(x-a)^2 \cdot \frac{x-a}{3} = \frac{p_0(x-a)^3}{6a}, \quad (5.51)$$

ahol az abszolút érték jel azt fejezi ki, hogy  $Q(x)$  pozitív hajlítónyomatékot okoz.

A harmadik szakaszon ki lehet használni, hogy  $-A_y + Q - B_y = 0$ , ezért az (5.41) egyenlet figyelembevételével

$$M_h(x) = -A_y x + Q(x-x_Q) - B_y(x-2a) = -Qx_Q + 2aB_y = M_1, \quad (2a \leq x \leq 3a). \quad (5.52)$$

- A csavarónyomatéki függvény:

$$M_t(x) = 0, \quad (0 \leq x < a) \quad (5.53)$$

$$M_t(x) = M_2, \quad (a \leq x \leq 2a) \quad (5.54)$$

$$M_t(x) = 0, \quad (2a < x \leq 3a). \quad (5.55)$$

A feladatban meg volt adva, hogy az  $x = a$  és  $x = 2a$  keresztmetszetekben  $M_2$  nyomatékú erőpárok hatnak a rúdra. Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy a  $B$  síkcukló megakadályozza a cukló tengelyének elfordulását is, ezért az ott ébredő  $M_2$  nyomaték a kényszererő-rendszer része, hiszen így teljesülhet az  $x$  irányú nyomatéki egyensúly.

Az igénybevételi függvények segítségével megrajzoltuk az igénybevételi ábrákat (5.26. ábra). Látható, hogy ha több szakaszra bontjuk a rudat, akkor az összes, már elhagyott részre ható terhelést és kényszererőt figyelembe kell venni az igénybevételi függvényekben. Ilyen esetekben célszerű lehet a globális  $x$  koordináta helyett minden szakaszon különböző, ún. lokális koordinátákat felvenni. Ennek megfelelően az 5.24. ábrán balról felvettük az  $x_1$  és  $x_2$  koordinátákat, továbbá jobbról az  $x_3$  koordinátát.

Az első szakaszon  $x_1$  megegyezik az  $x$  koordinátával, tehát  $0 \leq x_1 \leq a$  esetében ugyanazokat a kifejezéseket kapjuk, mint fent.

A második szakaszon viszont már egyszerűsítheti a dolgunkat, hogy az  $x_2$  koordinátát  $x = a$ -tól mérjük, azaz  $x_2 = x - a$ . Ezzel ugyanis

$$V(x_2) = A_y - \frac{p_0(x_2)^2}{2a}, \quad (0 \leq x_2 < a), \quad (5.56)$$

$$M_h(x_2) = -A_y(a+x_2) + \frac{p_0(x_2)^3}{6a}, \quad (0 \leq x_2 \leq a). \quad (5.57)$$

Itt az értelmezési tartomány kijelölésénél is figyelembe kell venni, hogy az  $x_2$  koordináta 0 és  $a$  között vehet fel értékeket, és maguk az igénybevételi függvények sem  $x$ , hanem  $x_2$  függvényei.

A legnagyobb mértékű egyszerűsítésre a harmadik szakaszon van lehetőség. Itt ugyanis jobbról balra vettük fel az  $x_3$  koordinátát. Ez annak felel meg, hogy itt jobbról balra haladunk a rúdon, ezért csak az  $x_3$  koordinátájú keresztmetszettől *jobbra lévő* erőket, nyomatékokat kell figyelembe vennünk.

Mivel ezen a szakaszon nem hat  $y$  irányú erő, a nyíróigénybevételi függvény itt azonosan nulla:  $V(x_3) \equiv 0$ ,  $(0 \leq x_3 \leq a)$ .

A rúd jobb oldali végétől balra haladva az  $0 \leq x_3 \leq a$  szakaszon csak egyetlen terhelés járul hozzá a hajlítói igénybevételhez: az  $M_1$  nyomaték. Mivel ez lefelé hajlítja a rúd végét, előjele pozitív, így  $M_h(x_3) \equiv M_1$ ,  $(0 \leq x_3 \leq a)$ .

Más feladatokban is érdemes lehet a rúd egyik részén balról, a másik részén jobbról felírni az igénybevételi függvényeket, mert a rúd végeinél lévő szakaszokon így kevesebb erőt és nyomatékot kell figyelembe venni. Ez a megközelítési mód lehetőséget ad a feladat szimmetriáinak a kihasználására is: például az 5.2. feladatban a rúd jobb oldali végétől felvett koordinátával ugyanolyan alakú hajlítónyomatéki függvényt kapnánk a jobb oldali szakaszon, mint amelyet a bal oldali szakaszra felírtunk a balról felvett  $x$  koordináta segítségével. ♠

A gyakorlati problémák nagy részében állandó intenzitású megoszló terheléssel találkozunk. Ekkor a nyíróigénybevételi függvény lineáris, a hajlítói igénybevételi függvény pedig másodfokú függvénnyel – parabolával – írható le. Ha lineárisan változó megoszló terhelés hat a rúdra, mint az 5.5. példában, akkor viszont a nyíróigénybevételi függvény grafikonja lesz másodfokú parabola. A parabola kézzel történő megrajzolását segítheti az alábbi tétel.

**5.2. tétel.** 1) Ha egy  $[x_1, x_2]$  intervallumon értelmezett  $f(x)$  másodfokú függvény grafikonjához érintőket húzunk az intervallum  $A = (x_1, f(x_1))$  és  $B = (x_2, f(x_2))$  végpontjaiban, akkor az így kapott egyenesek az intervallum

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (5.58)$$

koordinátájú felező merőlegesére eső  $C$  pontban metszik egymást (lásd 5.27. ábra).

2) Az intervallum felező merőlegese a  $D = (x_k, f(x_k))$  pontban metszi a függvény grafikonját és az  $E$  pontban az  $AB$  szelő egyenesét. A  $D$  pont éppen a  $C$  és  $E$  pontok közötti szakasz felezőpontjában helyezkedik el, azaz  $\overline{DC} = \overline{DE}$ .

3) A függvény grafikonjának  $D$  pontbeli érintőjének meredeksége megegyezik az  $AB$  szelő meredekségével.

#### Bizonyítás:

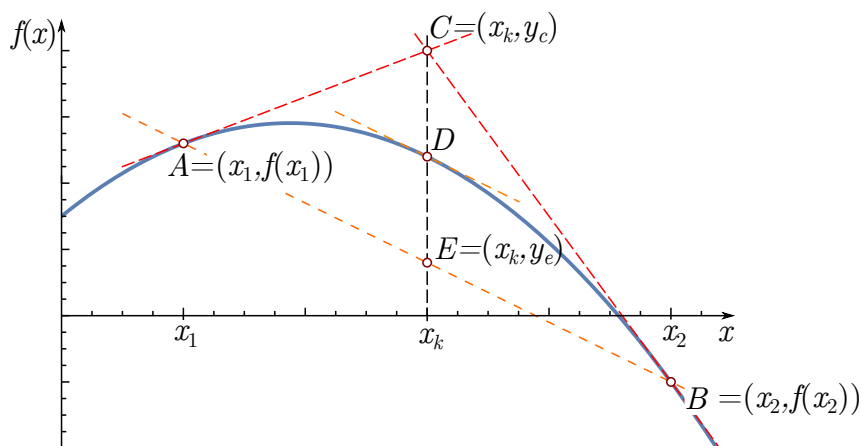
1) A grafikon  $A = (x_1, f(x_1))$  pontjához és  $B = (x_2, f(x_2))$  pontjához húzott érintők abban az  $x_k$  koordinátájú  $C$  pontban metszik egymást, ahol

$$f(x_1) + f'(x_1)(x_k - x_1) = f(x_2) + f'(x_2)(x_k - x_2). \quad (5.59)$$

Itt  $f'(x_i)$  az  $f$  függvény  $x$  szerinti differenciálhányadosát – azaz az ott értelmezett meredekséget – jelöli az  $x_i$  koordinátánál ( $i = 1, 2$ ).

A másodfokú függvény (parabola) alakjának ismeretében kiszámítható a derivált függvény alakja is:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2ax + b. \quad (5.60)$$



5.27. ábra. A parabola tulajdonságai. A vázolt eset  $a < 0$ -nak felel meg

Ezt felhasználva megoldható az (5.59) egyenlet, mert mind az  $a$ , mind a  $b$  és a  $c$  paraméter kiesik, és azt kapjuk, hogy

$$x_k = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (5.61)$$

Ezt behelyettesítve  $x$  helyére az (5.59) egyenletbe, megkapjuk a  $C$  pont helyét:

$$y_c = f(x_1) + f'(x_1)(x_k - x_1) = ax_1x_2 + b\frac{x_1 + x_2}{2} + c. \quad (5.62)$$

3) Az  $x = x_k$  koordinátájú helyen – azaz a  $D = (x_k, f(x_k))$  pontban – az érintő meredeksége

$$f'(x_k) = 2a\frac{x_1 + x_2}{2} + b = a(x_1 + x_2) + b. \quad (5.63)$$

Az  $AB$  szelő meredeksége ezzel megegyezik:

$$m \equiv \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2) + b. \quad (5.64)$$

2) A függvény  $x_k$ -ban felvett értéke határozza meg a  $D$  pont helyét:

$$f(x_k) = a\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + b\frac{x_1 + x_2}{2} + c, \quad (5.65)$$

az  $E$  pont helyét pedig a szelő  $m$  meredeksége alapján határozhatjuk meg:

$$y_e = f(x_1) + m(x_k - x_1) = a\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + b\frac{x_1 + x_2}{2} + c. \quad (5.66)$$

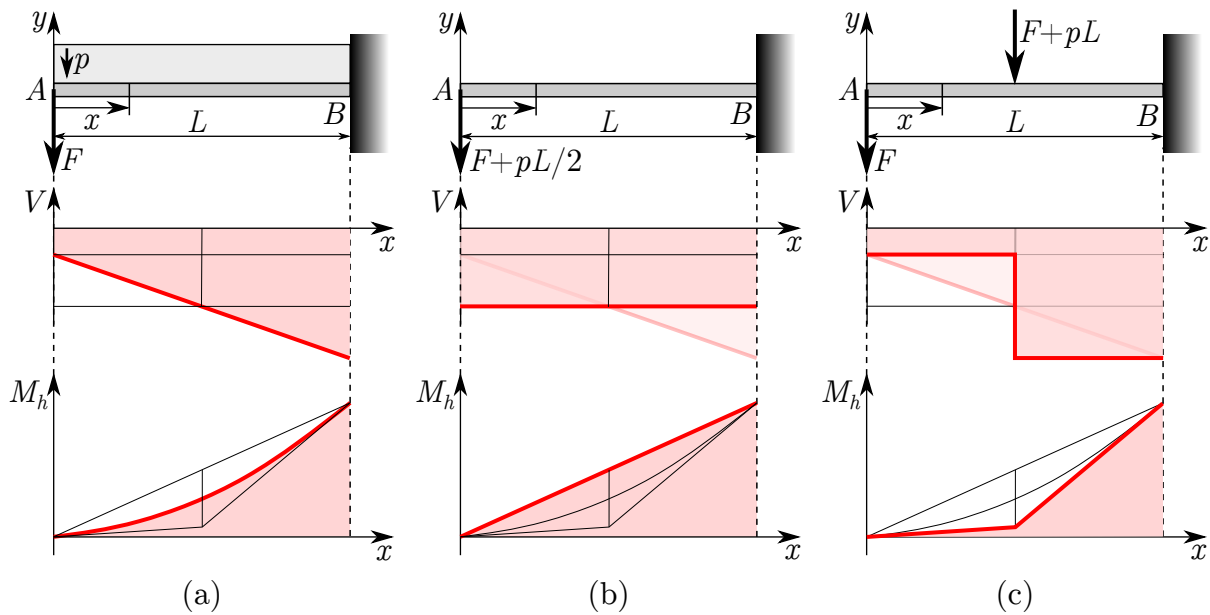
A fenti eredményeket felhasználva a  $C$  és  $D$  pontok távolsága

$$|y_c - f(x_k)| = \left| ax_1x_2 - a\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right| = \left| -\frac{a}{4}(x_1 - x_2)^2 \right|, \quad (5.67)$$

ami megegyezik a  $D$  és  $E$  pontok

$$|f(x_k) - y_e| = \left| a\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - a\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \right| = \left| -\frac{a}{4}(x_1 - x_2)^2 \right| \quad (5.68)$$

távolságával. Ezzel mindhárom állítást bizonyítottuk. ♠



**5.28. ábra.** Másodfokú hajlítónyomatéki függvényhez (a), annak szelőjéhez (b) és az érintőjéhez (c) tartozó nyíróigénybevételi függvények

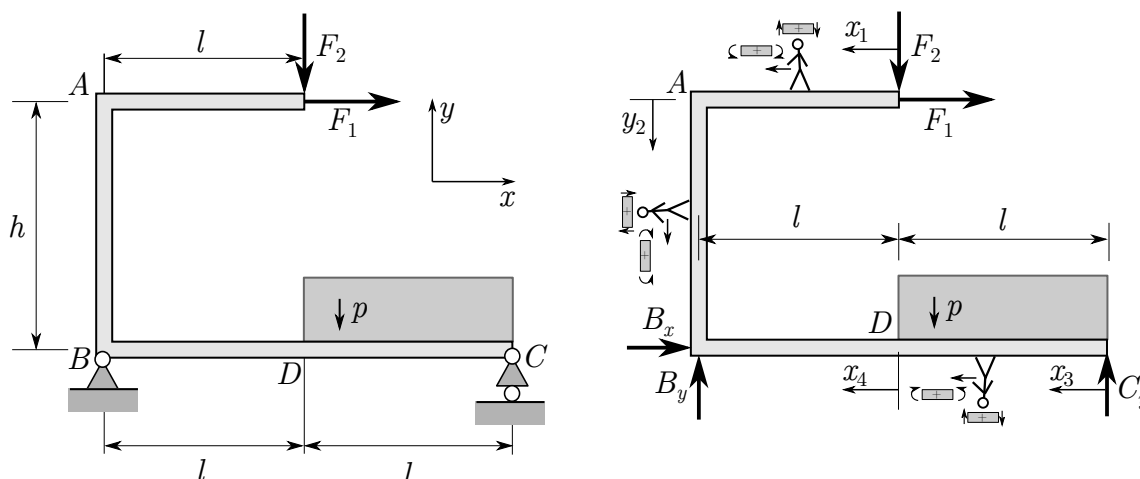
A tétel állítását az 5.28. ábra szemlélteti állandó megoszló terhelés esetére. Mind a hajlítónyomatéki függvény grafikonjának szelője, mind az érintői ugyanabból a pontból indulnak és ugyanoda érkezik mint maga az  $M_h$  függvény, tehát a hajlítónyomaték  $L$  hosszon bekövetkező változása e három esetben megegyezik. Ebből következően a megfelelő nyíróigénybevételi függvények alatti területek is meg kell hogy egyezzenek. A szelőnek egy állandó értékű nyíróerő felel meg, amit az eredeti,  $V(x) = -F - px$  függvény  $L$  hosszon történő átlagolásával kapunk. Az érintőkhöz tartozó nyíróigénybevételi függvény pedig két állandó értékű szakaszból áll, melyek az eredeti függvény kezdeti illetve végpontban felvett értékeit veszik fel. A nyíróigénybevételi függvény grafikonján látszik, hogy a szelő esetében (5.28/b ábra) az  $x = L/2$  keresztmetszettől jobbra lévő szakaszból a bal oldali szakaszra helyeztünk át egy háromszög alakú darabot. Az érintőkhöz tartozó ábrán (5.28/c ábra) viszont éppen fordítva, a bal oldali szakaszból tettünk át jobb oldalra egy ugyanakkora háromszög alakú részt. Tehát amennyivel kisebb az egyik esetben a nyíróigénybevételi függvény alatti terület  $x = L/2$ -ig, éppen annyival nagyobb a másik esetben. Mivel a hajlítónyomaték megváltozása a területtel arányos,  $x = L/2$ -ben az eredeti  $M_h(x)$  függvény éppen a szelő és az érintők metszéspontja közötti felezőpontban halad át.

## 5.6. Törtvonalú és síkgörbe rudak igénybevételei

Az eddigiekben tárgyalt módszerekkel törtvonalú vagy síkgörbe rudak igénybevételeit is meg lehet határozni.

**5.6. példa:** Határozzuk meg a reakciókat és az igénybevételi függvényeket az 5.29. ábra szerinti törtvonalú tartó esetében!

Adatok:  $l = 2$  m,  $h = 3$  m,  $F_1 = 400$  N,  $F_2 = 600$  N,  $p = 2000$  N/m.



5.29. ábra. Törtvonalú rúd szerkezeti ábrája és szabadtest-ábrája

**Megoldás:**

A szerkezet szabadtest-ábráján felvettük a kényszererőket. A megoszló terhelés egy  $Q = pl = 4$  kN nagyságú koncentrált erővel helyettesíthető. Az egyensúlyi egyenletek:

$$\sum F_x = 0 : \quad B_x + F_1 = 0, \quad (5.69)$$

$$\sum M_b = 0 : \quad -F_1 h - F_2 l - \frac{3}{2} pl^2 + C_y 2l = 0, \quad (5.70)$$

$$\sum M_c = 0 : \quad \frac{p}{2} l^2 - B_y 2l - F_1 h + F_2 l = 0. \quad (5.71)$$

Az egyenletrendszer megoldása,  $h = 3l/2$  figyelembevételével:

$$B_x = -F_1 = -400 \text{ N}, \quad B_y = -\frac{3F_1}{4} + \frac{F_2}{2} + \frac{pl}{4} = 1 \text{ kN}, \quad C_y = \frac{3F_1}{4} + \frac{F_2}{2} + \frac{3pl}{4} = 3,6 \text{ kN}. \quad (5.72)$$

Az igénybevételi függvényeket a rúdszerkezet négy szakaszán felvett lokális koordinátákkal adjuk meg. Csavarónyomaték egyik szakaszon sem veszi igénybe a rudat.

Célszerű úgy tekinteni, hogy a rúd végigjárása során mindig a rúd azonos oldalán maradjunk – ennek megfelelően rajzoltuk be a szabadtest-ábrába, hogy az adott szakaszon merre halad egy stilizált emberalak, és mellé odarajzoltuk a nyíró- és hajlítónyomatéki igénybevétel előjelkonvencióit is, melyeket az odaképzelt ember mindig „magával visz”.

- A felső rövid szakaszon a jobbról balra felvett,  $0 \leq x_1 \leq l$  tartományon értelmezett  $x_1$  koordinátát használjuk. Ezzel az igénybevételi függvények,  $x_1$ -et m-ben mérve:

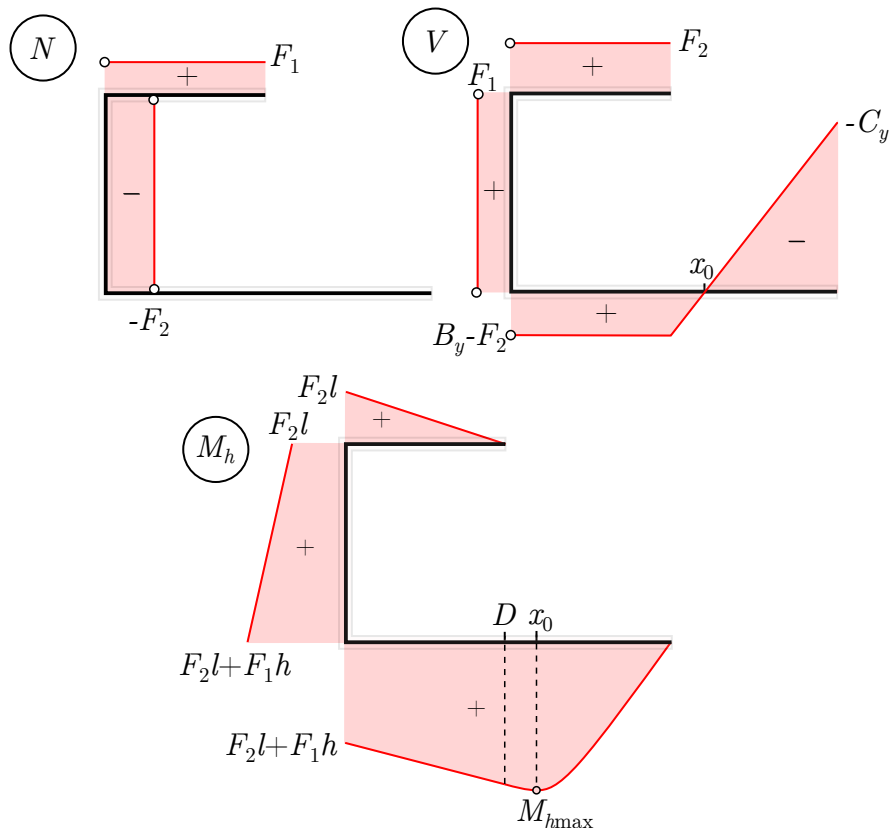
$$N_1(x_1) = F_1 = 400 \text{ N}, \quad (5.73)$$

$$V_1(x_1) = F_2 = 600 \text{ N}, \quad (5.74)$$

$$M_{h1}(x_1) = F_2 x_1 = 600 x_1 \text{ Nm}. \quad (5.75)$$

Az igénybevételi ábrákat jelleghelyesen felrajzoltuk az 5.30. ábrán. Ebben az esetben a törtvonalú tartó súlypontvonalára rajzoltuk fel az egyes függvények grafikonjait, de megrajzolhatók az igénybevételi ábrák úgy is, hogy a rudat képzeletben kiegyenesítjük.

- Az  $A$  saroktól az  $y_2$  koordinátát használjuk, mely  $0 \leq y_2 \leq h$  közötti értékeket vehet fel. A koordináták indexe azt a sorrendet mutatja, ahogyan figyelembe vesszük az



5.30. ábra. Törtvonalú rúd jelleghelyes igénybevételi ábrái

egymás utáni szakaszokat. A súlypontvonal  $90^\circ$ -os elfordulása miatt az első szakaszon normáligénybevételként jelentkező  $F_1$  erő ezen a tartományon nyíróerő lesz,  $F_2$  pedig normáligénybevétel (nyomás). A merev sarok átviszi a nyomatékot, ezért  $M_{h1}(l) = M_{h2}(0) = F_2 l = 1200$  Nm. Az ezen a szakaszon érvényes igénybevételi függvények ( $y_2$ -t m-ben mérve):

$$N_2(y_2) = -F_2 = -600 \text{ N}, \quad (5.76)$$

$$V_2(y_2) = F_1 = 400 \text{ N}, \quad (5.77)$$

$$M_{h2}(y_2) = F_2 l + F_1 y_2 = 1200 + 400 y_2 \text{ Nm}. \quad (5.78)$$

Az  $y_2 = h$  koordinátánál – azaz a  $B$  saroknál –  $M_{h2}(h) = F_2 l + F_1 h = 2400$  Nm.

- Ha az  $x_1$  és  $y_2$  által kijelölt irányban haladnánk tovább a rúd mentén, akkor a  $B$  csuklóról átadódó kényszererők is megjelennének az igénybevételi függvényekben. Ehelyett a rúd másik vége felől felvett, m-ben mért  $x_3$  koordinátát használjuk, ahol  $0 \leq x_3 \leq l$ :

$$N_3(x_3) = 0, \quad (5.79)$$

$$V_3(x_3) = -C_y + p x_3 = -3600 + 2000 x_3 \text{ N}, \quad (5.80)$$

$$M_{h3}(x_3) = C_y x_3 - \frac{p x_3^2}{2} = 3600 x_3 - 1000 x_3^2 \text{ Nm}. \quad (5.81)$$

A nyíróigénybevételi függvény előjelet vált, ha  $-C_y + p x_0 = 0$ . Ebből  $x_0 = C_y/p = 1,8$  m, tehát a  $C$  keresztmetszettől mért  $x_3 = x_0$  koordinátánál a hajlítónyomatéki függvénynek szélsőértéke van: itt  $M_{h\max} = M_{h3}(x_0) = 3240$  Nm.

- A  $D$  keresztmetszetenél kezdődő utolsó szakaszon az  $x_4$  jelű koordinátát használjuk, ahol  $0 \leq x_4 \leq l$ :

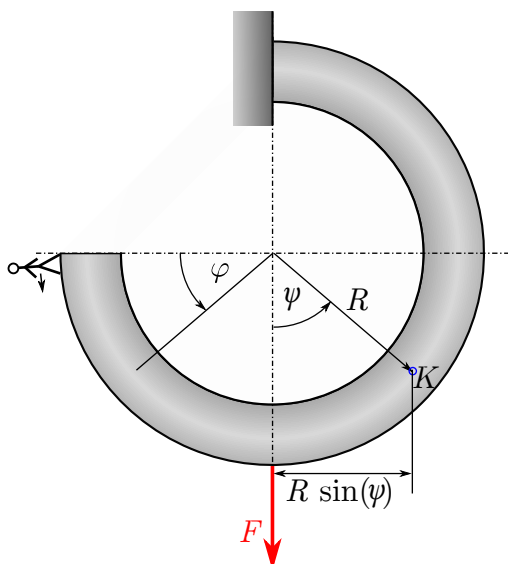
$$N_4(x_4) = 0, \quad (5.82)$$

$$V_4(x_4) = -C_y + pl = 400 \text{ N}, \quad (5.83)$$

$$M_{h4}(x_4) = C_y(l + x_4) - pl(x_4 + \frac{l}{2}) = 3200 - 400x_4 \text{ Nm}. \quad (5.84)$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a  $B$  csuklónál az  $M_{h2}$  és  $M_{h4}$  függvények ugyanazt az értéket adják:  $M_{h2}(h) = M_{h4}(l) = 2400 \text{ Nm}$ . ♠

**5.7. példa:** Az 5.31. ábrán látható  $R$  görbületi sugarú, kör keresztmetszetű,  $d$  átmérőjű rúd (kampó) egyik keresztmetszete be van fogva. A szerkezet terhelése  $F$  koncentrált erő. Írjuk fel az igénybevételi függvényeket és rajzoljuk meg az igénybevételi ábrákat!



5.31. ábra.  $F$  erővel terhelt görbe rúd

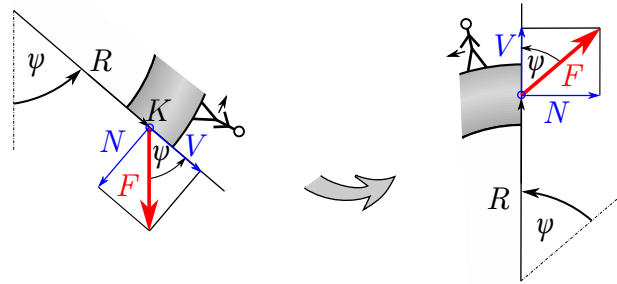
### Megoldás:

Vizsgáljuk az igénybevételeket a rúd szabad vége felől kiindulva, ahogy az 5.31. ábrán jelöltük! A  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  szakaszon semmilyen terhelés nem éri a rudat, ezért itt minden igénybevétel nulla.

Az  $F$  erő támadáspontjának keresztmetszetétől egy új lokális  $\psi$  koordinátát használunk az igénybevételi függvények megadásához. Vizsgáljuk meg, hogy a bejelölt,  $\psi$  szöghelyzetben található  $K$  keresztmetszetben milyen igénybevételek ébrednek! A normál- és nyíróigénybevételi függvények felírásához fel kell bontani az  $F$  erőt a keresztmetszetre merőleges és azzal párhuzamos komponensekre, az 5.32. ábrán látható módon. Innen leolvasható, hogy

$$N(\psi) = F \sin(\psi), \quad (5.85)$$

$$V(\psi) = -F \cos(\psi). \quad (5.86)$$



5.32. ábra. A  $K$  keresztmetszet normál- és nyíróigénybevételei

A normáligénybevétel előjele pozitív, hiszen a keresztmetszetből kifelé mutat. A nyíróigénybevétel előjelét viszont negatívnak tekintjük, mert úgy képzeljük, hogy a görbe rúd külső oldalán haladunk az  $\psi$  szögkoordináta irányának megfelelően, ami olyan, mintha egy egyenes rúdon jobbról balra haladnánk. Mivel ekkor a rúd elhagyott („jobb oldali”) részén sugárirányban kifelé („felé”) mutató nyíróerőt tapasztalunk, az negatív nyíróigénybevételnek felel meg.

A hajlítóigénybevétel meghatározásához azt vesszük figyelembe, hogy az  $F$  erő hatásvonalára  $R \sin(\psi)$  távolságra van a  $K$  keresztmetszet súlypontjától. Ez az erő olyan nyomatékot fejt ki, ami a görbe rúd kiegyenesítése irányában hat, tehát a hajlítóigénybevétel negatív:

$$M_h(\psi) = -FR \sin(\psi). \quad (5.87)$$

A fenti összefüggések az  $\psi \in [0, \pi]$  tartományban érvényesek, azaz az  $F$  erő és a befogás között.

**5.33. megjegyzés:** Ebben az esetben is van kapcsolat a nyíró- és hajlítóigénybevétel között, azonban ez kissé különbözik az (5.19) képlettől. A rúd súlypontvonalára mentén mért  $s = R\psi$  ívhossz segítségével is felírhatjuk a nyíróigénybevételi és hajlítónyomatéki függvényeket:

$$V(s) = -F \cos\left(\frac{s}{R}\right), \quad M_h(s) = -FR \sin\left(\frac{s}{R}\right). \quad (5.88)$$

A hajlítónyomatéki függvényt az ívhossz szerint deriválva azt kapjuk, hogy

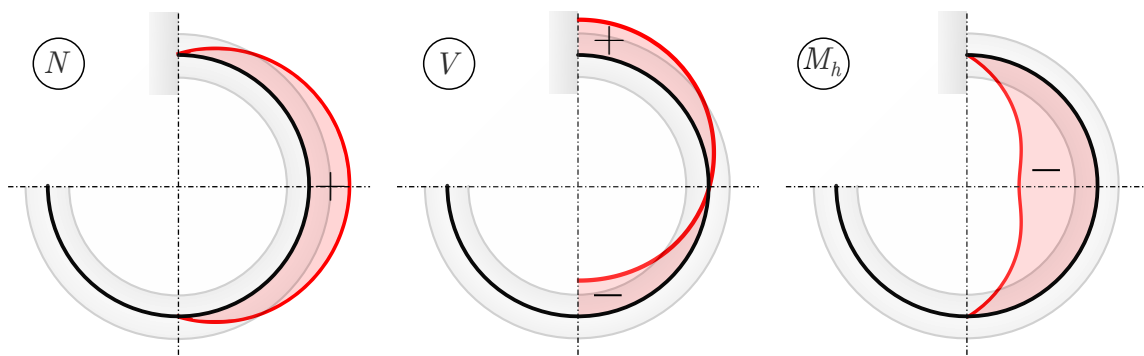
$$\frac{dM_h(s)}{ds} = -FR \frac{1}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right) \equiv -F \cos\left(\frac{s}{R}\right) \equiv V(s), \quad (5.89)$$

tehát most is hasonló a kapcsolat, mint amit korábban láttunk az egyenes rudaknál. Két különbséget fedezhetünk fel: egyrészt az ívhossz szerint kell végrehajtani a deriválást, másrészt pedig a hajlítónyomatéki függvény deriváltja nem a nyíróigénybevétel ellentettjével, hanem magával a nyíróigénybevételi függvénnyel egyenlő. Ez annak felel meg, hogy most „jobbról balra” haladunk a rúdon, ami egyenes rudak esetében is ugyanilyen előjelekhez vezet.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy ha a szögkoordináta az óramutató járásának megfelelően van felvéve, akkor  $dM_h(s)/ds \equiv 1/R dM_h(\psi)/d\psi = -V(\psi)$ , az óramutató járásával ellenkező irányban felvéve pedig  $dM_h(s)/ds = V(\psi)$ . ♣

Az igénybevételi ábrákat ezúttal is a rúd súlypontvonalára rajzoltuk; az igénybevételek nagysága a súlypontvonalattól mért sugárirányú távolsággal arányos az 5.33. ábrán.





5.33. ábra. A síkgörbe rúd igénybevételi ábrái



## 6. fejezet

# Keresztmetszetek nyomatékai

### 6.1. A nyomaték fogalmának általánosítása

A tengelyre számított *nyomaték* fogalmát erőkar és erő szorzataként vezettük be a 2.2. fejezetben. Számos síkbeli feladatban kihasználtuk, hogy az azonos tengelyre számított nyomatékok összeadhatók, és így a nyomatéki egyensúlyi egyenletek úgy is értelmezhetők, hogy egyensúlyban az erők *súlyozott összege* nulla (lásd (2.13) egyenlet). Mivel minden erőt meg kell szorozni hatásvonalának tengelytől mért távolságával, a távolabb ható erőknek nagyobb lesz a hozzájárulása az összegzett nyomatékhoz.

A matematikában és a műszaki tudományokban számos esetben találkozhatunk ehhez hasonló számításokkal, amikor valamilyen fizikai mennyiséget a térbeli elhelyezkedésének megfelelően kell súlyozni. Ezt tettük a párhuzamos erőrendszerek középpontjának bevezetése során is a 3.7. fejezetben, elsősorban a súlypont meghatározása kapcsán (3.7.2. fejezet).

A súlypont tárgyalásával párhuzamosan bevezettük a tömeg, a térfogat, a terület, és a vonal *statikai nyomatékának* fogalmát is. Ezeket a fizikai mennyiségeket egymáshoz hasonló képletekkel lehetett megadni; például egy síkidom *területének*  $O$  pontra számított statikai nyomatékvektorát az alábbi integrál definiálja (lásd (3.78) egyenlet):

$$\mathbf{S}_O = \int_{(A)} \mathbf{r} \, dA. \quad (6.1)$$

Ebben a fejezetben ennek a mennyiségnek az általánosításáról lesz szó, azaz be fogjuk vezetni a terület többféle nyomatékát. A szilárdságtani alkalmazásokat szem előtt tartva, *rudak keresztmetszeteinek* nyomatékait fogjuk meghatározni. Mivel egyenes rudak esetében leggyakrabban a súlypontvonalal párhuzamosan veszik fel az  $x$  tengelyt – ezt tettük mi is az igénybevételi függvények felírásakor – olyan koordináta-rendszert használunk, melynek az  $y$  és  $z$  tengelyei párhuzamosak a keresztmetszettel, mint a 6.1. ábrán.

A (3.79)-(3.80) egyenletek kapcsán bevezetett, *tengelyre számított* statikai nyomatékokat is ezekre a tengelyekre definiáljuk, azaz

$$S_y = \int_{(A)} z \, dA \quad (6.2)$$

az  $y$  tengelyre számított statikai nyomaték,

$$S_z = \int_{(A)} y \, dA \quad (6.3)$$

pedig a  $z$  tengelyre számított statikai nyomaték. Ezeket a mennyiségeket *elsőrendű nyomatékoknak* is nevezik, mert az integrandusban elsőfokon szerepel az adott tengelytől mért előjeles távolság, azaz az  $y$  illetve  $z$  koordináta. Mértékegységük  $m^3$ .

Az elsőrendű nyomatékok mintájára tetszőleges  $n$ -ed rendű nyomatékokat is bevezethetünk rudak keresztmetszeteinek geometriai jellemzésére,

$$\int_{(A)} y^n dA \quad \text{vagy} \quad \int_{(A)} z^n dA \quad (6.4)$$

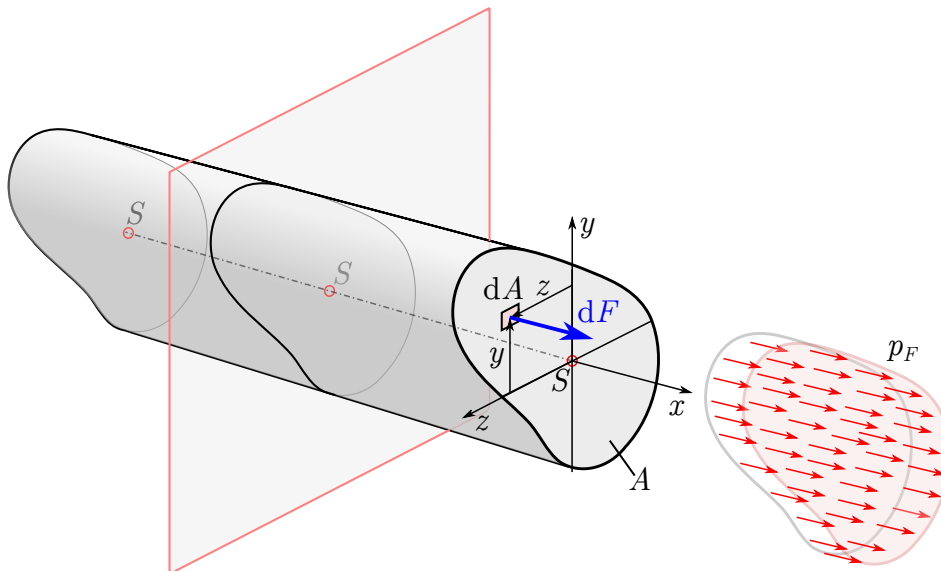
alakban. Ezek közül az  $n = 0$  eset könnyen tárgyalható, ugyanis egy keresztmetszet *nulladrendű nyomatéka* a területével egyenlő:

$$\int_{(A)} y^0 dA = \int_{(A)} z^0 dA = \int_{(A)} 1 dA = A. \quad (6.5)$$

Mint látni fogjuk, a terület különböző rendű nyomatékai arányosak különféle párhuzamos erőrendszerek által kifejtett erőkkel vagy nyomatékokkal. A *nulladrendű nyomaték* – azaz az  $A$  terület – egy állandó  $p_F$  intenzitású felületi erőrendszer által kifejtett  $F$  erővel arányos, hiszen egy elemi  $dA$  területre  $dF = p_F dA$  erő hat (lásd 6.1. ábra), és ezeket az elemi erőket összegezve

$$F = \int_{(A)} p_F dA = p_F A. \quad (6.6)$$

Ez a gondolatmenet nemcsak az ábrán látható, felületre merőleges megoszló erőrendszer esetében alkalmazható: az erőrendszer iránya tetszőleges (de a felületen belül állandó) lehet.



**6.1. ábra.** Rúd keresztmetszetében ébredő, állandó  $p_F$  intenzitású párhuzamos erőrendszer eredőjének meghatározása

**6.34. megjegyzés:** A felület mentén megoszló erők intenzitását is szokás  $p$ -vel jelölni, ami a nyomás (pressure) szóra utal. Azonban hogy különbséget tudjunk tenni a vonal mentén és

felület mentén megoszló erőrendszerek intenzitása között, utóbbit egy alsó indexszel látjuk el, azaz  $p_F$ -fel jelöljük. A  $p_F$  intenzitás mértékegysége  $\text{N/m}^2$ , ami a nyomás mértékegységével (Pa) egyenértékű.

A testek belsejében felvehető felületeken ébredő belső erőrendszerekkel a szilárdságtan foglalkozik. Ezek intenzitását *feszültségnek* nevezik, amit a felületre merőleges erőrendszerek esetében  $\sigma$  (szigma), felülettel párhuzamos esetben pedig  $\tau$  (tau) szimbólummal jelölnek.  $\sigma$  neve *normálfeszültség*,  $\tau$  pedig a *csúsztatófeszültség*. A kétféle feszültség közötti különbség megfigyelhető az 5.2. ábrán, ami különféle felületeken ébredő normál- és csúsztatófeszültségeket mutat. A feszültség pontról pontra változhat egy test belsejében, de normáligénybevétel esetében a normálfeszültség, nyíróigénybevétel esetében pedig a csúsztatófeszültség bizonyos felületeken jó közelítéssel állandó értékűnek feltételezhető. ♣

Ha  $n \geq 1$ , akkor a terület  $n$ -ed rendű nyomatékai különféle párhuzamos erőrendszerek által kifejtett (*forgató*)nyomatékokkal<sup>1</sup> lesznek arányosak:  $n = 1$  mellett állandó intenzitású erőrendszer nyomatékával,  $n = 2$  mellett lineárisan változó erőrendszer nyomatékával,  $n = 3$  mellett négyzetesen változó erőrendszer nyomatékával, stb.

Tehát a terület különféle rendű nyomatékainak számítása annak felel meg, hogy egy rúd keresztmetszetében kialakuló belső megoszló erőrendszer ismeretében meghatározzuk az erőrendszert jellemző koncentrált erőt és nyomatékot – azaz az igénybevételeket. Ez a megközelítés különbözik az 5. fejezetben leírt módszertől, melynek az volt az alapja, hogy a külső erőrendszer ismeretében, az egyensúly feltételei alapján fejeztük ki az igénybevételeket.

Szilárdságtanban elsősorban az elsőrendű és másodrendű nyomatékoknak van különös jelentősége, *keresztmetszetre merőleges irányú* erőrendszerek kapcsán, ezért a továbbiakban csak ezekkel foglalkozunk.

## 6.2. Elsőrendű nyomatékok

A 3.7.2. fejezetben már megmutattuk egy példa kapcsán, hogy a tengelyre számított statikai nyomatékok arányosak egy állandó intenzitású, *felületre merőleges irányú megoszló erő* megfelelő tengelyekre számított nyomatékaival. Az alábbiakban megismételjük ezt a bizonyítást egy rúd keresztmetszetében ébredő, állandó intenzitású erőrendszer esetére. Koordináta-rendszerünket úgy vesszük fel, hogy az origó a keresztmetszet súlypontjába essen.

A 6.1. ábra szerint ha kis  $dA$  felületelemekre bontjuk a keresztmetszetet, akkor egy-egy ilyen kis elemre  $dF = p_F dA$  erő hat. Ha a felületelem az  $y$  koordinátánál helyezkedik el, akkor a  $z$  tengelyre számított elemi nyomatéka  $dM_z = -dF y = -p_F y dA$ . Ezeket összegezve az alábbi integrál adja meg a teljes erőrendszer  $z$  tengelyre számított nyomatékát:

$$M_z = -p_F \int_{(A)} y dA. \quad (6.7)$$

Látható, hogy ez a  $z$  tengelyre számított forgatónyomaték arányos az

$$S_z = \int_{(A)} y dA \quad (6.8)$$

<sup>1</sup>Ebben a fejezetben érdemes megkülönböztetni a keresztmetszetek és az erőrendszerek nyomatékait. Az utóbbi nyomatékokat nevezzük forgatónyomatékoknak, a 2.18.. megjegyzésnek megfelelően.

$z$  tengelyre számított statikai nyomaték. Azonban mivel a keresztmetszet súlypontjában vettük fel a koordináta-rendszerünk origóját, ez egy súlypontra számított statikai nyomaték, tehát értéke zérus.

Az  $y$  tengelyre számított nyomatékot a fentiekhez hasonló módon az

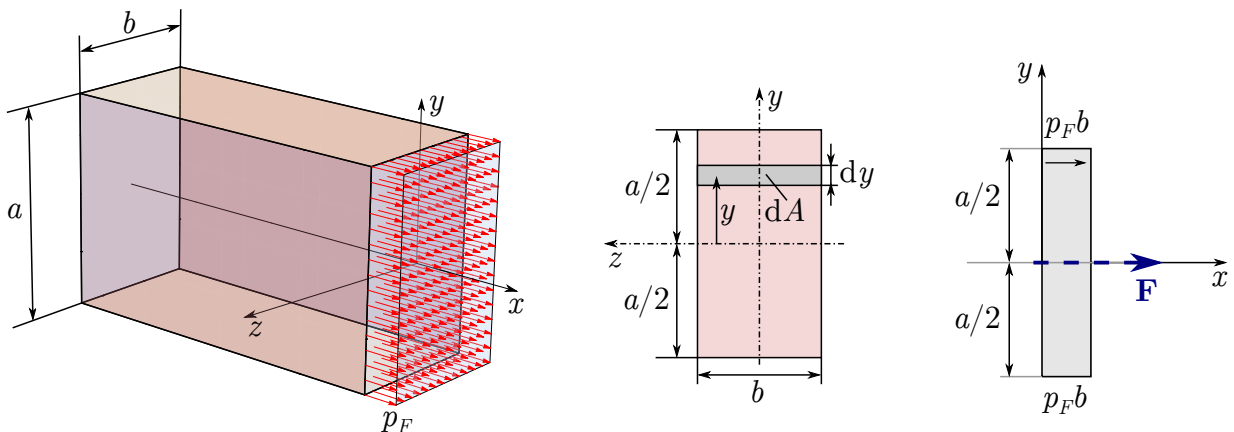
$$M_y = p_F \int_{(A)} z \, dA \quad (6.9)$$

képlettel számíthatjuk ki, ami a súlyponti  $y$  tengelyre számított

$$S_y = \int_{(A)} z \, dA \quad (6.10)$$

statikai nyomaték arányos, így szintén nulla.

**6.1. példa:** A 6.2. ábrán egy olyan eset látható, amikor egy rúd  $a \times b$  nagyságú, téglalap alakú keresztmetszetében állandó  $p_F$  intenzitású párhuzamos erőrendszer ébred. A felvett koordináta-rendszer tengelyei a téglalatest alakú rúd élével párhuzamosak, és az  $x$  tengely az  $a \times b$  méretű keresztmetszet súlypontján halad át. Határozzuk meg az erőrendszer  $y$  és  $z$  tengelyre számított nyomatékát!



**6.2. ábra.** Az  $a \times b$  méretű keresztmetszetben ébredő, állandó intenzitású erőrendszer, az elemi  $dA = b \, dy$  felület, és a probléma visszavezetése vonal mentén ébredő megoszló erőrendszerre

### Megoldás:

A keresztmetszetet feloszthatjuk  $b$  szélességű és  $dy$  magasságú téglalapokra, ezek alkotják a  $dA$  felületelemeket. Egy-egy ilyen felületelemre  $dF = p_F \, dA$  erő hat. Összegezve ezeket az elemi erőket, az erőrendszer eredőjének nagysága

$$F = p_F \int_{(A)} dA = p_F \int_{-a/2}^{a/2} b \, dy = p_F b [y]_{-a/2}^{a/2} = p_F ab. \quad (6.11)$$

Tehát a felületi intenzitást az  $A = ab$  területtel megszorozva kapjuk az eredő erő nagyságát.

Az eredő erő hatásvonalának a feladat szimmetriája miatt az  $x$  tengellyel kell egybeesnie. Ezt az alapján is megállapíthatjuk, hogy az eredő hatásvonalának pontjaira nulla kell legyen a megoszló erőrendszer nyomatéka. A nyomaték  $z$  irányú vetületét úgy fejezhetjük ki, hogy

összegezzük a  $dA$  felületelemekre ható  $dF$  erők nyomatékait. Ha a felületelem az  $y$  koordinátánál helyezkedik el, akkor a  $z$  tengelyre számított elemi nyomaték  $dM_z = -dF y = -p_F y dA$ . Ezeket összegezve az alábbi integrál adja meg a teljes nyomatékot:

$$M_z = -p_F \int_{(A)} y dA = -p_F b \int_{-a/2}^{a/2} y dy = -p_F b [y^2]_{-a/2}^{a/2} = 0. \quad (6.12)$$

Látható, hogy a  $z$  tengelyre számított nyomaték valóban arányos az

$$S_z = \int_{(A)} y dA \quad (6.13)$$

súlyponti  $z$  tengelyre számított statikai nyomatékkal, de ez zérus.

Az  $y$  tengelyre számított nyomatékot a fentiekhez hasonlóan, az

$$M_y = p_F \int_{(A)} z dA = p_F a \int_{-b/2}^{b/2} z dz = 0 \quad (6.14)$$

képlettel számíthatjuk ki, ami az

$$S_y = \int_{(A)} z dA \quad (6.15)$$

$y$  tengelyre számított statikai – azaz elsőrendű – nyomatékkal arányos, de ez szintén nulla, mint minden, súlyponti tengelyre számított statikai nyomaték. ♠

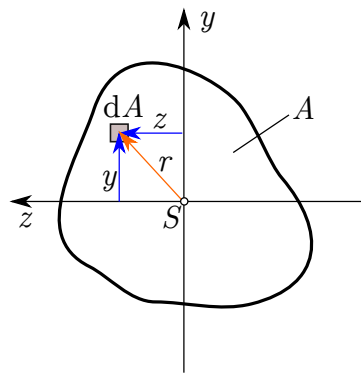
**6.35. megjegyzés:** Jó közelítéssel ilyen, keresztmetszet mentén állandó megoszló erőrendszer ébred *húzott rudakban*. Ebben az esetben a belső erőrendszer eredőjét *normálerőnek* vagy *normálígénybevételnek* nevezik és  $N$ -nel jelölik, ahogy az 5. fejezetben már láttuk. Az  $x$  irányú, felületre merőleges erőrendszer felületi intenzitásának szilárdságtani elnevezése  *$x$  irányú normálfeszültség*, amit  $\sigma_x$ -szel jelölnek. Ezekkel a jelölésekkel az  $F = p_F ab$  képlet  $N = \sigma_x A$  alakban írható fel, ahol  $A = ab$  a keresztmetszet területe. ♣

A bemutatott számítás a példában szereplő egyszerű esetben annak felel meg, hogy vonal mentén – például az  $y$  tengely mentén – megoszló erőrendszerrel helyettesítjük a felületi erőrendszert, melynek vonal menti intenzitása  $p = p_F b$ . Ezután ennek eredőjét számoljuk, ami  $F = pa \equiv p_F ba$  nagyságú, és az  $a$  hosszúságú szakasz felezőpontján halad át a hatásvonala, azaz a felvett koordináta-rendszer origóján (lásd 6.2. ábra).

## 6.3. Másodrendű nyomatékok

### 6.3.1. Tengelyre és tengelypárra számított másodrendű nyomatékok

A szilárdságtanban különösen nagy jelentősége van a *másodrendű nyomatékoknak*. Többféle másodrendű nyomatékot is definiálhatunk; ezek közös jellemzője, hogy mértékegységük  $m^4$  (vagy  $cm^4$ ,  $mm^4$ ). Az ebben a fejezetben tárgyalt másodrendű nyomatékok valamilyen távolságnégyzetnek vagy koordináták szorzatának a keresztmetszet területére vett integráljaként számíthatók ki. Az integrálok értelmezését a 6.3. ábra szemlélteti.



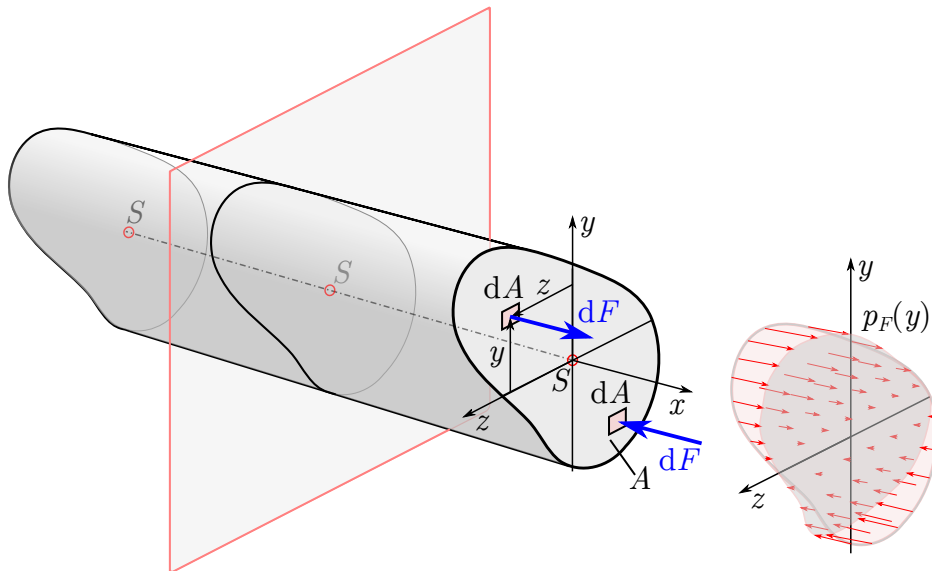
**6.3. ábra.** Egy  $A$  területű alakzat másodrendű nyomatéki távolságnégyzetnek ( $r^2$ ), koordináták négyzetének (pl.  $y^2$  vagy  $z^2$ ) vagy koordináták szorzatának a területre vett integráljaként számíthatók

Definíció szerint az  $y$  illetve  $z$  tengelyre számított (más néven ekvatoriális) másodrendű nyomatékok

$$I_y = \int_{(A)} z^2 dA, \quad \text{és} \quad (6.16)$$

$$I_z = \int_{(A)} y^2 dA. \quad (6.17)$$

Ezek közül  $I_z$  egy olyan párhuzamos erőrendszer  $z$  tengelyre számított forgatónyomatékával arányos, aminek az intenzitása az  $y$  tengely mentén lineárisan változik, és  $y = 0$ -ban nulla, azaz  $p_F(y) = my$  alakban írható fel. Ilyen eseteket mutatnak a 6.4. és 6.6. ábrák. Az



**6.4. ábra.** Rúd keresztmetszetében ébredő, az  $y$  tengely mentén lineárisan változó  $p_F(y)$  intenzitású párhuzamos erőrendszer eredőjének meghatározása

$y$  tengelyre számított  $I_y$  másodrendű nyomaték hasonlóan értelmezhető: az ugyanis egy



olyan párhuzamos erőrendszer  $y$  tengelyre számított forgatónyomatékával arányos, aminek az intenzitása a  $z$  tengely mentén változik lineárisan, azaz  $p_F(z) = mz$  alakú.

Nemcsak tengelyre számított másodrendű nyomatékokat definiálhatunk. Bizonyos esetekben az  $y$  irányban lineárisan változó belső megoszló erőrendszer nyomatékának nemcsak  $z$  irányú, hanem  $y$  irányú komponense is van. (Illetve  $z$  irányban változó erőrendszer nyomatékának is lehet  $z$  irányú komponense.) Ezzel a nyomatékkal arányos a *centrifugális* (vagy *tengelypárra, tengelykeresztre számított*) *másodrendű nyomaték*:

$$I_{yz} = \int_{(A)} yz \, dA. \quad (6.18)$$

Fontos megemlíteni, hogy míg *a tengelyre számított  $I_y$  és  $I_z$  másodrendű nyomatékok csak pozitívak lehetnek* – hiszen egy távolságnégyzet jellegű mennyiséget integrálunk a terület mentén – *a tengelypárra számított másodrendű nyomaték lehet pozitív is, negatív is.*

Tegyük fel, hogy az erőrendszer intenzitása az  $y$  koordinátával lineárisan változik, azaz

$$p_F(y) = m y \quad (6.19)$$

alakban írható fel (lásd 6.4. ábra)! (Egy  $z$  tengely mentén változó erőrendszer esetében az alábbi számítás értelemszerű változtatásokkal végezhető el.) Az erőrendszer eredő ereje

$$F = \int_{(A)} p_F(y) \, dA = \int_{(A)} m y \, dA = m \int_{(A)} y \, dA = m S_z = 0, \quad (6.20)$$

hiszen az erő kifejezésében megjelent a súlyponti  $z$  tengelyre számított elsőrendű (statikai) nyomaték, ami zérus.

A súlypontba redukált erőrendszer nyomatékának számításához kis  $dA$  nagyságú elemi felületelemekre osztjuk a területet. Egy ilyen kis felületelemre  $dF = p_F(y) \, dA = m y \, dA$  erő hat, tehát ennek a nagysága lineárisan függ az  $y$  koordinátától. Ha a felületelem egy  $y$  koordinátájú pont környezetében helyezkedik el (lásd 6.4. ábra), akkor a  $z$  tengelyre számított elemi nyomaték  $dM_z = -dF y = -m y y \, dA$ . Ezeket a nyomatékokat összegezve:

$$M_z = - \int_{(A)} p_F(y) y \, dA = - \int_{(A)} m y y \, dA = -m \int_{(A)} y^2 \, dA = -m I_z. \quad (6.21)$$

Tehát a  $z$  tengelyre számított forgatónyomaték arányos az

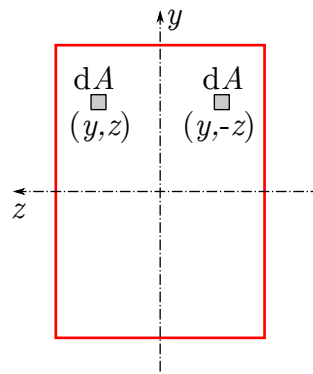
$$I_z = \int_{(A)} y^2 \, dA \quad (6.22)$$

$z$  tengelyre számított másodrendű nyomatékkal.

Az  $M_y$  nyomaték hasonlóan számítható, de itt a tengelypárra számított másodrendű nyomaték jelenik meg a forgatónyomaték képletében:

$$M_y = \int_{(A)} p_F(y) z \, dA = \int_{(A)} m y z \, dA = m \int_{(A)} y z \, dA = m I_{yz}. \quad (6.23)$$

Ha a keresztmetszetnek szimmetriatengelye az  $y$  vagy a  $z$  tengely, mint a 6.5. ábrán, akkor  $I_{yz} = 0$ , mert ebben az esetben a keresztmetszet tetszőleges  $(y, z)$  koordinátájú pontjában lévő  $dA$  felületelemhez található egy másik felületelem, aminek  $(-y, z)$  vagy  $(y, -z)$  a koordinátája. Ezek ugyanakkora nagyságú, de ellentétes előjelű hozzájárulást adnak az integrálhoz, ami így nullát ad eredményül.



**6.5. ábra.** Ha szimmetrikus a keresztmetszet és az  $y$  tengely a szimmetriatengelybe esik, akkor minden kis felületelemnek van egy párja, aminek ellentétes a hozzájárulása az  $I_{yz}$  tengelypárra számított másodrendű nyomatékhoz

**6.36. megjegyzés:** Szilárdságtani vizsgálatokkal megmutatható, hogy hajlítógénybevitelnek kitett rudakban sok esetben jó közelítéssel lineárisan változó belső erőrendszer alakul ki, és a belső erőrendszer nyomatékának nagysága megegyezik a hajlítónyomaték nagyságával. Ezért a keresztmetszet másodrendű nyomatékai – melyek csak a keresztmetszet geometriai jellemzői, a terhelésektől, igénybevételektől teljesen függetlenek – jól használhatók annak jellemzésére, hogy milyen belső erőrendszer alakul ki adott hajlítónyomaték hatására. Például a (6.21) képlet szerint adott hajlítónyomaték mellett kisebb  $m$  meredekséggel nő a belső erőrendszer intenzitása egy olyan keresztmetszetben, aminek nagyobb az adott tengelyre számított másodrendű nyomatéka. Ennek kapcsán az is megmutatható, hogy egy állandó keresztmetszetű rúd adott tengellyel párhuzamos hajlítónyomaték hatására bekövetkező lehajlása fordítottan arányos az arra a tengelyre számított másodrendű nyomatékkal (feltéve, hogy a tengelypárra számított másodrendű nyomaték nulla). Tehát ha egy tengelyre kisebb a másodrendű nyomaték, akkor abban az irányban könnyebb a rudat meghajlítani. ♣

**6.2. példa:** Tekintsük azt az esetet, amikor egy téglalap keresztmetszetű rúd  $a \times b$  méretű keresztmetszetére hat  $y$  irányban változó intenzitású megoszló erőrendszer (lásd 6.6. ábra)! Határozzuk meg az erőrendszer  $y$  és  $z$  tengelyre számított nyomatékát!

**Megoldás:**

Az  $y$  tengely mentén változó intenzitás

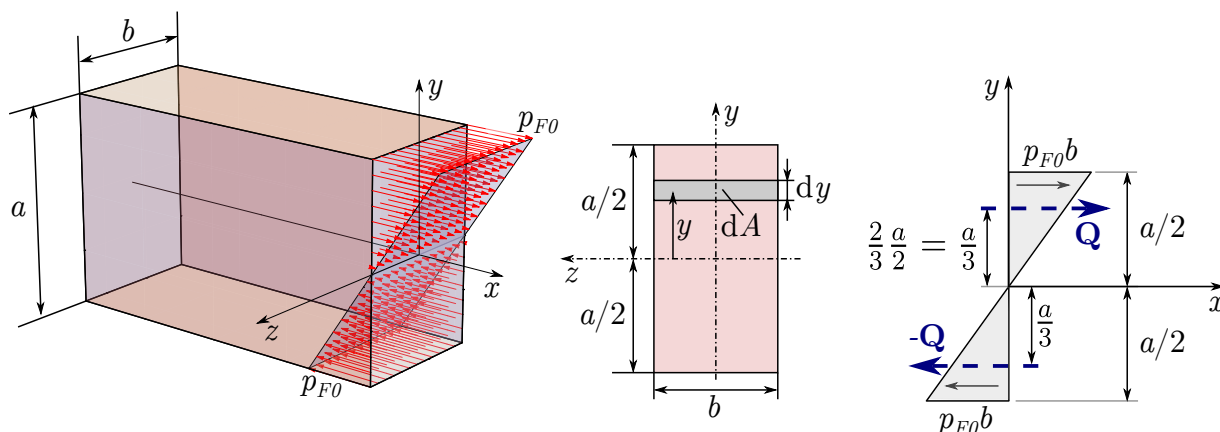
$$p_F(y) = m y \quad (6.24)$$

alakban írható fel, mely maximális  $p_{F0}$  értékét  $a/2$ -ben veszi fel, így ebből számítható az  $m$  együttható:

$$p_{F0} \equiv p_F(a/2) = m \frac{a}{2} \Rightarrow m = \frac{2p_{F0}}{a}. \quad (6.25)$$

A nyomatékok számításához kis  $dA = b dy$  nagyságú elemi felületelemekre osztjuk a területet, ahogy a 6.6. ábrán látható. Egy ilyen kis felületelemre  $dF = p_F(y) dA = myb dy$  erő hat. Ha a felületelem az  $y$  koordinátánál helyezkedik el, akkor a  $z$  tengelyre számított elemi nyomaték  $dM_z = -dF y = -my^2b dy$ . Ezeket összegezve az alábbi integrálra jutunk:

$$M_z = - \int_{(A)} p_F(y)y dA = -m \int_{(A)} y^2 dA = -mb \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy = -mb \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} = -m \frac{a^3 b}{12}. \quad (6.26)$$



**6.6. ábra.** Az  $y$  koordináta függvényében lineáris megoszló erőrendszer,  $p_{F0}$  maximális felületi intenzitással

Ezt összevetve a (6.21) képlettel, látható, hogy a vizsgált téglalap keresztmetszet  $z$  tengelyre számított másodrendű nyomatéka

$$I_z = \int_{(A)} y^2 dA = \frac{a^3 b}{12}. \quad (6.27)$$

Az  $y$  tengelyre számított forgatónyomaték számításához már nem felel meg a 6.6. ábrán látható  $b dy$  felületelem, mert mint látni fogjuk, az integrandusban  $y$  és  $z$  is megjelenik változóként. Ebben az esetben kis elemi téglalapot kell felvenni  $dA = dy dz$  alakban. A kettős integrálásból elegendő csak az  $y$  szerinti integrálást elvégezni, mert már abból látható, hogy az eredmény nulla:

$$M_y = \int_{(A)} p_F(y) z dA = \int_{(A)} m y z dA = m \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} y z dy dz = m \int_{-b/2}^{b/2} \left[ y^2 \right]_{-a/2}^{a/2} z dz = 0. \quad (6.28)$$

Ez összhangban van azzal, hogy ha az  $y$  vagy  $z$  tengely a keresztmetszet szimmetriatengelye, akkor a tengelypárra számított másodrendű nyomaték nulla.

A  $z$  irányú forgatónyomaték meghatározását vissza lehet vezetni egy vonal mentén – az  $y$  tengely mentén – megoszló, lineárisan változó erőrendszer nyomatékának kiszámítására, melynek maximális vonal menti intenzitása  $p_0 = p_{F0} b$  (lásd 6.6. ábra). Ehhez célszerű külön-külön meghatározni az eredőt az  $y > 0$  tartományon, ahol az erőrendszer pozitív  $x$  irányú, és az  $y < 0$  tartományon, ahol az erő éppen ellenkező irányú.

A pozitív értelmű erőrendszer eredőjének hatásvonala ekkor az  $y = a/3$  koordinátánál metszi az  $y$  tengelyt, a negatív értelmű erőrendszer eredője pedig  $(-a/3)$ -nál. Mindkét részeredő nagysága

$$Q = \frac{1}{2} p_{F0} b \frac{a}{2} \equiv p_{F0} \frac{ab}{4}. \quad (6.29)$$

Mivel a  $Q$  és  $-Q$  erők hatásvonala párhuzamos, nagysága megegyezik, értelme pedig ellentétes, ezek erőpárt alkotnak. Figyelembe véve, hogy a két hatásvonal távolsága  $2a/3$ , az erőpár nyomatéka

$$M = Q \frac{2a}{3} = p_{F0} \frac{ab}{4} \frac{2a}{3} = p_{F0} \frac{a^2 b}{6} = m \frac{a^3 b}{12} \quad (6.30)$$

nagyságú, és negatív  $z$  irányú, a (6.26) egyenlettel összhangban.

Ha a nyomaték ismeretében szeretnénk meghatározni a maximális felületi intenzitást, akkor a fenti képlet szerint

$$p_{F0} = \frac{M}{a^2 b / 6}. \quad (6.31)$$

Felhasználva a (6.25) egyenletet, ebből a felületi intenzitást megadó  $p_F(y)$  függvény is számítható:

$$p_F(y) = m y \equiv \frac{2p_{F0}}{a} \equiv \frac{M}{a^3 b / 12} y = \frac{M}{I_z} y. \quad (6.32)$$

**6.37. megjegyzés:** Szilárdságtani vizsgálatokkal megmutatható, hogy a vázolt esetnek megfelelő,  $a \times b$  keresztmetszetű rúd keresztmetszeteiben egy  $z$  tengellyel párhuzamos  $M_h$  nagyságú hajlítónyomaték hatására jó közelítéssel lineáris belső megoszló erőrendszer lép fel. Tehát az erőrendszert jellemző  $\sigma_x \equiv p_F$  intenzitás, azaz az  $x$  irányú normálfeszültség is lineárisan változik az  $y$  tengely mentén:

$$\sigma_x(y) = \frac{M_h}{I_z} y, \quad (6.33)$$

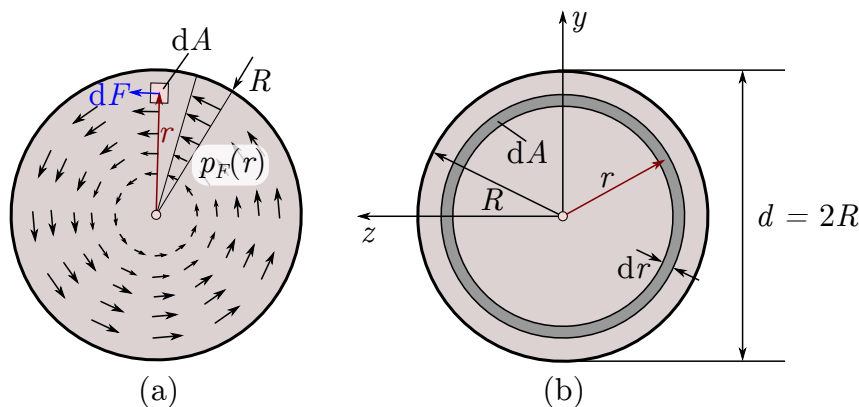
a maximális normálfeszültség (ami a példában a maximális  $p_{F0}$  felületi intenzitásnak felel meg) pedig

$$\sigma_{x\max} = \frac{M_h}{K_z}, \quad (6.34)$$

ahol  $K_z = I_z / (a/2) \equiv a^2 b / 6$  a  $z$  tengelyre számított keresztmetszeti tényező. ♣

### 6.3.2. Poláris másodrendű nyomaték

Csavaróigénybevételnek kitett kör vagy körgyűrű keresztmetszetű rudakban jó közelítéssel a keresztmetszettel párhuzamos síkban ható, a középponttól mért  $r$  sugárral arányos, a sugárra merőleges irányú megoszló erőrendszer lép fel, mint amit a 6.7. ábrán illusztrálunk.



**6.7. ábra.** (a) Az  $r$  koordináta függvényében lineárisan változó nagyságú, az  $R$  sugarú keresztmetszet síkjával párhuzamos megoszló erőrendszer. (b): A poláris másodrendű nyomaték számításához felvett  $dA = 2r\pi dr$  nagyságú felületelem szemléltetése [A60]

Ebben az esetben az erőrendszernek a keresztmetszet síkjára merőleges  $x$  tengelyre számított nyomatéka hozható kapcsolatba a keresztmetszet geometriáját jellemző *poláris (pontra számított) másodrendű nyomatékkal*, amit az

$$I_p = \int_{(A)} r^2 \, dA \quad (6.35)$$

képlet definiál. Mivel  $r^2$  mindenképpen pozitív, a poláris másodrendű nyomaték is csak pozitív értékű lehet, ugyanúgy, mint a tengelyre számított másodrendű nyomatékok. Emellett  $r^2 = y^2 + z^2$  miatt az is teljesül, hogy

$$I_p = I_y + I_z \quad (6.36)$$

(lásd 6.3. ábra).

Kör keresztmetszet esetében az integrál kiszámításához célszerű felvenni egy  $dA = 2r\pi \, dr$  nagyságú felületelemet, ahogy a 6.7/b ábrán látható. Ezzel egy  $R$  sugarú és  $d = 2R$  átmérőjű kör keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka

$$I_p = \int_{(A)} r^2 \, dA = \int_0^R r^2 \, 2r\pi \, dr = 2\pi \int_0^R r^3 \, dr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{d^4\pi}{32}. \quad (6.37)$$

A kör szimmetriája miatt  $I_y = I_z$ , ezért

$$I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{d^4\pi}{64}. \quad (6.38)$$

Ha a 6.7. ábrán vázolt erőrendszer intenzitása a

$$p_F(r) = mr \quad (6.39)$$

függvény szerint változik, akkor a keresztmetszet síkjára merőleges  $x$  tengelyre számított nyomaték

$$M_x = \int_{(A)} p_F(r)r \, dA = \int_{(A)} mrr \, dA = m \int_{(A)} r^2 \, dA = mI_p, \quad (6.40)$$

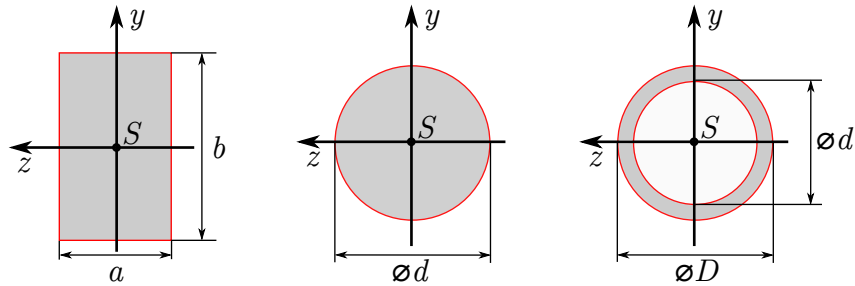
ami valóban arányos az

$$I_p = \int_{(A)} r^2 \, dA \quad (6.41)$$

poláris másodrendű nyomatékkal.

## 6.4. Steiner-tétel

A másodrendű nyomatékok kiszámítása során nagy jelentősége van annak, hogy a keresztmetszet melyik pontjába helyezük a koordináta-rendszerünk origóját, azaz honnan mérjük az  $y$  és  $z$  koordinátákat, illetve az  $r$  távolságot. Mivel az igénybevételeket a keresztmetszet súlypontjába redukált erőrendszer segítségével definiáltuk, általában a súlyponton átmenő tengelyekre számított másodrendű nyomatékokat kell használni, azoknak van fizikai tartalma.



6.8. ábra. Téglalap, kör és körgyűrű méretei

Bizonyos esetekben mégis szükség lehet arra, hogy a súlyponttól eltérő koordináta-rendszerben fejezzük ki a másodrendű nyomatékokat. Ez megtehető a korábban bevezetett a (6.16)-(6.18) és (6.35) integrálok alapján, de az alábbiakban egy olyan, a gyakorlatban jól használható módszert mutatunk be, mellyel az integrálás sok esetben elkerülhető. Ehhez azt használhatjuk ki, hogy az integrál tulajdonságai miatt az *azonos tengelyekre vagy tengelypárookra számított másodrendű nyomatékok összeadhatók*. Ebből következően üreges belsejű rudak – például zártszelvények, csövek – keresztmetszeteinek a másodrendű nyomatékait kiszámolhatjuk úgy, hogy a külső méretek alapján számított másodrendű nyomatékból kivonjuk a belső méretek alapján számítottat. Például *körgyűrű keresztmetszet* esetében a  $D$  külső és  $d$  belső átmérővel számolva (lásd 6.8. ábra)

$$I_y = I_z = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{64}, \quad (6.42)$$

$$I_{yz} = 0, \quad (6.43)$$

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32}. \quad (6.44)$$

Ehhez hasonlóan, ha egy rúd keresztmetszete olyan darabokra bontható, melyek másodrendű nyomatékai ismertek a *saját súlypontjukon átmenő tengelyekre illetve tengelypárookra*, akkor ezek *megfelelő módon* összegezhetők. Ezt segíti, hogy egyszerű keresztmetszetekre táblázatokban (lásd 8.7. ábra) megtalálható a másodrendű nyomatékok értéke célszerűen kiválasztott irányú, a súlypontban metsződő tengelyek esetére [6]. Például – ahogy az előző fejezetben láttuk – *téglalap keresztmetszet* esetén

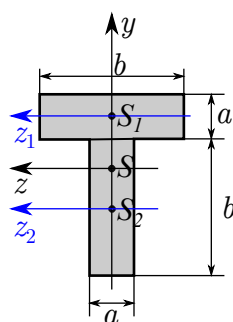
$$I_y = \frac{a^3b}{12}, \quad I_z = \frac{ab^3}{12}, \quad I_{yz} = 0, \quad (6.45)$$

*kör keresztmetszetre* pedig

$$I_y = I_z = \frac{d^4\pi}{64}, \quad I_{yz} = 0, \quad \text{és} \quad I_p = \frac{d^4\pi}{32}. \quad (6.46)$$

ahol a jelöléseket a 6.8. ábra szerint kell értelmezni.

Ebben a fejezetben azzal az esettel foglalkozunk, amikor az egyes darabok másodrendű nyomatékai egymással párhuzamos tengelyű koordináta-rendszerekben ismertek, mint ahogy a 6.9. ábra mutatja.



6.9. ábra. Példa a Steiner-tétel alkalmazására: T alakú keresztmetszet

A példaképpen bemutatott T alakú keresztmetszet két egybevágó téglalapra bontható, melyek  $S_1$  illetve  $S_2$  súlypontjain áthaladó tengelyekre kiszámolhatók a saját másodrendű nyomatékaik:

$$I_y^{(1)} = I_{z_2}^{(2)} = \frac{b^3 a}{12}, \quad (6.47)$$

$$I_y^{(2)} = I_{z_1}^{(1)} = \frac{a^3 b}{12}. \quad (6.48)$$

Az  $y$  tengely közös, ezért a teljes keresztmetszetre

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = \frac{a^3 b + b^3 a}{12}. \quad (6.49)$$

Ezzel szemben a  $z$ ,  $z_1$  és  $z_2$  tengelyek nem esnek egybe, ezért a teljes keresztmetszet  $z$  tengelyre számított másodrendű nyomatéka nem egyezik meg  $I_{z_1}^{(1)}$  és  $I_{z_2}^{(2)}$  összegével. Mivel  $z_1$  és  $z_2$  párhuzamosak,  $I_z$  kiszámításához az ún. Steiner-tételt alkalmazhatjuk.

A *Steiner-tétel*<sup>2</sup> szerint ha adott egy síkidom a súlypontján áthaladó  $y$  és  $z$  tengelyekkel (lásd 6.10. ábra), akkor egy tetszőleges  $P$  ponton át húzott  $\eta \parallel y$  és  $\zeta \parallel z$  tengelyekre, valamint az  $\eta\zeta$  tengelypárra számított másodrendű nyomatékok a következő módon fejezhetők ki a súlyponti  $I_y$ ,  $I_z$  és  $I_{yz}$  másodrendű nyomatékok és a síkidom  $A$  területe alapján:

$$I_\eta = I_y + z_P^2 A, \quad (6.50)$$

$$I_\zeta = I_z + y_P^2 A, \quad (6.51)$$

$$I_{\eta\zeta} = I_{yz} + y_P z_P A. \quad (6.52)$$

Fontos, hogy ezekben a képletekben  $y_P$  és  $z_P$  nem távolságok, hanem az  $S$ -ből a  $P$  pontba mutató  $\mathbf{r}_{SP}$  vektor *koordinátái*. Előjelüknek  $I_{\eta\zeta}$  számítása szempontjából van jelentősége.<sup>3</sup> A tételből következik, hogy párhuzamos tengelyekre számított másodrendű nyomatékok közül mindig a *súlyponti tengelyre számított másodrendű nyomaték a legkisebb*.

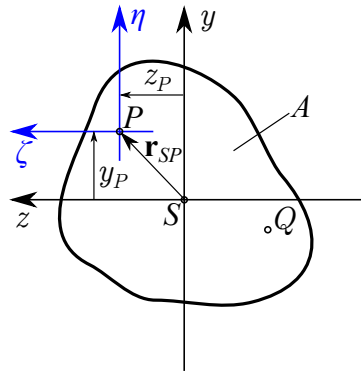
#### Bizonyítás:

Csak (6.50) bizonyítását mutatjuk be, a másik két összefüggés hasonlóan látható be. Definíció szerint

$$I_\eta = \int_{(A)} \zeta^2 dA. \quad (6.53)$$

<sup>2</sup>Jacob Steiner (1796-1863)

<sup>3</sup>Ugyanazt az eredményt kapjuk az ellentétes irányú,  $\mathbf{r}_{PS}$  vektor koordinátaival is.



6.10. ábra. Ábra a Steiner-tétel levezetéséhez

Mivel  $\zeta = z - z_P$ ,

$$I_\eta = \int_{(A)} (z - z_P)^2 dA = \underbrace{\int_{(A)} z^2 dA}_{=I_y} + \underbrace{\int_{(A)} z_P^2 dA}_{=z_P^2 A} - 2z_P \underbrace{\int_{(A)} z dA}_{=0}. \quad (6.54)$$

Itt kihasználtuk, hogy  $\int_{(A)} z dA$  a súlypontra számított statikai nyomaték egyik komponense, ezért értéke nulla. ♠

A fenti levezetésből látszik, hogy az utolsó tag csak akkor esik ki, ha az  $S$  pont a síkidom súlypontja. A Steiner-tétel tehát nem alkalmazható két tetszőleges pont között; az egyik pontnak súlypontnak kell lennie! Ha két olyan pont között szeretnénk meghatározni az azokon áthaladó tengelyekre számított másodrendű nyomatékok közötti összefüggéseket, melyek közül egyik sem súlypont (például a  $P$  és a  $Q$  pontok a 6.10. ábrán), akkor ezt két lépésben kell megtenni. Ha a  $P$  ponton átmenő tengelyekre ismertek a másodrendű nyomatékok, akkor az első lépésben ki kell számolni a súlyponti mennyiségeket, majd az alapján lehet kiszámítani a  $Q$  ponthoz tartozó másodrendű nyomatékokat.

A tételben fontos szerepet játszik a megfelelő tengelyek párhuzamossága, ezért a Steiner-tételt a *párhuzamos tengelyek tételének* is nevezik.

**6.3. példa:** A Steiner-tétel alapján fejezzük ki a 6.9. ábrán bemutatott  $T$  alakú keresztmetszet  $z$  tengelyre és  $yz$  tengelypárra számított másodrendű nyomatékait!

**Megoldás:**

Mivel a két téglalap alakú rész területe megegyezik, az  $S$  közös súlypont éppen az  $S_1$  és  $S_2$  pontok közötti szakasz felezőpontjában található, így mind az  $\overline{SS_1}$ , mind az  $\overline{SS_2}$  távolság  $(a+b)/4$ .

Tehát az  $(y, z)$  koordináta-rendszerben  $\mathbf{r}_{S_1S} = [-(a+b)/4 \ 0]^T$  és  $\mathbf{r}_{S_2S} = [(a+b)/4 \ 0]^T$ . Ebben az esetben a téglalapok  $S_1$  illetve  $S_2$  súlypontjaiból a közös  $S$  súlypontba, mint egy azokhoz képest külső pontba kell átszámítani a másodrendű nyomatékokat, ezért azok értéke nő. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy most a közös súlypont játssza a tételben szereplő  $P$  pont szerepét. A Steiner-tétel szerint tehát a két téglalap  $S$  súlyponton átmenő  $z$  tengelyre számított másodrendű nyomatékai:

$$I_z^{(1)} = I_{z_1}^{(1)} + \frac{(a+b)^2}{4^2} A_1 = \frac{a^3 b}{12} + \frac{(a+b)^2}{4^2} ab, \quad (6.55)$$

$$I_z^{(2)} = I_{z_2}^{(2)} + \frac{(a+b)^2}{4^2} A_2 = \frac{b^3 a}{12} + \frac{(a+b)^2}{4^2} ab. \quad (6.56)$$



Ezek most már ugyanarra a tengelyre vannak kiszámítva, ezért összeadhatók. Tehát a teljes keresztmetszetre

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{a^3b + b^3a}{12} + \frac{(a+b)^2}{8}ab. \quad (6.57)$$

A két téglalap szimmetriája miatt  $I_{yz_1}^{(1)} = I_{yz_2}^{(2)} = 0$ . Mivel az  $\mathbf{r}_{S_1S}$  és  $\mathbf{r}_{S_2S}$  vektoroknak nincs  $z$  irányú komponense, a Steiner-tétel sem ad ehhez hozzájárulást, így a teljes keresztmetszetre is  $I_{yz} = 0$ . ♠

**6.4. példa:** Határozzuk meg félkörcikk és negyedkörcikk alakú síkidomok súlyponti tengelyre számított másodrendű nyomatékait!

**Megoldás:**

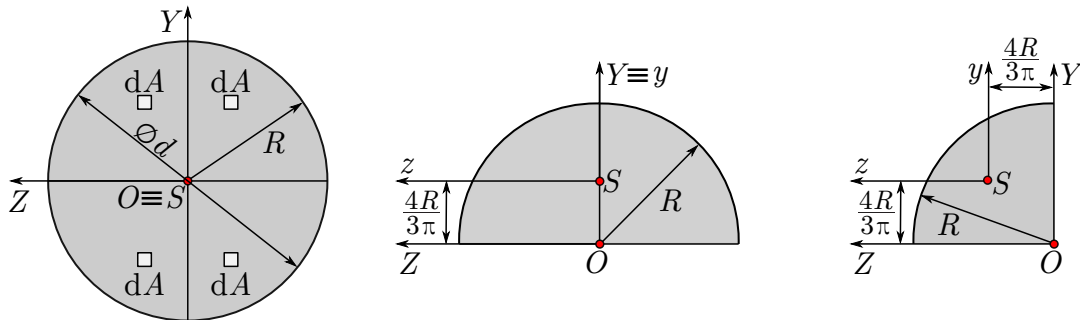
A 6.3.2. fejezetben levezettük, hogy egy  $R$  sugarú és  $d = 2R$  átmérőjű kör keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka

$$I_p^{kör} = \frac{R^4\pi}{2} = \frac{d^4\pi}{32}, \quad (6.58)$$

továbbá a kör szimmetriája miatt (lásd 6.11. ábra) az  $O$  középponton áthaladó  $Y$  és  $Z$  tengelyekre

$$I_Y^{kör} = I_Z^{kör} = \frac{I_p}{2} = \frac{d^4\pi}{64}, \quad \text{és} \quad I_{YZ}^{kör} = 0. \quad (6.59)$$

Az ugyanazon pontra számolt másodrendű nyomatékok additivitása (összeadhatósága) miatt



**6.11. ábra.** Félkörcikk és negyedkörcikk másodrendű nyomatékainak származtatása kör lap másodrendű nyomatékai alapján

egy félkörcikk  $O$  ponton átmenő tengelyekre számított másodrendű nyomatékai a fenti értékek felével egyenlőek, azaz

$$I_Y^{fkör} = I_Z^{fkör} = \frac{d^4\pi}{128} = \frac{R^4\pi}{8}, \quad \text{és} \quad I_{YZ}^{fkör} = 0, \quad (6.60)$$

míg negyedkörcikk esetében negyedelni kell a körre vonatkozó kifejezéseket:

$$I_Y^{nkör} = I_Z^{nkör} = \frac{d^4\pi}{256} = \frac{R^4\pi}{16}, \quad \text{és} \quad I_{YZ}^{nkör} = 0. \quad (6.61)$$

A tengelyre számított másodrendű nyomatékokat ugyanis kis elemi  $dA$  területek súlyozott összegeként képzelhetjük el, ahol a súly az adott tengelytől mért távolság négyzete. Például  $I_Y$  esetében  $Z^2 dA$  alakú tagokat összegzünk. Ha a kör egyik negyedében kiválasztunk egy elemi  $dA$  területet, akkor a másik három negyedben is találhatunk ennek megfelelő kis területeket,

melyekre  $Z^2 dA$  ugyanakkora értékű (lásd 6.11. ábra).  $I_Z$  számításakor hasonló a helyzet: minden kis elemi területnek van három megfelelője a többi síknegyedben, melyekre  $Y^2 dA$  megegyezik. Tehát a kör felezése illetve negyedelése annak felel meg, hogy a négy ugyanolyan nagyságú  $Z^2 dA$  (vagy  $I_Z$  számításakor  $Y^2 dA$ ) alakú tagból csak kettőt illetve egyet veszünk figyelembe.

A 6.3.1. fejezetben megmutattuk, hogy szimmetrikus keresztmetszetekben a szimmetriatengely két oldalán olyan elemi területek találhatók, melyek éppen ellenkező előjellel járulnak hozzá a tengelypárra számított másodrendű nyomatékokhoz. Mivel az  $O$  ponton áthaladó  $Y$  tengely mind a félkör, mind a negyedkör esetében szimmetriatengely, mindkét esetben nulla értékűek a tengelypárra számított másodrendű nyomatékok.

A megoldás következő lépésében a Steiner-tételt kell alkalmaznunk, hogy a súlyponti  $(y, z)$  koordináta-rendszerben is kifejezhessük a másodrendű nyomatékokat. A 8.2.1. fejezet szerint a súlypont  $4R/(3\pi)$  távolságra helyezkedik el a  $Z$  tengelytől. Ezt felhasználva a félkörök súlyponti másodrendű nyomatékai

$$I_y^{fkör} = \frac{R^4 \pi}{8}, \quad (6.62)$$

$$I_z^{fkör} = \frac{R^4 \pi}{8} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{R^2 \pi}{2} = R^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right), \quad (6.63)$$

$$I_{yz}^{fkör} = 0, \quad (6.64)$$

negyedkörök esetében pedig

$$I_y^{nkör} = \frac{R^4 \pi}{16} - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{R^2 \pi}{4} = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right), \quad (6.65)$$

$$I_z^{nkör} = I_y^{nkör}, \quad (6.66)$$

$$I_{yz}^{nkör} = 0 - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 \frac{R^2 \pi}{4} = -\frac{4R^4}{9\pi}. \quad (6.67)$$



### 6.5. példa: Határozzuk meg egy derékszögű háromszög súlyponti másodrendű nyomatékait!

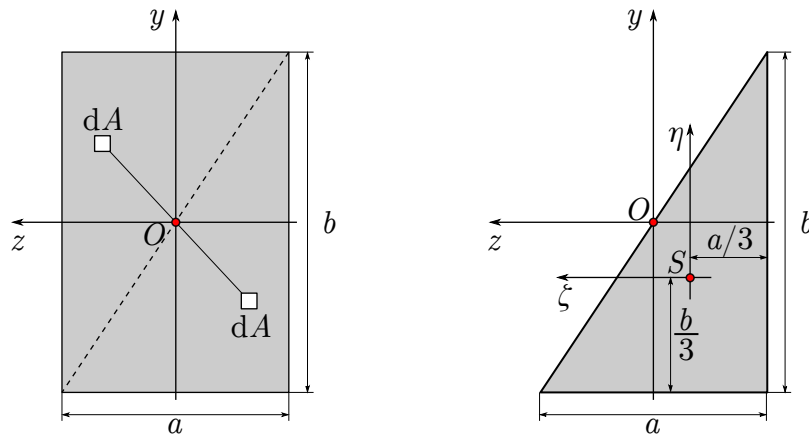
#### Megoldás:

Ebben az esetben is hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladatban. Egy  $a \times b$  méretű téglalap  $O$  súlypontjában felvett  $(y, z)$  koordináta-rendszerben

$$I_y^{tlap} = \frac{a^3 b}{12}, \quad I_z^{tlap} = \frac{ab^3}{12}, \quad I_{yz}^{tlap} = 0. \quad (6.68)$$

Vágjuk ketté a téglalapot az egyik átlója mentén! A feladat szimmetriájából következik, hogy minden  $dA$  felületelemhez található egy ugyanakkora elemi felület, ami az elvágott téglalap másik felébe esik, és aminek mind az  $y$ , mind a  $z$  koordinátája ellentétes előjelű, ahogy a 6.12. ábra mutatja. Ezek az elemi felületek ugyanolyan mértékben járulnak hozzá a tengelyre számított másodrendű nyomatékokhoz, mert  $z^2 dA = (-z)^2 dA$  és  $y^2 dA = (-y)^2 dA$ . Továbbá a tengelypárra számított másodrendű nyomatékban is ugyanakkora értékkel szerepelnek, mert  $yz dA = (-y)(-z) dA$ . Tehát a téglalap kettévágásával kapott derékszögű háromszög megfelelő másodrendű nyomatékai a téglalap másodrendű nyomatékainak felével lesznek egyenlőek:

$$I_y^{hszög} = \frac{a^3 b}{24}, \quad I_z^{hszög} = \frac{ab^3}{24}, \quad I_{yz}^{hszög} = 0. \quad (6.69)$$



**6.12. ábra.** Derékszögű háromszög másodrendű nyomatékainak számítása a téglalpra vonatkozó képletek felhasználásával

A derékszögű háromszög súlypontja  $a/3$  illetve  $b/3$  távolságra van a befogóktól, ezért

$$\mathbf{r}_{SO} = \begin{bmatrix} b/2 - b/3 \\ a/2 - a/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b/6 \\ a/6 \end{bmatrix}. \quad (6.70)$$

A súlyponti másodrendű nyomatékokat a Steiner-tétellel számíthatjuk ki:

$$I_{\eta}^{\text{háromszög}} = \frac{a^3 b}{24} - \frac{a^2}{36} \frac{ab}{2} = \frac{a^3 b}{36}, \quad (6.71)$$

$$I_{\zeta}^{\text{háromszög}} = \frac{b^3 a}{36}, \quad (6.72)$$

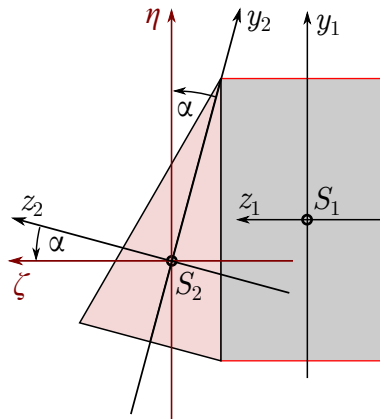
$$I_{\eta\zeta}^{\text{háromszög}} = 0 - \frac{ab}{36} \frac{ab}{2} = -\frac{a^2 b^2}{72}. \quad (6.73)$$



Tetszőleges háromszög másodrendű nyomatékait úgy határozhatjuk meg, hogy felosztjuk két derékszögű háromszögre, és alkalmazzuk a Steiner-tételt. Az eddigiekben vizsgált síkidomok súlyponti másodrendű nyomatékainak kifejezéseit a 8.7. ábrán foglaltuk össze, táblázatos formában.

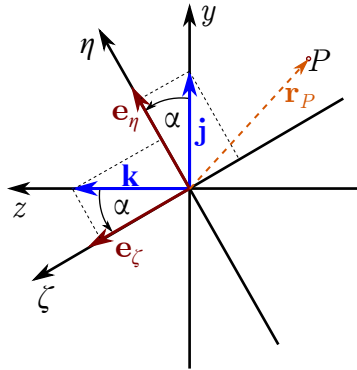
## 6.5. Másodrendű nyomatékok elforgatott tengelyek esetén

Előfordulhat, hogy a keresztmetszet két olyan szabályos részre bontható fel, melyek esetében különböző irányú tengelyekre állnak rendelkezésre a másodrendű nyomatékok értékei. Erre mutat példát a 6.13. ábra, melyen egy téglalpból és egy egyenlő szárú háromszögből összeállított síkidom látható. Ha a téglalap súlyponti másodrendű nyomatékai az  $(y_1, z_1)$  koordináta-rendszerben ismertek, a háromszögé pedig az  $(y_2, z_2)$  rendszerben (ahol az  $y_2$  tengely a háromszög szimmetriatengelye), akkor a Steiner-tétel alkalmazása *előtt* transzformálni kell a másodrendű nyomatékokat úgy, hogy a képletekben az egymásnak megfelelő tengelyek párhuzamosak legyenek. Ezt például úgy érhetjük el, hogy az  $y_2$  és  $z_2$  tengelyek



6.13. ábra. Egyszerű geometriájú darabokból összeállított keresztmetszet

helyett az azokhoz képest  $\alpha$  szöggel elforgatott – és az  $y_1$  illetve  $z_1$  tengelyekkel párhuzamos –  $(\eta, \zeta)$  koordináta-rendszerben adjuk meg a háromszög másodrendű nyomatékait.



6.14. ábra. Elforgatott tengelyek

Az ehhez hasonló feladatok általános megoldásának levezetéséhez tegyük fel, hogy ismeretek a másodrendű nyomatékok egy  $(y, z)$  koordináta-rendszerben, és szeretnénk ezek segítségével kifejezni a 6.14. ábrán vázolt,  $\alpha > 0$  szögű forgatás során kapott  $(\eta, \zeta)$  koordináta-rendszer tengelyeihez és tengelypárjához tartozó másodrendű nyomatékokat!

A transzformációhoz azt használjuk fel, hogy ha  $\mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$  az  $y$  illetve  $z$  tengely bázisvektorai, akkor bármilyen, az  $yz$  síkba eső  $P$  pont helyvektora  $\mathbf{r}_P = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  alakban adható meg. A transzformáció után ugyanezt a vektort  $\mathbf{r}_P = \eta\mathbf{e}_\eta + \zeta\mathbf{e}_\zeta$  alakban akarjuk megadni, az  $(\eta, \zeta)$  koordináta-rendszer bázisvektoraival. A feladat a  $P$  pont  $\eta$  és  $\zeta$  koordinátáinak meghatározása.

Ehhez az első lépésben fejezzük ki a  $\mathbf{j}$  és  $\mathbf{k}$  vektorokat az  $\mathbf{e}_\eta$  és  $\mathbf{e}_\zeta$  vektorokkal! A 6.14. ábráról leolvasható, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= \mathbf{e}_\eta \cos(\alpha) - \mathbf{e}_\zeta \sin(\alpha), \\ \mathbf{k} &= \mathbf{e}_\eta \sin(\alpha) + \mathbf{e}_\zeta \cos(\alpha).\end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{r}_P = y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = y(\mathbf{e}_\eta \cos(\alpha) - \mathbf{e}_\zeta \sin(\alpha)) + z(\mathbf{e}_\eta \sin(\alpha) + \mathbf{e}_\zeta \cos(\alpha)),$$

amiből

$$\mathbf{r}_P = (y \cos(\alpha) + z \sin(\alpha)) \mathbf{e}_\eta + (-y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha)) \mathbf{e}_\zeta \equiv \eta \mathbf{e}_\eta + \zeta \mathbf{e}_\zeta,$$

azaz

$$\begin{aligned} \eta &= y \cos(\alpha) + z \sin(\alpha), \\ \zeta &= -y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha). \end{aligned}$$

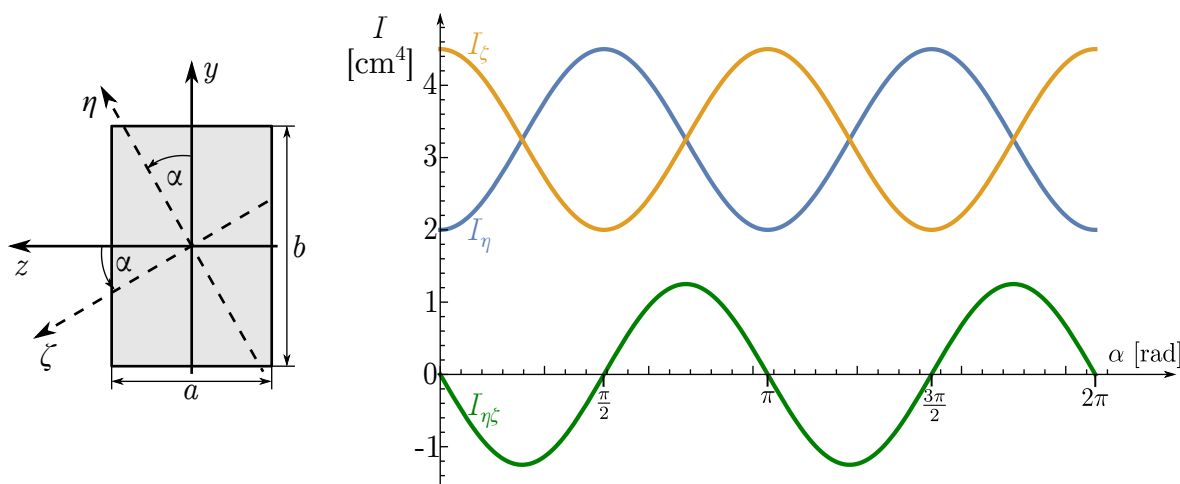
A tengelyre számított másodrendű nyomaték definícióját felhasználva

$$\begin{aligned} I_\eta &= \int_{(A)} \zeta^2 \, dA = \int_{(A)} y^2 \sin^2(\alpha) + z^2 \cos^2(\alpha) - 2yz \sin(\alpha) \cos(\alpha) \, dA = \\ &= \int_{(A)} z^2 \, dA \cos^2(\alpha) + \int_{(A)} y^2 \, dA \sin^2(\alpha) - 2 \int_{(A)} yz \, dA \sin(\alpha) \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Itt már felismerhető  $I_y$ ,  $I_z$  és  $I_{yz}$  kifejezése. Hasonlóképpen lehet meghatározni az  $I_\zeta$  és  $I_{\eta\zeta}$  másodrendű nyomatékok képletét is. Az eredmények a következőképpen foglalhatók össze:

$$\begin{aligned} I_\eta &= I_y \cos^2(\alpha) + I_z \sin^2(\alpha) - 2I_{yz} \sin(\alpha) \cos(\alpha), \\ I_\zeta &= I_y \sin^2(\alpha) + I_z \cos^2(\alpha) + 2I_{yz} \sin(\alpha) \cos(\alpha), \\ I_{\eta\zeta} &= (I_y - I_z) \frac{\sin(2\alpha)}{2} + I_{yz} \cos(2\alpha). \end{aligned} \quad (6.74)$$

Az  $\alpha$  szöget akkor tekintjük pozitívnak, ha az óramutató járásával ellentétes elforduláshoz tartozik. A 6.15. ábrán látható, hogy különféle szögek mellett hogyan változik egy téglalap keresztmetszet másodrendű nyomatékainak értéke.



**6.15. ábra.**  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 3 \text{ cm}$  méretű téglalap másodrendű nyomatékai az  $\alpha$  szög függvényében

A (6.74) képletekből számos következtetést vonhatunk le:

- A trigonometrikus függvények tulajdonságaiból következik, hogy  $I_\eta(\alpha) = I_\zeta(\alpha + \pi/2)$ , annak megfelelően, hogy az  $\eta$  és  $\zeta$  tengelyek minden  $\alpha$  szögnél merőlegesek egymásra.

- Ha az  $\alpha$  szöget 90 fokkal megváltoztatjuk, akkor a tengelypárra számított másodrendű nyomaték előjelet vált:  $I_{\eta\zeta}(\alpha) = -I_{\eta\zeta}(\alpha + \pi/2)$ .
- A tengelyre számított másodrendű nyomatékok szélsőértékeit (maximumait és minimumait) azoknál az  $\alpha$  szögeknél találhatjuk meg, ahol

$$\frac{dI_{\eta}}{d\alpha} = (I_z - I_y) \sin(2\alpha) - 2I_{yz} \cos(2\alpha) = 0, \quad \text{illetve} \quad (6.75)$$

$$\frac{dI_{\zeta}}{d\alpha} = -(I_z - I_y) \sin(2\alpha) + 2I_{yz} \cos(2\alpha) = 0. \quad (6.76)$$

Ez a két kifejezés ellentétes előjelű, tehát ha egy  $\alpha^*$  szögnél  $I_{\eta}$ -nak szélsőértéke van, akkor  $I_{\zeta}$ -nak is. Az is látható a deriváltak kifejezéseiből, hogy  $dI_{\zeta}/d\alpha = 2I_{\eta\zeta}$ . Tehát annál az  $\alpha^*$  szögnél, ahol a tengelyre számított  $I_{\eta}$  és  $I_{\zeta}$  nyomatékoknak szélsőértéke van, a tengelypárra számított másodrendű nyomaték éppen zérus. A 6.15. ábrán látható példában ez az  $\alpha = n\pi/2$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  értékeknél teljesül.

Hogy egy lehetséges  $\alpha^*$  szélsőérték helyen maximumát vagy minimumát veszi-e fel a függvény (vagy csak inflexiós pontja van), azt a második deriváltja alapján dönthetjük el: ha a második derivált negatív az  $\alpha^*$  helyen, akkor ott maximum van, ha pozitív, akkor pedig minimum. Mivel a  $dI_{\eta}/d\alpha$  és  $dI_{\zeta}/d\alpha$  első deriváltak ellentétes előjelűek, a függvények második deriváltjai is ellentétes előjelűek lesznek. Tehát ha  $\alpha^*$ -nál például  $I_{\eta}$ -nak maximuma van, akkor ott  $I_{\zeta}$  a minimumát veszi fel. Mivel a két tengely 90°-os forgatással átvihető egymásba, azaz  $I_{\eta}(\alpha^*) = I_{\zeta}(\alpha^* + \pi/2)$ , a maximumhoz és minimumhoz tartozó szögek között 90° az eltérés, és ugyanazt a maximumot veszi fel  $I_{\eta}$ , mint egy 90°-kal nagyobb szögnél  $I_{\zeta}$ .

- Azokat az  $\eta$  és  $\zeta$  tengelyeket, melyekre  $I_{\eta\zeta}(\alpha^*) = 0$ , *másodrendű nyomatéki fő tengelyeknek* nevezzük, a hozzájuk tartozó  $I_{\eta}(\alpha^*)$  és  $I_{\zeta}(\alpha^*)$  mennyiségeket pedig *fő másodrendű nyomatékoknak*. A szokásos jelölés szerint a nagyobb fő másodrendű nyomatékot  $I_1$ , a kisebbet pedig  $I_2$  jelöli. Ezek egyúttal a lehető legnagyobb illetve a lehető legkisebb értékű tengelyre számított másodrendű nyomatékok az adott keresztmetszetenél. A fő tengelyek által kijelölt irányokat *főirányoknak* szokták nevezni.

**6.38. megjegyzés:** A főirányoknak és a fő másodrendű nyomatékoknak elsősorban rudak hajlítása és kihajlása kapcsán van nagy jelentősége. Mivel  $I_2$  a keresztmetszet legkisebb másodrendű nyomatéka, az ennek megfelelő főirányban legkönnyebb elhajlítani a rudat, tehát az 1.49. ábrán bemutatott kihajlás is csak ilyen irányban történhet meg. Ha egy rúd valamelyik keresztmetszetében olyan hajlítónyomaték (lásd 5.3. fejezet) hat, amelynek iránya nem esik egybe egyik főiránnyal sem, akkor a kialakuló belső erőrendszer következtében a rúd egy ettől eltérő irányban fog meghajlani – tehát *nem arra hajlik, amerre hajlítjuk*. Ilyen esetet láthatunk a 6.4. ábrán, ahol a  $z$  tengely mentén nulla értékű a belső erők intenzitása, tehát e körül az ún. *zérustengely* körül fordul el a keresztmetszet is, ez adja meg, hogy a rúd merre hajlik. Azonban az ábrához kapcsolódó számítások szerint  $I_{yz} \neq 0$  mellett nemcsak  $z$ , hanem  $y$  irányú nyomaték is fellép. Következésképpen ekkor az eredő hajlítónyomaték irányát megadó egyenes – a *hajlítás tengelye*, azaz amerre a rudat hajlítjuk – nem lesz párhuzamos a  $z$  irányú zérustengellyel. ♣

- A tengelyre számított másodrendű nyomatékok összege állandó marad, minden  $\alpha$  szögnél a poláris másodrendű nyomatékkal lesz egyenlő:

$$\begin{aligned} I_{\eta} + I_{\zeta} &= I_y \cos^2(\alpha) + I_z \sin^2(\alpha) - 2I_{yz} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ &+ I_y \sin^2(\alpha) + I_z \cos^2(\alpha) + 2I_{yz} \sin(\alpha) \cos(\alpha) = I_y + I_z \equiv I_p. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Mivel ez a főirányokat megadó  $\alpha^*$  szögnél is igaz, a főmásodrendű nyomatékok összege is a poláris másodrendű nyomatékkal egyezik meg:

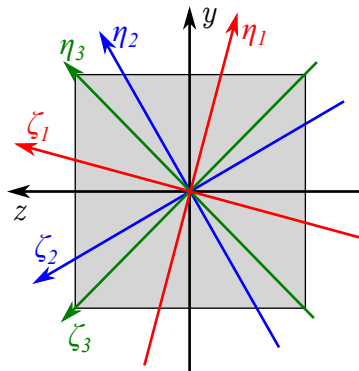
$$I_1 + I_2 = I_y + I_z = I_p. \quad (6.78)$$

- A 6.5. ábra kapcsán láttuk, hogy ha az egyik koordináta-tengely egyúttal szimmetria-tengely is, akkor  $I_{yz} = 0$ , és ebből következően  $I_y$  és  $I_z$  a két főmásodrendű nyomaték. Ha ezek nem egyeznek meg, például  $I_y = I_1 \neq I_2 = I_z$ , akkor a tengelyek elforgatásakor nullától különböző lesz a tengelypárra számított másodrendű nyomaték, ugyanis a (6.74) egyenlet szerint  $I_{yz} = 0$  miatt

$$I_{\eta\zeta} = (I_1 - I_2) \frac{\sin(2\alpha)}{2} + I_{yz} \cos(2\alpha) = (I_1 - I_2) \frac{\sin(2\alpha)}{2}. \quad (6.79)$$

Ha  $I_1$  és  $I_2$  megegyezik, akkor viszont a fenti egyenlet jobb oldala nulla lesz, azaz a másodrendű nyomaték minden szögnél nulla marad.

Tehát ha például egy keresztmetszetnek két, egymásra merőleges súlyponti szimmetriatengelye van, melyekre azonos a másodrendű nyomaték (kör, négyzet, szabályos hatszög, stb.), akkor annak minden súlyponti tengelyére ugyanakkora lesz a másodrendű nyomatéka, a tengelypárra számított nyomatékai pedig nullák lesznek a szimmetriából következően. A másodrendű nyomatéknak ezt a tulajdonságát a 6.16. ábrán illusztráljuk négyzet keresztmetszet esetére.



**6.16. ábra.** Egy négyzet alakú keresztmetszetnek minden súlyponti tengelyre ugyanakkora a másodrendű nyomatéka

A fentieket összefoglalva: ha  $I_{yz} = 0$  és  $I_y = I_z$ , akkor  $I_{\eta\zeta} = 0$  és  $I_{\eta} = I_{\zeta}$ , bármilyen  $\alpha$  szög mellett. Tehát ha egy keresztmetszet két főmásodrendű nyomatéka megegyezik, akkor annak a keresztmetszetnek minden súlyponti tengelye főtengely.

## 6.6. Főmásodrendű nyomatékok, főirányok

### 6.6.1. A főmásodrendű nyomatékok meghatározása Mohr-féle kör-diagrammal

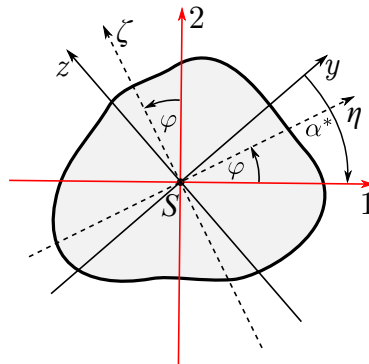
Ha adott egy  $(y, z)$  koordináta-rendszer, az  $I_y$ ,  $I_z$  és  $I_{yz}$  másodrendű nyomatékokkal, akkor szükség lehet arra, hogy ezek alapján meghatározzuk a főmásodrendű nyomatékokat és azt az  $\alpha^*$  szöveget, amivel az  $(y, z)$  koordináta-rendszer tengelyeit a főirányokkal párhuzamos irányokba forgathatjuk. Ennek módját a (6.74) egyenletek alapján határozhatjuk meg.

A számítások egyszerűsítése érdekében a 6.17. ábrán mutatott fordított gondolatmenetet alkalmazzuk: feltesszük, hogy már ismertek az 1 és 2 tengelyekkel adott főirányok a hozzájuk tartozó  $I_1$  és  $I_2$  másodrendű nyomatékokkal, és azt a  $\varphi = -\alpha^*$  szöveget keressük, amivel az 1-es tengelyt az  $y$  tengellyel párhuzamos irányba fordíthatjuk, és így visszacapjuk az  $(y, z)$  koordináta-rendszerben érvényes másodrendű nyomatékokat.

Ez a megközelítési mód azt jelenti, hogy a (6.74) egyenletekben végre kell hajtunk az

$$\alpha \rightarrow \varphi, \quad I_y \rightarrow I_1, \quad I_z \rightarrow I_2, \quad \text{és} \quad I_{yz} \rightarrow 0 \quad (6.80)$$

cseréket.  $I_{yz}$  helyett azért írhatunk nullát, mert a főirányok rendszeréből indulunk ki, ahol a tengelypárra számított másodrendű nyomaték nulla.



**6.17. ábra.** Az  $(1, 2)$  főirányokkal párhuzamos tengelyű koordináta-rendszert tetszőleges  $\varphi$  szöggel elforgatva kapjuk az  $(\eta, \zeta)$  koordináta-rendszert. Azt a  $\varphi = -\alpha^*$  szöveget keressük, amelynél az  $\eta$  tengely az ismert  $y$  tengellyel, a  $\zeta$  tengely pedig a szintén ismert  $z$  tengellyel esik egybe

Alkalmazva a

$$\sin^2(\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \quad \text{és} \quad \cos^2(\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \quad (6.81)$$

trigonometriai összefüggéseket, az alábbi, tetszőleges  $\varphi$  szögre érvényes egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} I_\eta &= I_1 \cos^2(\varphi) + I_2 \sin^2(\varphi) = \frac{I_1 + I_2}{2} + \frac{I_1 - I_2}{2} \cos(2\varphi), \\ I_\zeta &= I_1 \sin^2(\varphi) + I_2 \cos^2(\varphi) = \frac{I_1 + I_2}{2} - \frac{I_1 - I_2}{2} \cos(2\varphi), \\ I_{\eta\zeta} &= \frac{(I_1 - I_2)}{2} \sin(2\varphi). \end{aligned} \quad (6.82)$$



Figyelembe véve, hogy  $\sin^2(2\varphi) + \cos^2(2\varphi) = 1$ , a következő összefüggés írható fel  $I_\eta$  és  $I_{\eta\zeta}$  között:

$$\left(I_\eta - \frac{I_1 + I_2}{2}\right)^2 + I_{\eta\zeta}^2 = \left(\frac{I_1 - I_2}{2}\right)^2. \quad (6.83)$$

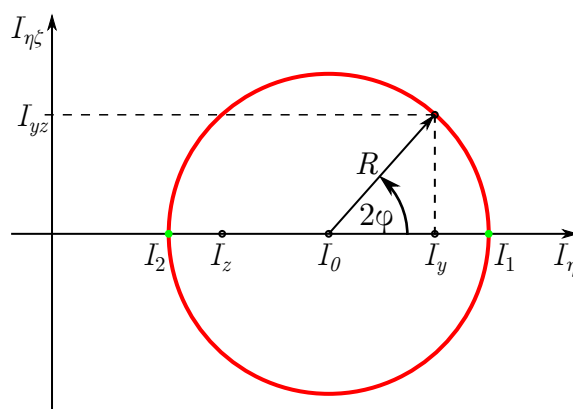
Ha  $I_\eta$ -t és  $I_{\eta\zeta}$ -t koordinátáknak tekintjük, akkor a fenti képlet egy olyan kör egyenletét írja le, melynek középpontja az

$$I_\eta = I_0 \equiv \frac{I_1 + I_2}{2} \quad \text{és} \quad I_{\eta\zeta} = 0 \quad (6.84)$$

koordinátáknál található, sugara pedig

$$R = \frac{I_1 - I_2}{2}. \quad (6.85)$$

Ezt a kört Mohr-körnek<sup>4</sup> nevezik, és egyenletéből leolvasható, hogy az  $I_\eta$  tengellyel vett



**6.18. ábra.** Egy Mohr-kör az  $(I_\eta, I_{\eta\zeta})$  koordináta-rendszerben,  $-45^\circ < \varphi < 45^\circ$  mellett, azaz amikor  $I_y > I_z$

metszéspontjai éppen az  $I_1$  és  $I_2$  főmásodrendű nyomatékokat jelölik ki, ahogy a 6.18. ábrán is látható. A (6.83) összefüggés szerint a koordináta-rendszer elforgatásával kapható, egymáshoz tartozó  $(I_\eta, I_{\eta\zeta})$  értékek a köríven helyezkednek el. A (6.82) egyenletekből pedig az derül ki, hogy a tengelyek  $\varphi$  szögű elforgatása  $2\varphi$  szögnek feleltethető meg a kör mentén, és az  $I_\eta$ ,  $I_\zeta$  értékek szimmetrikusan helyezkednek el a kör középpontjának két oldalán. A (6.78) összefüggésből is következik, hogy a kör középpontjának helyét megadó  $I_0$  érték

$$I_0 = \frac{I_1 + I_2}{2} = \frac{I_\eta + I_\zeta}{2} = \frac{I_p}{2}. \quad (6.86)$$

Valamilyen  $\varphi = -\alpha^*$  szögnél  $I_\eta = I_y$ ,  $I_\zeta = I_z$  és  $I_{\eta\zeta} = I_{yz}$ . Az  $(I_y, I_{yz})$  pontot bejelöltük a köríven a 6.18. ábrán. Az  $I_z$  érték az előbb említett szimetriatulajdonság miatt pontosan olyan távolságban helyezkedik el az  $I_0$  középponttól, mint  $I_y$ , de a másik oldalon.

Most térjünk vissza az eredeti feladathoz, mi szerint valójában  $I_y$ ,  $I_z$  és  $I_{yz}$  ismert, és ezekből az adatokból szeretnénk meghatározni a főmásodrendű nyomatékokat és a főirányokat! A fentiek alapján a kör középpontjának helye

$$I_0 = \frac{I_y + I_z}{2}, \quad (6.87)$$

<sup>4</sup>Christian Otto Mohr (1835-1918)

sugara pedig a 6.18. ábráról leolvasható módon

$$R = \sqrt{(I_y - I_0)^2 + I_{yz}^2} = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}. \quad (6.88)$$

A főmásodrendű nyomatékok:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 + R = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}, \\ I_2 &= I_0 - R = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}, \end{aligned} \quad (6.89)$$

a  $\varphi$  elforgatási szög tangense pedig

$$\tan(2\varphi) = \frac{I_{yz}}{I_y - I_0}. \quad (6.90)$$

Figyelembe véve  $I_0$  kifejezését, valamint azt, hogy az  $(y, z)$  koordináta-rendszert éppen a  $\varphi = -\alpha^*$  szöggel *ellentétesen* kell elforgatni, hogy az  $y$  tengely az 1-es tengellyel legyen párhuzamos, az  $y$  tengelyt az 1-es tengelybe vivő szög kétszeresének tangense

$$\tan(2\alpha^*) = -\frac{I_{yz}}{I_y - I_0} = -\frac{I_{yz}}{(I_y - I_z)/2} = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}. \quad (6.91)$$

### 6.6.2. Főmásodrendű nyomatékok sajátérték-sajátvektor számítás-sal

A másodrendű nyomatékok az alábbi mátrixba (lásd 8.1. definíció) rendezhetők:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_y & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}. \quad (6.92)$$

**6.39. megjegyzés:** A másodrendű nyomatékok mátrixának mellékátlójában szereplő  $I_{yz}$  tagok negatív előjellel szerepelnek. Ez arra vezethető vissza [7], hogy a (6.21) és (6.23) egyenletek szerint egy  $y$  irányban  $m$  meredekséggel lineárisan változó,  $p = my$  intenzitású párhuzamos erőrendszert jellemző nyomatékvektor  $\mathbf{M} = m[I_{yz} \quad -I_z]^T$ . Ilyen nyomaték akkor ébred egy egyensúlyban lévő rúd valamely keresztmetszetében a belső megoszló erők miatt, amikor ezzel ellentétes külső nyomaték hat a rúdra.

A  $p = my$  megoszló terhelés esetén a  $z$  tengely (ahol  $y = 0$ ) a zérustengely (lásd 6.38. megjegyzés), ott nulla a megoszló terhelés intenzitása. Ha a másodrendű nyomatékok mátrixát megszorozzuk a  $[0 \ 1]^T$  iránnyal – a  $z$  zérustengely egységvektorával –, akkor a  $[-I_{yz} \ I_z]^T$  vektort kapjuk, ami éppen ellentétes irányítású, mint a belső erőrendszert jellemző  $\mathbf{M}$  nyomaték. A másodrendű nyomatékok mátrixával tehát azt lehet kiszámolni, hogy milyen irányú külső nyomatéknak kell hatnia egy adott zérustengellyel jellemezhető belső erőrendszer kialakításához. ♣

Ha a másodrendű nyomatékokat a főirányok koordináta-rendszerében fejezzük ki, akkor a főátlón kívüli elemek – a tengelypárra számított másodrendű nyomatékok – definíció szerint nullává válnak. Az ily módon kapott diagonális mátrix főátlójában a mátrix sajátértékei jelennek meg.

**6.40. megjegyzés:** Ha egy itt tárgyalthoz hasonló valós szimmetrikus  $\mathbf{I}$  mátrixszal megszorunk egy  $\mathbf{v}$  vektort, akkor az eredményül kapott vektor általában más irányú és nagyságú lesz. Azonban található olyan irányok – ezeket adják meg az  $\mathbf{e}_1$  és  $\mathbf{e}_2$  sajátvektorok –, hogy az azokkal párhuzamos vektorok nem változtatják meg az irányukat a mátrixszal való szorzás hatására sem, tehát

$$\mathbf{I}\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1, \quad \text{és} \quad \mathbf{I}\mathbf{e}_2 = \lambda_2\mathbf{e}_2. \quad (6.93)$$

A sajátvektorokkal párhuzamos vektoroknak csak a hossza változik meg, ezt a hosszváltozást jellemzik a  $\lambda_{1,2}$ -vel jelölt sajátértékek. ♣

A fentiekből következően a másodrendű nyomatékok mátrixának sajátértékei megegyeznek a *főmásodrendű nyomatékokkal*, sajátvektorai pedig a főtengelyekkel párhuzamos *főirányokat* adják meg. Másképp fogalmazva, a sajátvektorok által definiált koordináta-rendszerben diagonális lesz a másodrendű nyomatékok mátrixa, azaz eltűnnek a tengelypárra számított másodrendű nyomatékok. Matematikából ismert, hogy egy valós szimmetrikus mátrix sajátvektorai mindig merőlegesek egymásra, sajátértékei pedig valósak. Ebből következik, hogy minden keresztmetszet esetében megtalálhatók a főmásodrendű nyomatékok és főirányok.

A  $\lambda$  sajátértékek és az  $\mathbf{e}$  sajátvektorok kiszámítása az alábbi egyenlet alapján tehető meg:

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad (6.94)$$

ahol  $\mathbf{E}$  az egységmátrix, aminek a főátlójában 1-esek vannak, a többi eleme pedig nulla. A (6.94) képlet egy lineáris egyenletrendszer ad meg, aminek csak akkor van nemtriviális ( $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ ) megoldása, ha az alábbi, ún. *karakterisztikus egyenlet* teljesül:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{E}) = 0. \quad (6.95)$$

Itt tehát azt kell tennünk, hogy a mátrix főátlójában lévő elemekből kivonjuk az ismeretlen  $\lambda$  értékeket, és meghatározzuk az így kapott mátrix determinánsát. Mivel  $\lambda$  ismeretlen, a determináns kifejtése egy polinomra vezet, mely ebben az esetben másodfokú. A karakterisztikus egyenlet  $\lambda$  változóra kapott gyökei a főmásodrendű nyomatékok:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2}}{2}, \quad (6.96)$$

ami megfelel a (6.89) egyenletnek.

A főmásodrendű nyomatékok visszahelyettesítésével kiszámíthatók az  $\mathbf{e}_1$  és  $\mathbf{e}_2$  sajátvektorok, amik a főirányokat adják meg. Ha egy  $\mathbf{e}$  sajátvektor teljesíti a (6.94) egyenletet, akkor annak bármilyen konstansszorosa is megoldás. Az egyértelműség kedvéért általában egységnyi hosszúságúra normálják a sajátvektorokat. Ha az  $y$  tengelytől az 1-es főirány felé felmért szög  $\alpha$ , akkor az  $(y, z)$  koordináta-rendszerben az egységnyi hosszú  $\mathbf{e}_1$  sajátvektor kifejezhető az alábbi alakban:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (6.97)$$

Visszahelyettesítve ezt a (6.94) képletbe:

$$\begin{bmatrix} I_y - I_1 & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z - I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.98)$$

A fenti szorzatot kifejtve,

$$(I_y - I_1) \cos(\alpha) - I_{yz} \sin(\alpha) = 0, \quad (6.99)$$

$$-I_{yz} \cos(\alpha)(I_z - I_1) \sin(\alpha) = 0. \quad (6.100)$$

Az első egyenlet szerint az 1-es főirány és az  $y$  tengely által bezárt szög

$$\tan(\alpha_{1,y}) = \frac{I_y - I_1}{I_{yz}}. \quad (6.101)$$

Ebből meghatározható az  $\mathbf{e}_1$  sajátvektor két skalárkomponense. A (6.92) mátrix szimmetrikus, ezért a két sajátvektor merőleges egymásra, így  $\mathbf{e}_2$  skalárkomponensei is könnyen számíthatók.

**6.41. megjegyzés:** A (6.101) egyenlettel megadott  $\alpha_{1,y}$  szögnek meg kell egyeznie a Mohr-körös számítás alapján kifejezett  $\alpha^*$  szöggel, amire a (6.91) képlet szerint az teljesül, hogy

$$\tan(2\alpha^*) = -\frac{I_{yz}}{I_y - I_0} \equiv -\frac{I_{yz}}{(I_y - I_z)/2} \equiv -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}.$$

A két szög egyezésének belátásához az alábbi trigonometriai összefüggést használhatjuk fel:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}. \quad (6.102)$$

Ide behelyettesítve a (6.101) kifejezést, azt kapjuk, hogy

$$\tan(2\alpha_{1,y}) = \frac{2I_{yz}(I_1 - I_y)}{I_1^2 - 2I_1I_y + I_y^2 - I_{yz}^2}. \quad (6.103)$$

Felhasználva, hogy  $I_1$  kifejezhető (6.96) alapján, ez a képlet is átírható

$$\tan(2\alpha_{1,y}) = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

alakba, azaz a szögre kapott képletek valóban megegyeznek. ♣

**6.6. példa:** Határozzuk meg a 6.19. ábrán látható téglalap főmásodrendű nyomatékait!

Adatok:  $a = 20$  mm,  $b = 30$  mm,  $\alpha = 30^\circ$ .

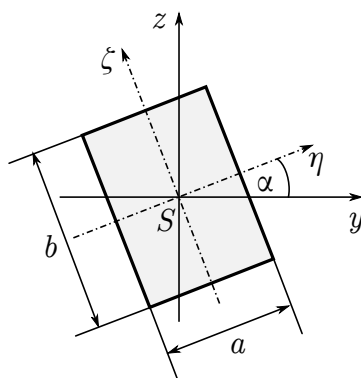
**Megoldás:**

Egy szimmetrikus síkidom főirányait a szimmetriatengelyek határozzák meg. Tehát ebben az esetben nincs szükség bonyolult számításokra:

$$I_1 \equiv I_\eta = \frac{b^3a}{12} = 45000 \text{ mm}^4, \quad I_2 \equiv I_\zeta = \frac{a^3b}{12} = 20000 \text{ mm}^4, \quad I_{\eta\zeta} = 0. \quad (6.104)$$

Gyakorlásképpen határozzuk meg az  $y$  és  $z$  tengelyekre, továbbá az  $yz$  tengelypárra számított másodrendű nyomatékokat is! Ehhez a feladat jelöléseinek megfelelően végre kell hajtani az  $y \leftrightarrow \eta$  és  $z \leftrightarrow \zeta$  helyettesítéseket a (6.74) egyenletekben, és figyelembe kell venni, hogy most az óramutató irányával ellentétes forgatást kell végezni:

$$\begin{aligned} I_y &= I_\eta \cos^2(-\alpha) + I_\zeta \sin^2(-\alpha) = 38750 \text{ mm}^4, \\ I_z &= I_\eta \sin^2(-\alpha) + I_\zeta \cos^2(-\alpha) = 26250 \text{ mm}^4, \\ I_{yz} &= (I_\eta - I_\zeta) \frac{\sin(-2\alpha)}{2} = -6250\sqrt{3} \text{ mm}^4 \approx -10825,3 \text{ mm}^4. \end{aligned} \quad (6.105)$$



6.19. ábra. Téglalap főmásodrendű nyomatékainak számítása

A másodrendű nyomatékok mátrixa

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 38750 & 6250\sqrt{3} \\ 6250\sqrt{3} & 26250 \end{bmatrix} \text{ mm}^4. \quad (6.106)$$

Ellenőrizhető, hogy ennek a mátrixnak a sajátértékei megegyeznek a korábban kiszámolt főmásodrendű nyomatékokkal, azaz  $I_1 = 45000 \text{ mm}^4$  és  $I_2 = 20000 \text{ mm}^4$ , továbbá

$$\tan(\alpha_{1,y}) = \frac{I_y - I_1}{I_{yz}} \Rightarrow \alpha_{1,y} = 30^\circ. \quad (6.107)$$





## 7. fejezet

# Feltételes kényszerek: tapadási súrlódás

### 7.1. A feltételes kényszerek értelmezése

Az 1.7. fejezetben úgy definiáltuk a kényszereket, hogy azok előírt feltételek, melyek korlátozásokat jelentenek a mozgásokra nézve (1.11. definíció). Az eddigiekben többnyire úgy tekintettük, hogy a kényszerfeltételek minden körülmények között teljesülnek, például egy rúd csuklóval rögzített pontja bármilyen terhelés mellett helyben marad. Azonban találkoztunk olyan esetekkel is, amikor a kényszerfeltétel csak bizonyos megkötések mellett teljesült: például a *kötél* csak abban az esetben biztosítja két pont távolságának az állandóságát, ha húzott, az *egyoldalú (unilaterális) támasz* pedig megakadályozza két test egymásba hatolását, de lehetővé teszi a testek elválását. Az ilyen kényszereket *feltételes kényszereknek* nevezzük.

A valóságban minden kényszer csak bizonyos közelítésekkel teljesül – gondoljunk például arra, hogy a kényszereket elvileg biztosító testek a gyakorlatban deformálódnak a terhelések hatására. Ezeket a deformációkat általában elhanyagolhatónak tekintjük a modellezés során. Az előbb említett kötélen azonban nem arról van szó, hogy nem elég pontosan teljesül a kényszerfeltétel: élesen elkülöníthetők azok az esetek amikor a kényszerfeltétel jó közelítéssel teljesül ( $N \geq 0$ , húzás), és azok az esetek, amikor nem ( $N < 0$ , nyomás). Sőt, egy valóságos kötélen nem tud elviselni bármekkora húzóigénybevételt sem, mert túlságosan nagy erő mellett elszakad. Ehhez hasonlóan, a többi kényszer teljesülését is korlátozza, hogy nagy terhelések mellett tönkremenetel következhet be. Az eddigiekben tárgyalt kényszerek esetében hallgatólagosan mindig kizártuk a tönkremenetel bekövetkezését.

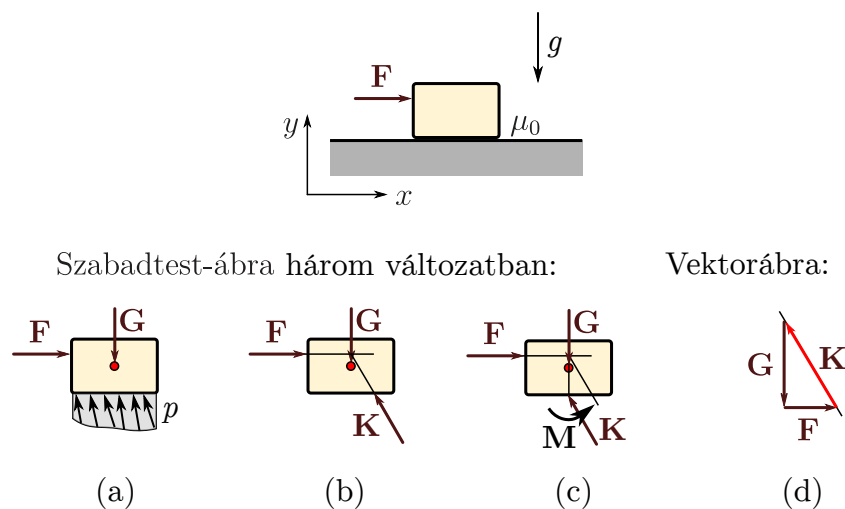
Annak a feltételét magától értetődő megállapítani, hogy két érintkező test mikor válik el egymástól, vagy egy kötélen mikor lazul meg: a támaszerő vagy kötélerő zérus értékénél. A tönkremenetel feltételét ezzel szemben csak részletes szilárdságtani számítások alapján lehet meghatározni, ami a statika tárgykörén kívül esik. Azonban van egy olyan jelenségcsoport, ahol a kényszerfeltétel érvényességi körének meghatározása nem triviális, de statikai számításokkal is lehetséges: ez a *súrlódásos kapcsolatok* esete.

## 7.2. A Coulomb-súrlódás alapmodellje

Az 1.7.2. fejezetben tárgyalt *támasz* kapcsán megállapítottuk, hogy két test érintkezésekor mindenképpen fellép olyan kényszererő komponens, ami meggátolja az érintkező felületek egymásba hatolását, és ez az erő *merőleges a felületek érintősíkjára*. A valóságban mindig fellép emellett *a felületekkel párhuzamos irányú súrlódási erő* is, amit például egy szekrény eltolása során a hétköznapokban is tapasztalhatunk.

A súrlódásként figyelembe vett jelenségcsoport hátterében nagyon bonyolult kölcsönhatások, fizikai jelenségek állnak. A mechanikai kölcsönhatások mellett (például egymásba akadó felületi egyenetlenségek) a hőmérséklet, az ún. van der Waals-erővel kapcsolatba hozható adhézió, a kopás, a lekopott részecskék gördülése a két test között, a felületeken található folyadékréteg (például lecsapódott pára), valamint különféle kémiai reakciók (pl. rozsdásodás) is befolyásolhatják a súrlódási erő nagyságát. Ennek megfelelően számos modellt vezettek be a súrlódásos jelenségek leírására, melyek közül az ún. Coulomb-féle súrlódási modell<sup>1</sup> az egyik legegyszerűbb, és ezt használják a leggyakrabban a gyakorlatban.

A Coulomb-súrlódás alapmodellje látható a 7.1. ábrán: egy vízszintes felületre helyezett hasáb, melyre  $F$  nagyságú, az érintkező felületekkel párhuzamos erő hat.



7.1. ábra. A Coulomb-súrlódás alapmodellje

A modell szerint a talajról a hasábra egy ismeretlen  $p$  intenzitású, felületen megoszló erő hat (7.1/a ábra), melyet síkbeli modellünkben helyettesíthetünk egy  $\mathbf{K}$  erővel<sup>2</sup> (7.1/b ábra).

Statikában az egyensúly feltételeit vizsgáljuk, azaz az ún. *tapadási* vagy *nyugvászeli súrlódással* foglalkozunk, tehát nem tárgyaljuk részletesen a csúszási vagy mozgásbeli súrlódás témakörét (lásd ?? megjegyzés). A hasábra ható három darab, egy síkba eső koncentrált erő ( $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$  és  $\mathbf{F}$ ) csak akkor lehet egyensúlyban, ha hatásvonalai egy pontban metszik egymást, és vektorháromszögük záródik. Ezeket a követelményeket figyelembe véve, az egyensúly fenntartásához szükséges  $\mathbf{K}$  erő vektora megszerkeszthető, ahogy a 7.1/d ábrán látható.

Egyensúlyban a  $\mathbf{K}$  erő kényszererő, hiszen kis  $\mathbf{F}$  erők mellett az aktív erőkhöz alkalmazkodva úgy változtatja irányát, nagyságát és hatásvonalát, hogy az egyensúly fennmaradjon.

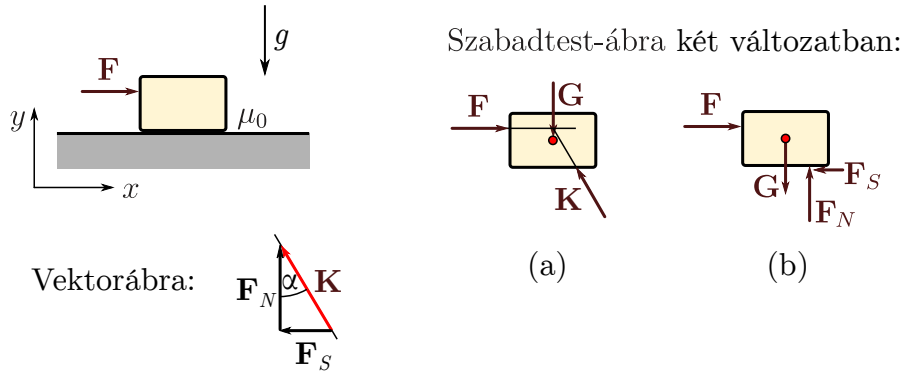
<sup>1</sup>Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)

<sup>2</sup>A  $\mathbf{K}$  jelölés az érintkezésre, azaz a *kontaktra* utal.



Tehát ilyen, *kiterjedt felületen történő érintkezés mellett gyakorlatilag befogásnak tekinthető a súrlódásos kapcsolat*: a berajzolt  $\mathbf{K}$  erő a 7.1/c ábra szerint helyettesíthető egy megfelelő  $\mathbf{M}$  nyomatékú erőpárral, és egy olyan  $\mathbf{K}$  erővektorral, ami az érintkező felület súlypontjában hat.

A kényszererőt célszerű felbontani egy felületre merőleges  $\mathbf{F}_N$  *normálerő* és egy felülettel párhuzamos  $\mathbf{F}_S$  *tapadási súrlódási erő* összegére, ahogy a 7.2. ábrán látható. E két



**7.2. ábra.** A  $\mathbf{K}$  kényszererő felbontása egy felületre merőleges  $\mathbf{F}_N$  normálerő és egy felülettel párhuzamos  $\mathbf{F}_S$  súrlódási erő összegére

komponens elkülönítését nemcsak az érintkezés síkjához képest felvett, különböző irányuk indokolja, hanem az is, hogy más fizikai folyamatok állnak e két erő megjelenésének hátterében. A hasábra felírható *erőegyensúlyi egyenletek* alapján mindkét komponens nagysága megállapítható:

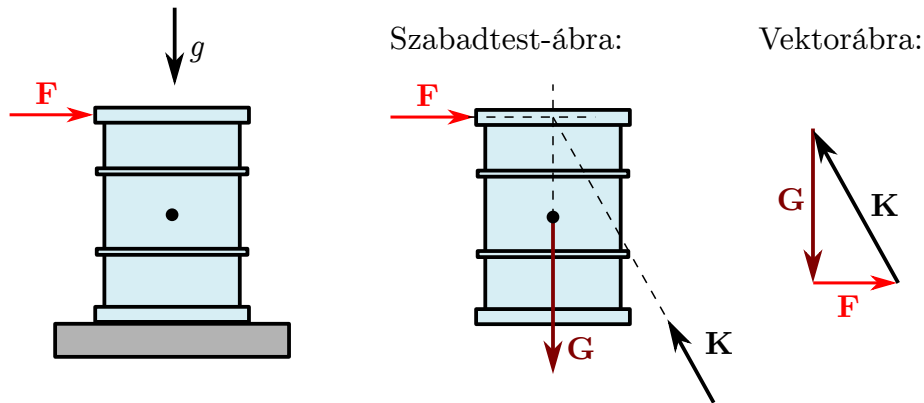
$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 : \quad F - F_S = 0 &\Rightarrow F_S = F, \\ \sum F_y = 0 : \quad F_N - G = 0 &\Rightarrow F_N = G. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Az egyenletekből látszik, hogy a  $\mathbf{K}$  erő két komponense két különböző kényszererőként kezelhető, melyek közül az  $\mathbf{F}_N$  normálerő az érintkezés síkjára merőleges, az  $\mathbf{F}_S$  súrlódási erő pedig az azzal párhuzamos mozgást gátolja meg – azaz az olyan irányú aktív erőkkel tart egyensúlyt. Ez a két erő egymástól független, hiszen tapadás során a súrlódási erő nagysága az egyensúly feltételétől (itt az  $\mathbf{F}$  erő nagyságától) függően végtelen sokféle értéket vehet fel, ugyanúgy, mint a  $\mathbf{G}$  értékétől függő normálerő. A nyomatéki egyensúlyi egyenletet az erők hatásvonalainak ismeretében írhatnánk fel. Feltevéseink szerint a a talajról átadódó normálerőből és súrlódási erőből előálló  $\mathbf{K}$  kontakterő hatásvonala és támadáspontja olyan helyzetet vesz fel, hogy a nyomatéki egyensúly teljesüljön.

A hétköznapi tapasztalatok azonban azt mutatják, hogy a tárgyalt példához hasonló esetekben nem állhat fenn az egyensúly tetszőleges körülmények mellett. A  $\mathbf{G}$  nehézségi erő növelésének határait az alátámasztásként szolgáló test szilárdsági vizsgálatával lehet megállapítani, ami jelenlegi tárgykörünkön kívül esik. Az  $\mathbf{F}$  erő növelése során viszont úgy sérülhetnek az egyensúly feltételei, hogy két szóba jöhető egyensúlyvesztési esetet a statika keretében is tudunk vizsgálni:

- Az első esetben az erők egyensúlya teljesül a (7.1) egyenletek szerint, azonban a *nyomatéki egyensúly sérül*. Ez akkor következhet be, ha az *alátámasztási felületen kívül*

*kellene hatnia a kényszererőnek ahhoz, hogy a nyomatéki egyensúly teljesüljön. Például ha a talajtól elég távol hat az  $\mathbf{F}$  erő és kicsi az alátámasztási felület, akkor a test felborulhat (7.3. ábra).*



**7.3. ábra.** Ha a szükséges kényszererő támadáspontja az alátámasztási felületen kívülre kerül, akkor az egyensúly nem állhat fenn

Tehát a korábbi megállapításainkat pontosítva azt mondhatjuk, hogy akkor modellezhető a súrlódásos kapcsolat befogásként, amikor *kiterjedt felületen* történik az érintkezés, és a merev test *felborulása kizárható*. Ebben az esetben általában eltekinthetünk a nyomatéki egyensúly vizsgálatától, mert azt ilyenkor az biztosítja, hogy a felületen megoszló erő eredőjének hatásvonalja eltolódik. A nyomatéki egyensúlyi egyenletből ezt az eltolódást tudnánk kiszámítani, ami merev hasábok esetében általában lényegtelen. Más a helyzet, ha egy deformálható rúd befogásánál ébredő reakciónyomatékot kell számításba venni: ekkor a reakciónyomaték lényegesen befolyásolja az igénybevételeket, és nem hagyható figyelmen kívül a méretezés során. Szintén más szituáció az, amikor kis felületen érintkező testek között léphet fel súrlódási erő: ekkor a kényszererő hatásvonalja nem tolódhat el számottevő mértékben, így elhanyagolható nyomatékot rendelhetünk hozzá. Az ilyen, *pontszerű* súrlódásos érintkezéseket (melyekről a 7.3. fejezetben lesz szó) inkább *csuklóként* modellezhetjük. Ekkor a nyomatéki egyenlet az érintkezési ponttól távol ébredő erők hatását foglalja magában, így érdemi információkat nyújt azok nagyságáról.

- Az egyensúly feltételeinek sérülése abból is eredhet, hogy a tapadási súrlódási erő fizikai korlátok miatt nem vehet fel akármekkora értéket: az ún. Amontons-törvény<sup>3</sup> szerint

$$|F_S| \leq \mu_0 |F_N|, \quad (7.2)$$

ahol  $\mu_0$  (mű null) a *tapadási súrlódási tényező*. Tehát ha a 7.2. ábrán szereplő példában az  $F$  erő nagysága túllépi az  $F_{S\max} = \mu_0 |F_N|$  értéket, azaz  $F > F_{S\max}$ , akkor *az erők egyensúlya nem teljesülhet, ezért a hasáb megcsúszik*.

A súrlódási tényező a két test érintkezésénél fellépő fizikai és kémiai folyamatok összességét, azaz a súrlódásos kapcsolatot jellemzi, tehát *nem anyagjellemző*. Az intuícióval

<sup>3</sup>Guillaume Amontons (1663-1705)

ellentétben csak csekély mértékben függ az érintkező felületek érdességétől (lásd 1.15. megjegyzés). Mivel az érintkező felületek tulajdonságai befolyásolják, drasztikusan megváltozhat a súrlódási tényező értéke, ha valamilyen anyag (például pára, zsír, olaj, stb.) jut be a felületek közé. Úgy is tekinthetjük, hogy ez egy környezettől függő arányossági tényező a súrlódási erő maximuma és a normálerő között. Ha értéke állandó, akkor beszélhetünk Coulomb-modellről.

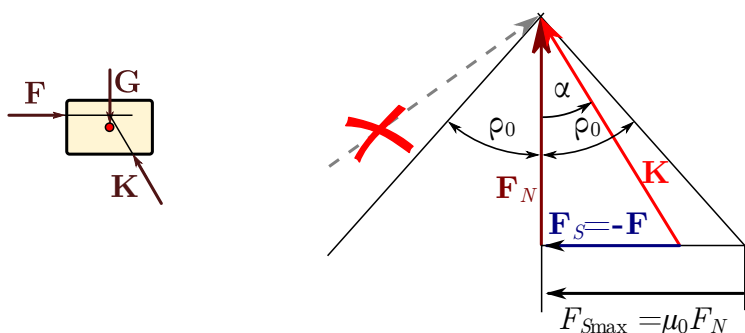
Ha egy feladatban több érintkező felület is van, melyeket eltérő tapadási súrlódási tényezők jellemeznek, akkor statikában a  $\mu_0$  jelölés helyett szokásos a  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , stb. jelölés használata is.<sup>4</sup>

**7.42. megjegyzés:** A (7.3) egyenletben szembeűnő, hogy a súrlódási erő maximális értéke *nem függ az érintkező felületek nagyságától*. Mivel a súrlódás a két érintkező felület közötti kölcsönhatásokkal kapcsolatos, azt várnánk, hogy az érintkező felületek nagysága nem közömbös ebből a szempontból. Ennek a paradoxonnak az a feloldása, hogy a testek felszíne nem tökéletesen sima, ezért a látszólagosan érintkező felületeknek csak egy kis része érintkezik a valóságban. Minél nagyobb a testeket összeszorító erő, annál inkább kisimulnak az egyenetlenségek, és így megnő a valóságos érintkező felület is. Megmutatható, hogy a valóságos érintkező felület nagysága jó közelítéssel arányos az  $F_N$  normálerővel, tehát a (7.3) képlet szerint a súrlódási erő lehetséges maximális értéke a *ténylegesen érintkező* felület nagyságával arányos. ♣

Nagyon fontos kiemelni, hogy a tapadási súrlódási erő nagyságát *az egyensúlyi egyenletek* alapján lehet meghatározni – mint minden kényszererő esetében. Az

$$F_{S\max} = \mu_0 |F_N| \quad (7.3)$$

érték a tapadási súrlódási erő *lehetséges maximumát* adja meg, azaz azt az értéket, ami a tapadás és a megcsúszás határát jelenti. Tehát a (7.3) képlet csak a *megcsúszás határhelyzetének* meghatározására használható, *általában nem  $\mu_0 |F_N|$  a tapadási súrlódási erő nagysága!*



**7.4. ábra.** A tapadási súrlódási erő egy határig biztosítja az érintkező felületekkel párhuzamos irányban az erők egyensúlyát. Legnagyobb lehetséges értéke  $F_{S\max}$

<sup>4</sup>Dinamikai feladatokban szükség lehet a  $\mu_0$ -lal jelölt tapadási és  $\mu$ -vel jelölt csúszási súrlódási tényezők megkülönböztetésére, ezért ilyenkor például  $\mu_{01}$ ,  $\mu_{02}$ , stb. jelölheti a különböző felületekhez tartozó tapadási,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , stb. pedig a csúszási súrlódási tényezőket.

A 7.4. ábra szerint a tapadási súrlódási erő maximális értéke és a normálerő közötti összefüggés felírható a  $\mathbf{K}$  kényszererő és normálerő iránya közötti  $\rho_0$  szög tangensével kifejezve:

$$\tan(\rho_0) = \frac{F_{S\max}}{|F_N|} = \frac{\mu_0 |F_N|}{|F_N|} = \mu_0. \quad (7.4)$$

A *ténylegesen megvalósuló* súrlódási erők esetében a normálerő és a  $\mathbf{K}$  kontakterő hatásvonala által bezárt  $\alpha$  szög ennél kisebb (7.4. ábra), ezért:

$$\tan(\alpha) = \frac{|F_S|}{|F_N|} \leq \tan \rho_0. \quad (7.5)$$

Tehát az egyensúly feltétele úgy is megfogalmazható, hogy

$$\frac{|F_S|}{|F_N|} \leq \mu_0. \quad (7.6)$$

Ha az  $\mathbf{F}$  erő az ábrán szereplőhöz képest ellenkező értelmű lenne, akkor egyensúlyban természetesen a súrlódási erő vektora is ellenkezőjére változna, de maximális értékére továbbra is érvényes maradna a (7.3) összefüggés. Tehát figyelembe véve a (7.4) egyenletet, arra jutunk, hogy a vizsgált síkbeli esetben a  $\mathbf{K}$  kényszererő hatásvonalának iránya a  $-\rho_0 \leq \alpha \leq \rho_0$  szögtartományban változhat a normálerő irányához képest. Ennél nagyobb szögben álló kényszererőt nem tud biztosítani a súrlódásos kényszerkapcsolat (lásd a szaggatott vonallal berajzolt vektort a 7.4. ábrán).

A fenti gondolatmenetet akkor is igaz marad, ha az  $\mathbf{F}$  erő tetszőleges irányból, de továbbra is a felülettel párhuzamosan hat a hasábra. Bármilyen is az  $\mathbf{F}$  erő iránya, egyensúlyban az  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  és  $\mathbf{K}$  vektoroknak egy síkba kell esniük, ezért a súrlódási erő maximumát és a  $\mathbf{K}$  kényszererő hatásvonalát is ugyanúgy kell meghatározni, mint az előzőekben vizsgált síkbeli esetben. Ha az összes lehetséges irányban felrajzoljuk a  $\mathbf{K}$  erő határhelyzetét, akkor egy kúpot – az ún. *súrlódási kúpot* – kapunk, melynek félkúpszöge  $\rho_0$  (7.5. ábra). Ezért a  $\rho_0$  szöget *súrlódási félkúpszögnek* nevezik. A  $\mathbf{K}$  kényszererő hatásvonalának ezen a kúpon belül kell elhelyezkednie.

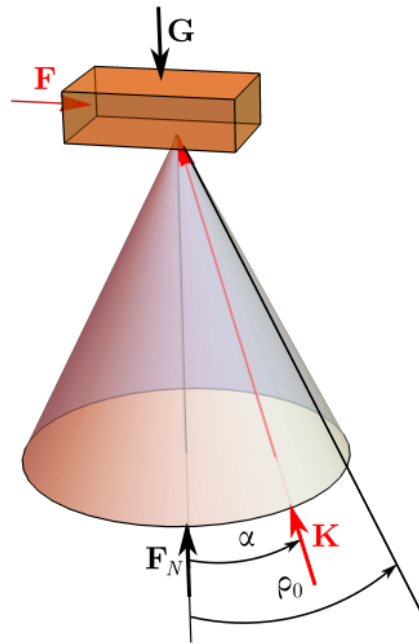
Fontos kiemelni, hogy a normálerő nagysága csak egy vízszintes felületre helyezett, vízszintes irányú  $\mathbf{F}$  erő hatása alatt álló hasáb esetében egyezik meg a nehézségi erő nagyságával, azaz *általában ettől eltérő az értéke*. Például a 7.6. ábrán látható,  $\varphi$  szögű lejtőre helyezett hasáb esetében az egyensúlyi egyenletek alapján az alábbi kifejezéseket kapjuk a talajról átadódó erő komponenseinek nagyságaira:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 : \quad F_S - G \sin(\varphi) = 0 &\Rightarrow F_S = G \sin(\varphi), \\ \sum F_y = 0 : \quad F_N - G \cos(\varphi) = 0 &\Rightarrow F_N = G \cos(\varphi). \end{aligned} \quad (7.7)$$

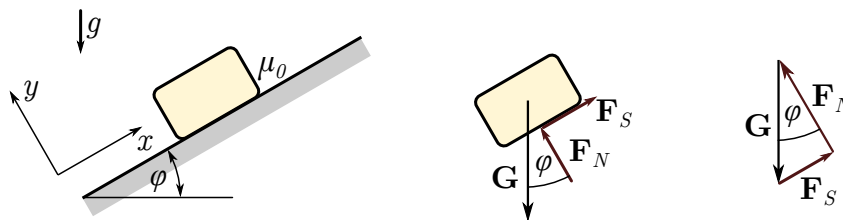
Figyelembe véve az egyensúly feltételét a (7.6) egyenlet alapján, ebben az esetben azt kapjuk, hogy

$$\frac{|F_S|}{|F_N|} = \frac{G \sin(\varphi)}{G \cos(\varphi)} = \tan(\varphi) \leq \mu_0. \quad (7.8)$$

A *megcsúszás határhelyzetében*  $\tan(\varphi) = \mu_0$ , tehát a (7.4) összefüggés miatt  $\varphi = \rho_0$ . Ebből következik, hogy a súrlódási félkúpszöget meghatározhatjuk úgy, hogy a vizsgált testet



7.5. ábra. Súrlódási kúp



7.6. ábra. Lejtőre helyezett hasáb egyensúlya

egy változtatható hajlásszögű lejtőre tesszük, és fokozatosan növeljük a lejtő meredekségét. Amikor a test megcsúszik, akkor a lejtő szöge megegyezik a súrlódási félkúpszöggel.

Abban az esetben is vizsgálható a lejtőre tett hasáb egyensúlya, ha egy vízszintes irányú,  $F$  nagyságú erő is hat rá, a 7.7. ábrának megfelelően. Ekkor az  $F$  erő nagyságától és a  $\varphi$ ,  $\mu_0$  paramétereiktől függően a hasáb lefelé vagy felfelé is elkezdhet csúszni a lejtőn. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a hasáb a felfelé csúszás *határhelyzetében* van! Ekkor a szabadtest-ábra alapján az alábbi egyensúlyi egyenletek írhatók fel:

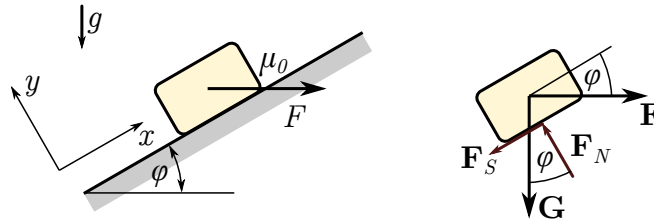
$$\sum F_x = 0 : \quad -F_S - G \sin(\varphi) + F \cos(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_S = F \cos(\varphi) - G \sin(\varphi), \quad (7.9)$$

$$\sum F_y = 0 : \quad F_N - G \cos(\varphi) - F \sin(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad F_N = G \cos(\varphi) + F \sin(\varphi). \quad (7.10)$$

Az  $F_S \leq \mu_0 F_N$  feltételből kifejezhető, hogy mekkora a legnagyobb  $F$  erő, ami mellett a hasáb egyensúlyban maradhat:

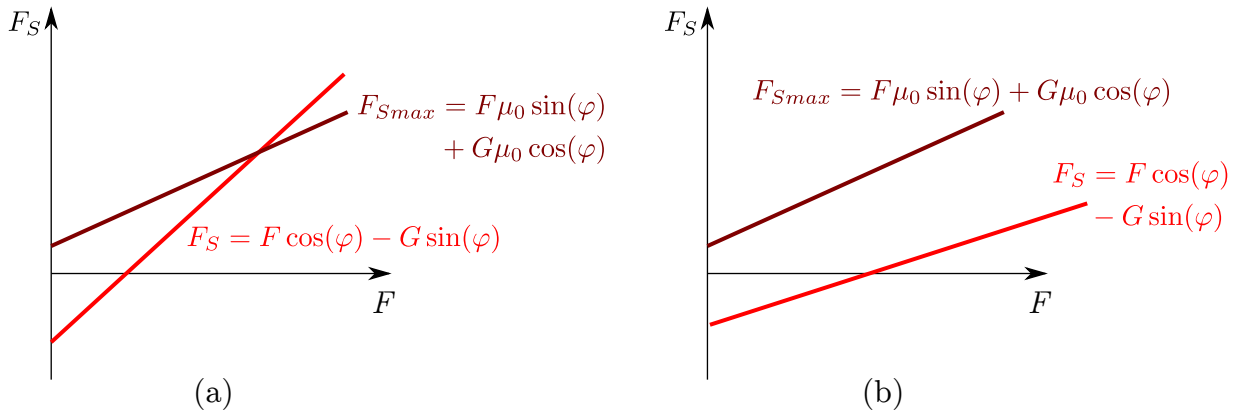
$$F \leq G \frac{\tan(\varphi) + \mu_0}{1 - \mu_0 \tan(\varphi)}. \quad (7.11)$$

Látható, hogy  $1 - \mu_0 \tan(\varphi) \rightarrow 0$  mellett a jobb oldalon álló kifejezés végtelenhez tart. Ennek az eredménynek a megértéséhez vizsgáljuk meg, hogy hogyan függ a súrlódási erő és



7.7. ábra. Lejtőre helyezett hasáb egyensúlya

a normálerő az  $F$  erőtől! Adott  $\varphi$  szögnél az egyensúlyhoz szükséges  $F_S$  súrlódási erő a (7.9) egyenlet szerint lineárisan függ  $F$ -től, tehát ábrázolva egy  $\cos(\varphi)$  meredekségű egyenes a grafikonja. Az  $F_N$  normálerő is lineárisan függ  $F$ -től, ezért az  $F_{Smax} = \mu_0 F_N$  maximális súrlódási erő is. Ebben az esetben a grafikon meredeksége  $\mu_0 \sin(\varphi)$ . A két egyenes viszonyát a 7.8. ábra illusztrálja, két eltérő esetben. Kis  $\varphi$  szög és kis  $\mu_0$  mellett  $\mu_0 \sin(\varphi) < \cos(\varphi)$ , ezért a (7.11) egyenlettel megadott  $F$  erőnél a két egyenes metszi egymást, és e feletti  $F$  erőknél bekövetkezik a megcsúszás. Azonban kellően nagy súrlódási tényező és  $\varphi$  hajlásszög



7.8. ábra. A felfelé történő megcsúszás határhelyzetének megfelelő egyensúlyhoz szükséges  $F_S$  súrlódási erő és a lehetséges maximális  $F_{Smax} = \mu_0 F_N$  súrlódási erő az  $F$  erő függvényében. Az (a) esetben  $\mu_0 \sin(\varphi) < \cos(\varphi)$ , ezért csak egy véges tartományban alakulhat ki egyensúly. A (b) diagram az önzárás esetét mutatja, amikor  $F$  növekedésével gyorsabban nő  $F_{Smax}$ , mint az egyensúlyhoz szükséges  $F_S$  érték

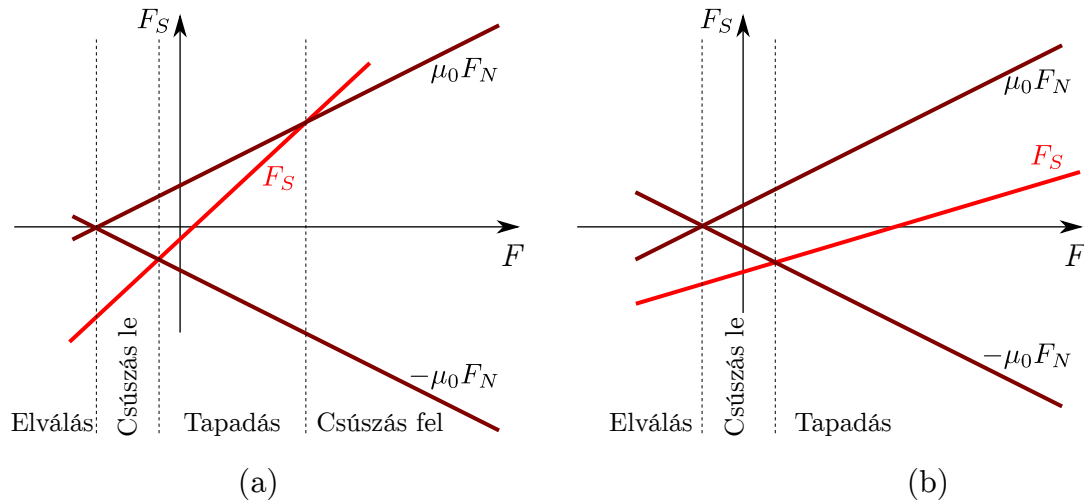
mellett, azaz ha

$$\mu_0 \sin(\varphi) > \cos(\varphi), \quad (7.12)$$

akkor a lehetséges legnagyobb súrlódási erő gyorsabban nő az  $F$  erővel, mint ami az egyensúlyhoz feltétlenül szükséges, ezért az egyenesek nem metszik egymást, azaz semmilyen  $F$  erő mellett sem csúszhat meg a hasáb a lejtőn felfelé. Ezt a jelenséget *önzárásnak* nevezik. Megjegyezzük, hogy a (7.11) összefüggés teljesülése nem elegendő az egyensúlyhoz. Van egy  $F$ -re vonatkozó minimális érték is, ami a lefelé csúszás határhelyzetéből fejezhető ki (tehát ellenkező irányban kell felvenni a súrlódási erőt a szabadtest ábrán, mint az előző esetben):

$$F \geq G \frac{\tan(\varphi) - \mu_0}{1 + \mu_0 \tan(\varphi)}. \quad (7.13)$$

Ha mindkét eset figyelembe vesszük, akkor a 7.9. ábrán látható diagramot kapjuk. Az (a)



7.9. ábra. Mind a lefelé, mind a felfelé történő megcsúszás figyelembevétele

eset kis meredekségű lejtőnek felel meg. Ha az  $F$  erő negatív, akkor csökkenti a normálerőt, tehát elegendően nagy negatív értéknél a test elválik a lejtőtől. A lefelé illetve felfelé ható súrlódási erő szélső értékeit mutató  $\mu_0 F_N$  és  $-\mu_0 F_N$  egyenesek metszéspontjától jobbra van egy olyan tartomány, ahol már pozitív a normálerő, azonban az egyensúlyhoz szükséges  $F_S$  súrlódási erő nem jöhet létre, ezért a test lefelé csúszik. Tapadás, azaz egyensúly azon a tartományon jöhet létre, ahol  $F_S$  értéke  $\mu_0 F_N$  és  $-\mu_0 F_N$  közé esik. Nagy  $F$  értékeknél felfelé csúszás következik be. A (b) eset meredekebb lejtőnek, az önzárás esetének felel meg. Elválás és lefelé csúszás ekkor is előfordulhat, de egy bizonyos  $F$  erő felett mindig teljesül az egyensúly feltétele, felfelé csúszás nem következik be.

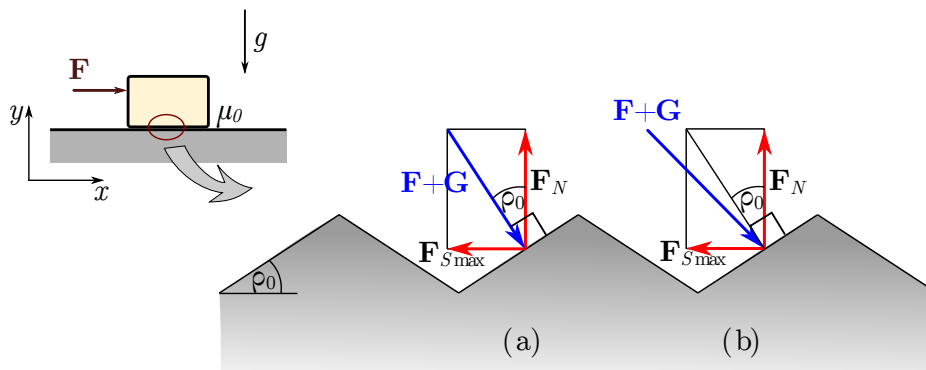
**7.43. megjegyzés:** A súrlódási erő háttérben álló mechanizmus leegyszerűbb modellje szerint a testek felszínén elhelyezkedő felületi egyenetlenségek a súrlódási tényezőnek megfelelő  $\rho_0$  hajlásszögű lejtőkkel modellezhetők, ahogy a 7.10. ábra mutatja. A megcsúszás határhelyzetében az aktív erők eredője éppen merőleges a felületi egyenetlenség irányára, de ha az aktív erők eredője  $\rho_0$ -nál nagyobb szöget zár be a normálerő irányával, akkor megcsúszás következik be.

## 7.3. Súrlódás pontszerű érintkezések mellett

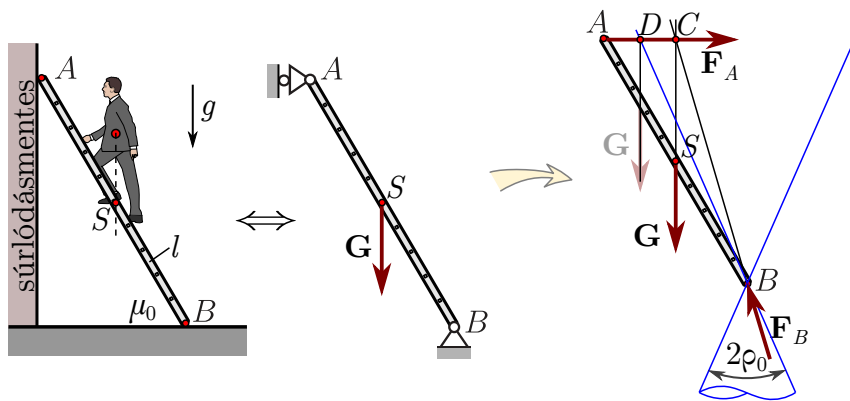
**7.1. példa:** A 7.11. ábrán egy súrlódásmentes falnak támasztott,  $m$  tömegű és  $l$  hosszúságú létrát vázoltunk. A talaj és a létra kapcsolatát a  $\mu_0$  tapadási súrlódási tényező jellemzi. A terhelés a létrára felmászó ember  $G$  súlya, aminek a támaszpontja a létra  $S$  pontjába tolható. Elemezzük a létra egyensúlyának feltételeit!

**Megoldás:**

Feltételezve, hogy a létra szimmetrikus, a probléma vizsgálható az ábrán látható síkban. Úgy járhatunk el, mintha létra helyett egy rúd szerepelne a feladatban, ami csak a végpontjai környezetében érintkezik a fallal és a talajjal. Mivel ezeknek a felületeknek a legnagyobb



**7.10. ábra.** Egy egyszerű elképzelés a Coulomb-súrlódás mechanizmusáról. (a): A megcsúszás határhelyzete (b): Az aktív erők eredője  $\rho_0$ -nál nagyobb szöget zár be a normálerő irányával, ezért megcsúszás következik be



**7.11. ábra.** Súrlódásmentes falnak támasztott létra egyensúlya

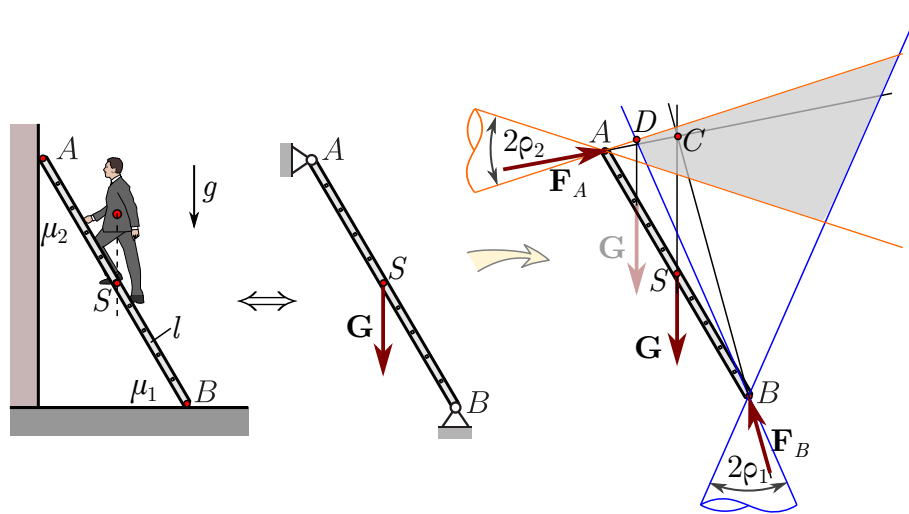
átmérője is elhanyagolható a létra méreteihez képest, úgy tekinthetjük, hogy koncentrált erők adódnak át a létrára az  $A$  és  $B$  pontokban.

A fal súrlódásmentes, ezért az  $A$  pontban támadó  $F_A$  erő a falra merőleges, azaz vízszintes hatásvonalú. A  $B$  pontban ezzel szemben olyan  $F_B$  kényszererő ébredhet, aminek van a talajjal párhuzamos és arra merőleges összetevője is. A súrlódási erőre vonatkozó fizikai korlátok miatt az  $F_B$  hatásvonalának egy  $\rho_0 = \arctan(\mu_0)$  félkúpszögű súrlódási kúpon belül kell maradnia. Amíg ez teljesül, addig ez a mechanikai rendszer helyettesíthető egy olyan rúddal, aminek az egyik végpontjában görgős támasz, másik végpontjában pedig síkcukló található. Tehát a feladat visszavezet egy kéttámaszú tartó vizsgálatára, ezért a reakcióerők meghatározhatók három egyensúlyi egyenlet segítségével.

A  $G$ ,  $F_A$  és  $F_B$  erők egyensúlya szerkesztéses módszerrel is vizsgálható: mivel  $G$  és  $F_A$  támadáspontja is és hatásvonalja is ismert, és e két hatásvonal a  $C$  pontban metszi egymást, egyensúlyban az  $F_B$  erő hatásvonalának át kell haladnia a  $C$  ponton. Ha az így megszerkesztett  $F_B$  erő hatásvonalja a súrlódási kúpon kívülre kerül, akkor nem jöhet létre egyensúly. A 7.11. ábrán látszik, hogy a megcsúszás határhelyzetében  $F_B$  a  $D$  pontban metszené  $F_A$  hatásvonalát. Következésképpen akkor is létrejöhet egyensúly, ha  $G$  hatásvonalja is a  $D$  ponton halad keresztül – tehát ha az ember magasabbra mászik fel a létrára. Az eredmények szerint tehát minél magasabbra mászunk fel egy létrára, annál nagyobb súrlódási erőre van szükség az egyensúly biztosításához. ♠



**7.2. példa:** Vizsgáljuk meg az előző feladatot abban az esetben, amikor a talaj és a létra között  $\mu_1$ , a fal és a létra között pedig  $\mu_2$  jellemzi a tapadási súrlódási erő maximumát!



7.12. ábra. Súrlódásos falnak támasztott létra egyensúlya

### Megoldás:

Ebben az esetben mind az  $A$ , mind a  $B$  pontban átadódhat az érintkező felületekre merőleges és azzal párhuzamos erő is. Tehát mindkét érintkezés csuklónak tekinthető. Következésképpen ez már egy *statikailag határozatlan* feladat, azaz a  $\mathbf{G}$  terhelés ismeretében nem határozhatók meg egyértelműen az  $\mathbf{F}_A$  és  $\mathbf{F}_B$  reakcióerők. Azt viszont megállapíthatjuk, hogy egyensúlyban e két erő hatásvonalai azon a területen belül metszhetik egymást, amit az  $A$  és  $B$  pontba berajzolt súrlódási kúpok kijelölnek. A 7.12. ábrán szürke sáttírozással jelöltük ezt a területet, és berajzoltuk a két hatásvonal egy lehetséges  $C$  metszéspontját. A valóságban bárhol lehet ez a metszéspont a  $\mathbf{G}$  erő hatásvonalának szürke tartományba eső szakaszán.

Azt a magasságot, ameddig még elcsúszás nélkül felmászhatunk a létrán, a  $D$  pont jelöli ki, ami a megcsúszás egyik határhelyzetéhez tartozik – amikor mindkét súrlódási erő a maximális értékét veszi fel. A szürke tartomány további három csúcspontja is hasonló határhelyzetet jelöl. ♠

## 7.4. Merev testek gördülése

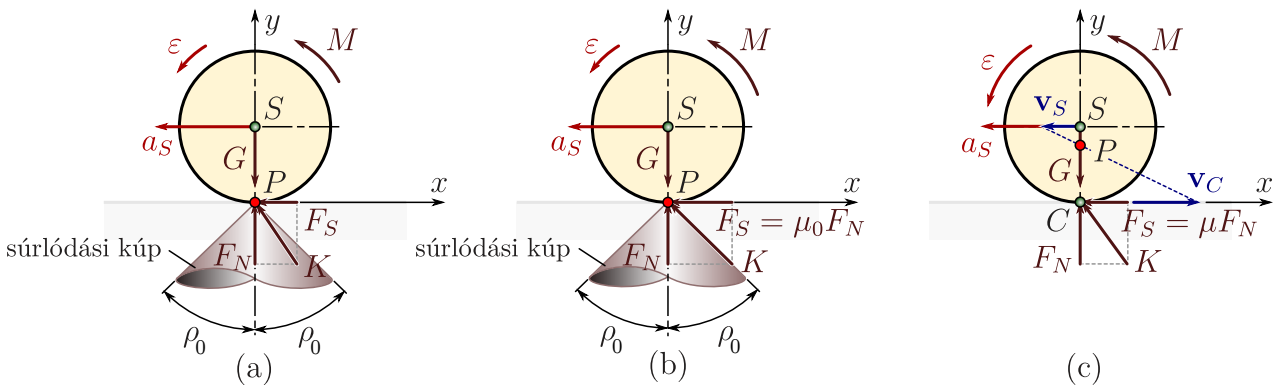
Nemcsak akkor modellezhetjük tapadási súrlódásként a testek érintkezését, ha azok nyugalomban és egyensúlyban vannak. A *gördülés* legegyszerűbb modellje szerint a gördülő merev test és a merev talaj egy pontban érintkeznek, és abban a pontban meg kell egyeznie a sebességüknek – különben csúszás következne be. Tehát az álló talajjal éppen érintkező  $P$  pont pillanatnyi sebességének nullának kell lennie. Ez csak akkor teljesülhet tartósan, ha a gördülő test és a talaj között ki tud alakulni akkora *tapadási súrlódási erő*, ami megakadályozza az érintkező pontok relatív elmozdulását. A pontszerű érintkezés miatt a kényszererő csak az érintkezési pontban hathat.

A tapadási súrlódási erő értéke gördülés során is korlátozott, ezért a gördülés ún. *dinamikai feltétele* az, hogy

$$\frac{|\mathbf{F}_S|}{|\mathbf{F}_N|} \leq \mu_0, \quad (7.14)$$

ami megegyezik a (7.6) összefüggéssel. Tehát most is alkalmazható a súrlódási kúp fogalma, ahogy a 7.13. ábra is mutatja. A kúp félkúpszögét a (7.4) képlet alapján számíthatjuk ki.

A gördülés feltételét csak az erők nagyságának ismeretében ellenőrizhetjük, azonban ekkor nem az egyensúlyi egyenletek (azaz a statika alaptétele), hanem a *dinamika alaptétele* alapján lehet meghatározni az adott mozgás fenntartásához szükséges súrlódási- és normálerő értékét. Az ehhez szükséges számítási módszer a dinamika tárgykörébe tartozik.

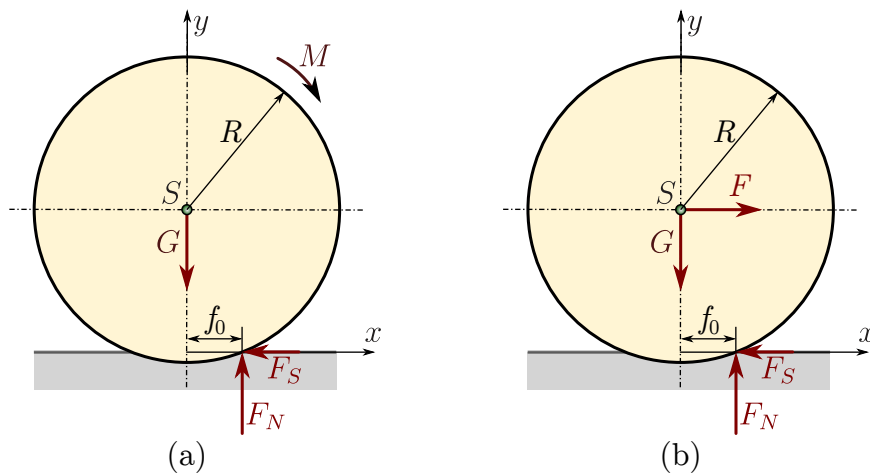


**7.13. ábra.** (a) Gördülés során a talajról átadódó  $\mathbf{K} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_N$  kényszererő a  $\rho_0 = \arctan(\mu_0)$  félkúpszögű súrlódási kúpon belülré esik, azaz  $F_S \leq \mu_0 F_N$ .  $v_S$  és  $a_S$  az  $S$  súlypont sebességét, illetve gyorsulását jelöli,  $\varepsilon$  pedig az  $M$  nyomaték hatása alatt gördülő korong szöggyorsulása. (b) A megcsúszás határhelyzetében a kényszererő a súrlódási kúp palástjára esik,  $F_S = \mu_0 F_N$ . (c) Csúszás során a súrlódási erő nagysága  $F_S = \mu F_N$ , iránya pedig ellentétes az érintkezési pont  $\mathbf{v}_C$  sebességének irányával [A61]

A gördülés kapcsán érdemes kiemelni, hogy a tapadási súrlódási erő nem csillapítás jellegű, azaz nem jár mechanikai energiavesztéssel (disszipációval)! Ez az alapján látható be, hogy támadáspontjának minden pillanatban nulla a sebessége, ezért ennek az erőnek *nulla a teljesítménye* (amit dinamikában az erőnek és a támadáspont sebességének szorzataként definiálnak). Mivel a teljesítményt tekinthetjük úgy, hogy az az időegység alatt elvégzett munka, a tapadási súrlódási erő által végzett munka is nulla. A csillapítás jellegű folyamatok teljesítménye és munkája ezzel szemben negatív, ezért csökkentik a vizsgált rendszer mechanikai energiáját, tehát hő keletkezik.

## 7.5. Gördülési ellenállás, indítási nyomaték

A valóságos testek nem tökéletesen merevek, ezért – az előző fejezetben alkalmazott feltetéssel ellentétben – nem pontszerű egy gördülő kerék és a talaj érintkezése, hanem kialakul egy  $2f_0$  méretű érintkező felület a testek deformációja miatt. A 7.14. ábrán azt az esetet mutatjuk, amikor a kerék merevnek, a talaj pedig deformálhatónak tekinthető, de az itt közölt



**7.14. ábra.** A gördülési ellenállás értelmezése hajtott (a) és vontatott (b) kerék esetében

számítások akkor is helytállóak, ha a kerék deformációja is számottevő. A talajról átadódó erő csak az érintkezési felületen fejtheti ki hatását, ezért ha az egyensúlyhoz már olyan erő kellene, aminek a támadáspontja ezen a felületen kívülre esik, akkor a kerék elfordul és elhagyja a talajban keletkezett mélyedést. A gördülés megindításához tehát egy bizonyos nagyságú erő vagy nyomaték szükséges. Ezt a jelenséget *gördülési ellenállásnak* nevezzük.

Két alapesetet érdemes elkülöníteni. Ha a kereket  $M$  nyomaték hajtja, tengelyét pedig  $G$  súly terheli (7.14/a ábra), akkor az egyensúly feltétele a kerék elindulásának határhelyzetében

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &: F_S = 0, \\ \sum F_y = 0 &: F_N = G, \\ \sum M_s = 0 &: F_N f_0 = M.\end{aligned}$$

Vontatott kerék esetében vízszintes irányú  $F$  erő hat a tengelyre (7.14/b ábra). Ekkor az elindulás határhelyzetében

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &: F_S = F, \\ \sum F_y = 0 &: F_N = G, \\ \sum M_s = 0 &: F_N f_0 = FR.\end{aligned}$$

Tehát mindkét esetben  $F_N f_0$  nagyságú indítási nyomaték szükséges a kerék megindításához. Ez a gondolatmenet érvényét veszti a kerék folyamatos gördülése során, mert annak a leírása bonyolultabb modellt igényel az érintkező felületek folyamatos deformációja miatt.

A gördülési ellenállás sem csillapítás jellegű, tehát az itt bemutatott modell nem magyarázza azt a hétköznapi tapasztalatot, hogy egy elgurított test előbb-utóbb megáll. A test lelassulása és megállása ugyanis a deformációk során bekövetkező energiavesztés miatt következik be, ami a gördülés sebességétől is függ.

## 7.6. A tapadási és csúszási súrlódás összehasonlítása

A teljesség kedvéért az alábbiakban összefoglaljuk a *mozgásbeli* vagy *csúszási* súrlódási erő legfontosabb tulajdonságait.

Nagy különbség a tapadási súrlódáshoz képest, hogy a csúszási súrlódási erő önmagában *nem biztosít semmilyen kényszert* és vektora *nem közvetlenül az egyensúlyi egyenletekből határozható meg*, hanem az alábbi képlet alapján:

$$\mathbf{F}_S = -\mu |\mathbf{F}_N| \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}. \quad (7.15)$$

Itt  $\mu$  a *csúszási súrlódási tényező* és  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  a vizsgált test relatív sebessége a másik testhez képest, amin csúszik (7.15 ábra). A negatív előjel arra utal, hogy a súrlódási erő mindig ellentétes értelmű, mint amerre a test sebességvektora mutat. A  $\mu$  csúszási súrlódási tényező nem lehet nagyobb a tapadási súrlódás tényezőjénél:

$$\mu \leq \mu_0. \quad (7.16)$$

Ez részben arra vezethető vissza, hogy – amint már Coulomb is megfigyelte – a súrlódási erő maximum értéke idővel nő a testek közötti kölcsönhatások és a testek deformációi (például az ún. kúszás) miatt. Tehát ha sokáig érintkezik két test, akkor idővel egyre jobban összetapadnak, viszont csúszás során kevesebb idő jut ezekre a kölcsönhatásokra. Gördülésre is igaz, hogy lassú gördülés mellett nagyobb súrlódási tényezővel lehet jellemezni az érintkezést.

A csúszási súrlódási erőt megadó (7.15) képlet érdekessége, hogy tartalmazza az  $\mathbf{F}_N$  normálerő nagyságát, ami viszont ebben az esetben is kényszererő (megakadályozza a testek egymásba hatolását), és az egyensúlyi egyenletek alapján lehet meghatározni. Tehát a csúszási súrlódási erő ugyan nem kényszererő, de egy kényszererőtől függ. Ez az oka annak, hogy sokszor a csúszási súrlódási erő és a normálerő eredőjét tekintik kényszererőnek – ami egy ún. nem ideális kényszerhez tartozik. Az ideális kényszerekkel ellentétben a mozgásbeli súrlódásos kényszerek különlegesek abból a szempontból, hogy ezek esetében olyan kényszererő komponens – csúszási súrlódási erő – is fellép, ami nem szükséges a kényszerfeltétel fenntartásához. Éppen ezzel kapcsolatos, hogy a csúszási súrlódás már *csillapítás* jellegű, disszipatív jelenség: teljesítménye – mivel a súrlódási erő értelme ellentétes az érintkezési pont sebességének értelmével – negatív, ezért a csúszási súrlódási erő által végzett munka is negatív, azaz *a rendszer mechanikai energiáját csökkenti*.

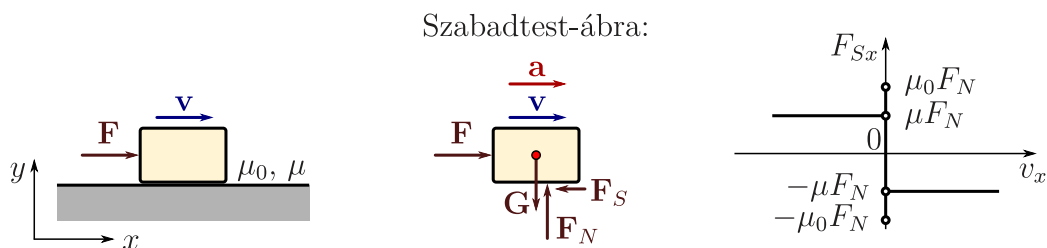
A tapadási súrlódás esetéhez hasonlóan, itt is bevezethető a *súrlódási kúp* fogalma, melynek félkúpszöge

$$\tan(\rho) = \frac{|F_S|}{|F_N|} = \frac{\mu |F_N|}{|F_N|} = \mu. \quad (7.17)$$

Azonban míg a tapadási súrlódás során fellépő kényszererő hatásvonala a súrlódási kúpon belül húzódik (7.5. ábra), és végtelen sokféle szöget bezárhat a függőlegessel, csúszási súrlódás esetében a kényszererő hatásvonala mindig a súrlódási kúp palástjára esik.

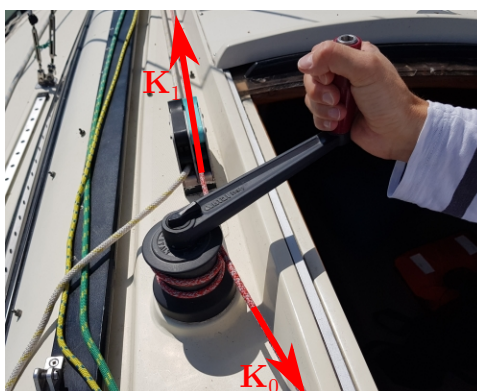
## 7.7. Kötélsúrlódás

Hétköznapi tapasztalat, hogy ha egy kötelet feltekerünk egy rögzített hengeres felületre (például egy oszlopra, csörlódobra), akkor az egyik kötélágot viszonylag csekély erővel húzva



**7.15. ábra.** Vízszintes kényszerpályán csúszó hasáb, annak szabadtest-ábrája és a súrlódási erő sebességfüggését megadó karakterisztika. Ez utóbbiból látszik, hogy nulla sebesség (azaz tapadás) és pozitív normálerő mellett a súrlódási erő értéke  $-\mu_0 F_N$  és  $\mu_0 F_N$  közé esik. A tapadási súrlódási erő konkrét értékét csak a hasábra ható többi erő ismeretében lehet meghatározni, az egyensúlyi egyenletek alapján [A62]

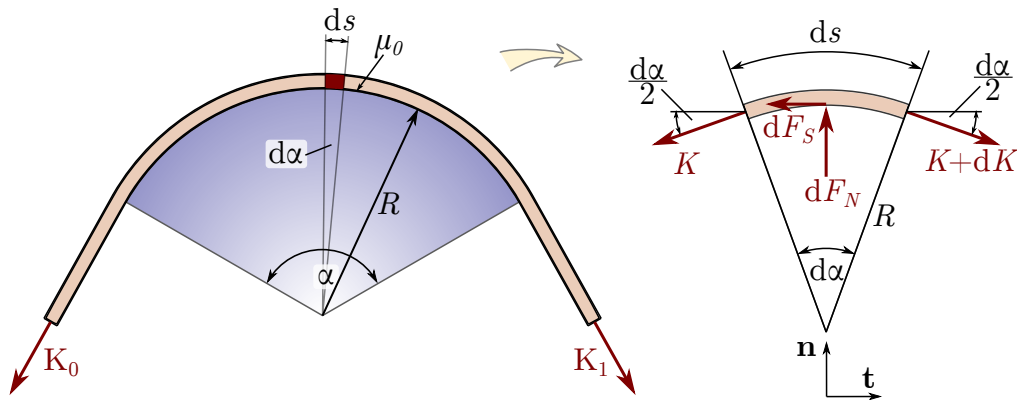
megtartható a másik kötélagat húzó, jelentős nagyságú terhelés is. Például a 7.16. ábrán egy csörlőre tekert kötel látható, melynek egyik ágában  $K_0$ , másik ágában pedig sokkal nagyobb,  $K_1$  nagyságú kötelerő ébred.



**7.16. ábra.** Csörlőre tekert kötel egy vitorlášajón. A vitorla megfeszítését az teszi lehetővé, hogy a kis  $K_0$  erővel tartott kötel a súrlódási erő miatt nem csúszik meg a dobón. Ezért a csörlő karjával nagy nyomatékot kifejtve, a megforgatott csörlővel meg lehet húzni a  $K_1$  erővel terhelt kötélagat [A63]

A két kötélagban ébredő erő különbsége a súrlódási erő hatásával magyarázható, ezért ezt a jelenséget *kötélsúrlódásnak* nevezik. A súrlódással kapcsolatos ismereteink alapján meghatározható, hogy mekkora erőkülönbség engedhető meg a kötel két vége között úgy, hogy a kötel még nem csúszik meg a kötéldobon. A következőkben tehát a megcsúszás határhelyzetét keressük. Ehhez a kötélsúrlódás 7.17. ábrán látható modelljéből indulunk ki.

A modell szerint a kötel egy  $R$  sugarú,  $\alpha$  szögű körív mentén érintkezik egy szilárd testtel – például oszloppal. Az egyik kötélagban  $K_0$ , a másik kötélagban pedig annál nagyobb,  $K_1$  erő ébred. Az egyensúly vizsgálatához elemi  $ds$  hosszúságú és  $d\alpha$  szögű ívdarabokra bontjuk a kötelet, melyekre az érintkező felületre merőleges  $dF_N$  normálerő és érintőirányú  $dF_S$  súrlódási erő hat. Az elemi  $dF_S$  súrlódási erők miatt a  $K$  kötelerő (azaz a kötel húzóigénybevétele) folyamatosan változik a kötel mentén. A  $ds$  hosszban bekövetkező erőváltozást  $dK$ -val



**7.17. ábra.** A kötelsúrlódás modellje és egy elemi  $ds$  hosszúságú kötélrész szabadtest-ábrája,  $K_1 > K_0$  feltételezésével

jelöljük. Ha az egész kötélt egyensúlyban van, akkor minden egyes ilyen kis darabjának is egyensúlyban kell lennie, ezért a 7.17. ábrán látható szabadtest-ábra alapján vizsgálhatjuk az erők egyensúlyának feltételeit. Ehhez képzeletben minden egyes kis darabnál ahhoz alkalmazkodó koordináta-rendszert veszünk fel: a  $\mathbf{t}$  érintő (tangenciális) irányú tengely a szakasz közepéhez húzott érintővel párhuzamos, az  $\mathbf{n}$  normális irányú tengely pedig sugárirányban kifelé mutat.

Az így bevezetett normális és tangenciális irányhoz tartozó erőegyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned} \sum F_n = 0 : \quad dF_N - K \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) - (K + dK) \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) &= 0, \\ \sum F_t = 0 : \quad (K + dK) \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right) - K \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right) - dF_S &= 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Kis szögek esetében alkalmazhatjuk az alábbi közelítéseket:

$$\sin\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \approx \frac{d\alpha}{2}, \quad \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\right) \approx 1. \quad (7.19)$$

Ezeket felhasználva az egyensúlyi egyenleteket egyszerűbb alakban is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} \sum F_n = 0 : \quad dF_N - K \frac{d\alpha}{2} - (K + dK) \frac{d\alpha}{2} &\equiv dF_N - K d\alpha - \frac{dK d\alpha}{2} = 0, \\ \sum F_t = 0 : \quad (K + dK) - K - dF_S &\equiv dK - dF_S = 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

A normális irányú vetületi egyenletben két tag elsőrendben kicsi,  $dK d\alpha$  viszont már két elemi mennyiség szorzataként másodrendben kicsinek számít, azaz az egyenletben szereplő másik két taghoz képest elhanyagolható. Feltételezve, hogy a kötélt megcsúszásának határhelyzetében minden kis kötélszakaszon a lehetséges maximális értéket veszi fel a súrlódási erő ( $dF_S = \mu_0 dF_N$ ), az alábbi három egyenletből álló egyenletrendszert kapjuk:

$$dF_N - K d\alpha = 0, \quad (7.21)$$

$$dK - dF_S = 0, \quad (7.22)$$

$$dF_S - \mu_0 dF_N = 0. \quad (7.23)$$

Az egyenletrendszer alapján kifejezhető a kötél erő megváltozása:

$$dK = dF_S \equiv \mu_0 dF_N \equiv \mu_0 K d\alpha. \quad (7.24)$$

Ha formálisan osztunk a  $d\alpha$  szöggel, akkor az alábbi ún. *differenciálegyenletet* kapjuk:

$$\frac{dK}{d\alpha} = \mu_0 K. \quad (7.25)$$

Ez azt fejezi ki, hogy a  $K$  kötél erő  $\alpha$  szög szerinti deriváltja arányos magával a kötél erővel. A differenciálegyenlet megoldása a keresett  $K(\alpha)$  függvény, ami megadja, hogy hogyan változik a kötél erő az ív mentén.

A differenciálegyenletek megoldása sok esetben nagyon nehéz, gyakran nincs is zárt alakban (képlettel) megadható megoldásuk. A (7.25) egyenlet megoldására azonban van egy jól alkalmazható módszer. Ez ugyanis egy ún. szétválasztható változójú differenciálegyenlet, ami azt jelenti, hogy a  $K$  kötél erőtől függő tagokat és a  $d\alpha$  elemi szögváltozást az egyenlet két különböző oldalára tudjuk rendezni:

$$\frac{dK}{K} = \mu_0 d\alpha. \quad (7.26)$$

Ha végighaladunk az  $\alpha$  szögű ívben felfekvő kötélen, akkor a fenti egyenlet által megadott változások összeadódnak, és a kötél erő  $K_0$ -ról  $K_1$ -re változik. A kötél erő és a szög teljes változását integrálással tudjuk meghatározni:

$$\int_{K_0}^{K_1} \frac{dK}{K} = \int_0^\alpha \mu_0 d\alpha. \quad (7.27)$$

Az integrálást végrehajtva

$$\log(K_1) - \log(K_0) = \mu_0 \alpha, \quad (7.28)$$

ahol  $\log()$  a természetes alapú logaritmust jelöli. Felhasználva, hogy  $\log(K_1) - \log(K_0) = \log(K_1/K_0)$ , majd mindkét oldalt behelyettesítve az exponenciális függvénybe, azt kapjuk, hogy ha  $K_1 > K_0$  (ahogy feltételeztük), akkor a megcsúszás határhelyzetében

$$\frac{K_1}{K_0} = e^{\mu_0 \alpha} \Rightarrow K_1 = K_0 e^{\mu_0 \alpha}. \quad (7.29)$$

Ezt az összefüggést Eytelwein-egyenletnek<sup>5</sup> nevezik. A másik irányú megcsúszáshoz tartozó határhelyzetet – mikor  $K_1 < K_0$  – a fentiekhez hasonló gondolatmenettel határozhatjuk meg:

$$K_1 = K_0 e^{-\mu_0 \alpha}. \quad (7.30)$$

Az  $\alpha$  szög akár  $2\pi$ -nél nagyobb értékeket is felvehet, ami annak felel meg, hogy a kötelet többször is körbetekerjük a dobon.

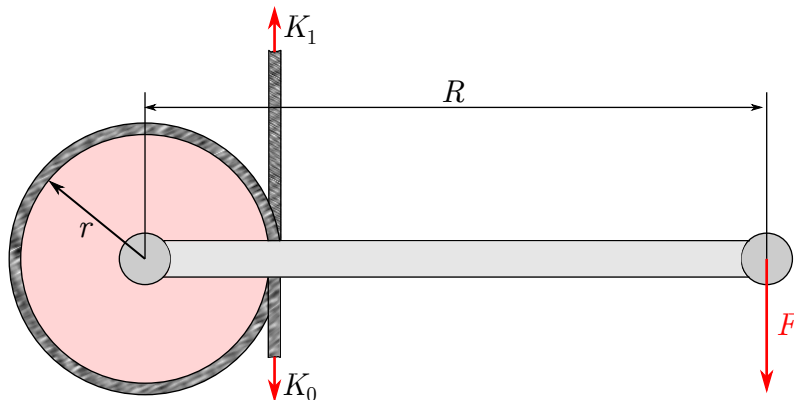
**7.44. megjegyzés:** A kötélsúrlódás egy másik esete, amikor a kötelet saját maga vagy egy másik kötel köré tekerjük, azaz csomót kötünk rá. A megfelelő csomók általában önzárók, tehát a kötel húzása során megszorulnak, de laza állapotban könnyen oldhatók. Néhány példa látható a 7.18. ábrán.

<sup>5</sup>Johann Albert Eytelwein, 1764-1849



7.18. ábra. Különbféle csomók: palstek, szorító nyolcas és Magnus-csomó [A64]

**7.3. példa:** A 7.19. ábrán a 7.16. képen mutatott csörlő mechanikai modellje látható. Az  $r$  sugarú csörlődobon kétszer van körbetekerve a köté, a köztük ébredő maximális súrlódási erőt a  $\mu_0$  tényező jellemzi. A csörlőkar hossza  $R$ , a vitorla felhúzásához szükséges erő pedig  $K_1$ . Határozzuk meg, hogy a megcsúszás határhelyzetében mekkora  $K_0 < K_1$  erővel kell fogni a köté másik végét, és milyen nagyságú  $F$  erővel kell hajtani a csörlőkart!  
Adatok:  $r = 5$  cm,  $R = 25$  cm,  $\mu_0 = 0,2$ ,  $\alpha = 4\pi$ .



7.19. ábra. A csörlőre nyomatékot kifejtő erők

**Megoldás:**

A megoldás első lépésében a köté megcsúszásának megakadályozásához minimálisan szükséges  $K_0$  erő értékét határozzuk meg:

$$K_0 = K_1 e^{-\mu_0 \alpha} = 16,2 \text{ N.} \quad (7.31)$$

Ekkor – tehát a köté megcsúszásának határhelyzetében – a csörlő nyomatéki egyensúlyának feltétele:

$$K_1 r - K_0 r - F R = 0, \quad (7.32)$$

amiből

$$F = \frac{(1 - e^{-\mu_0 \alpha}) K_1 r}{R} = 36,76 \text{ N.} \quad (7.33)$$



Egyensúly többféleképpen is megvalósulhat, hiszen a  $K_0$  erő a fent számítottnál nagyobb értékeket is felvehet. Például  $K_0 = K_1$  mellett a csörlőkar hajtására nincs is szükség, azaz  $F = 0$ .

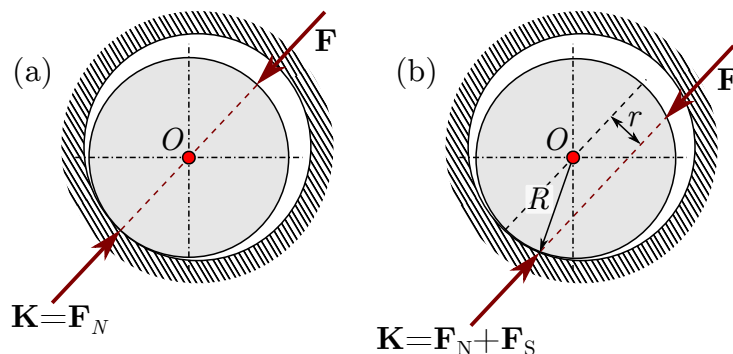
Ennek a feladatnak speciális esete, amikor a kötélt egyik vége a csörlőhöz van rögzítve, a másik végére pedig  $K_1$  erő hat. Ebben az esetben a hengerkeréknek nevezett egyszerű géphez jutunk. Mivel a kötélt nem csúszhat meg a dobban, az egyensúly feltétele

$$K_1 r - F R = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{K_1} = \frac{r}{R}, \quad (7.34)$$

azaz a dob és a kar méreteinek aránya megegyezik az erők arányával. ♠

## 7.8. Csapsúrlódás

Csuklók esetében egy furatba helyezett hengeres csap viszi át az erőt két test között (1.57. ábra). Ha az érintkező testek merevek, és a *súrlódást elhanyagoljuk*, akkor a csap egy alkotó mentén – illetve síkbeli modellek esetében egy pontban – érintkezik a furat falával, amiről csak az érintőre merőleges irányú  $\mathbf{F}_N$  erő adódhat át a csapra. Ebben az esetben csak akkor lehetséges egyensúly, ha a csapot terhelő  $\mathbf{F}$  erő hatásvonalát átmeny a csap tengelyén (azaz síkban a csap középpontján), mert ekkor ezzel azonos hatásvonalú  $\mathbf{K} = \mathbf{F}_N$  erő ébredhet a csap és a furat érintkezésénél (lásd 7.20/a ábra).

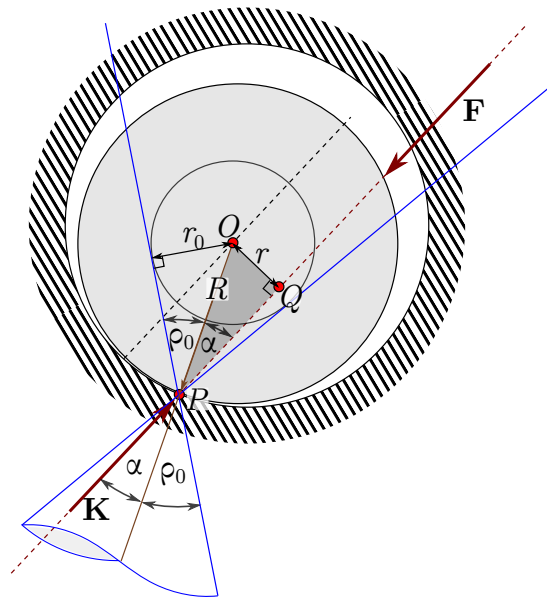


**7.20. ábra.** A csuklót alkotó csapot terhelő erők. (a): Súrlódásmentes eset (b) Súrlódásos eset

Azonban ha a *súrlódás hatását is figyelembe vesszük*, akkor olyan  $\mathbf{F}$  terhelő erő mellett is lehetséges egyensúly, aminek a hatásvonalát valamilyen  $r$  távolságban van a  $R$  sugarú csap  $O$  középpontjától, ahogy a 7.20/b ábra mutatja. Ebben az esetben is azonos hatásvonalúnak kell lennie az  $\mathbf{F}$  erőnek és az érintkezési pontban ébredő  $\mathbf{K}$  kényszererőnek, de most a kényszererőnek nem kell sugárirányúnak lennie. Természetesen ilyenkor is korlátozott a súrlódási erő nagysága, ezért a  $\mathbf{K}$  kontakterő hatásvonalát csak  $-\rho_0 \leq \alpha \leq \rho_0$  szöveget zárhat be a  $P$  érintkezési pontban behúzott  $R$  sugar irányával (7.21. ábra).

Jelölje az  $O$  középpontnak az erők hatásvonalára vetett merőleges vetületét  $Q$ , az  $OQ$  távolságot pedig  $r$ ! Az  $\alpha$  szög tangense kifejezhető az  $OPQ$  derékszögű háromszög ismeretében: az  $OP$  távolság  $R$  (a csap sugara), ezért a  $PQ$  távolság  $\sqrt{R^2 - r^2}$ , amiből

$$\tan(\alpha) = \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (7.35)$$



7.21. ábra. A csapsúrlódás modellje

Az alkalmazások szempontjából fontos annak megállapítása, hogy egyensúlyban mekkora lehet az  $\mathbf{F}$  erő hatásvonalának és a csap középpontjának maximális  $r_0 = r_{\max}$  távolsága. A megcsúszás határhelyzetében – azaz amikor a csap elkezd forogni a furatban –  $\alpha = \rho_0$ , azaz  $\tan(\rho_0) = \mu_0$  miatt

$$\mu_0 = \frac{r_0}{\sqrt{R^2 - r_0^2}}. \quad (7.36)$$

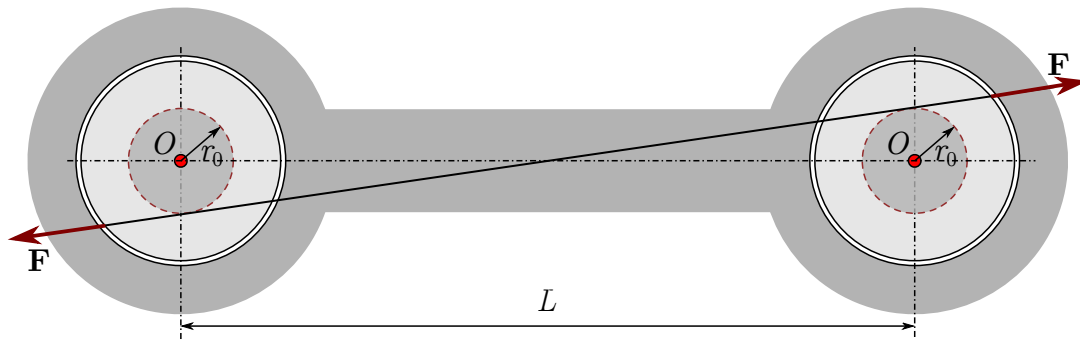
Ebből kifejezhető  $r_0$  értéke:

$$r_0 = R \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + \mu_0^2}}. \quad (7.37)$$

Bármilyen irányból is hat az  $\mathbf{F}$  erő, mindig ez a távolság jellemzi a megcsúszás határhelyzetét. Tehát úgy tekinthetjük, hogy  $r_0$  egy körnek – a csapsúrlódás körének – a sugara.

A csap elforgatásához ezek szerint  $M = Fr_0$  nyomaték szükséges, amit a csapsúrlódás nyomatékának neveznek. A (7.37) kifejezésből látszik, hogy a csapsúrlódás nyomatékának csökkentése érdekében célszerű csökkenteni a csap  $R$  sugarát. Ez az oka annak, hogy műszerekben gyakran a lehető legkisebb sugarú „csapot” alkalmaznak, és egy élen támasztják meg a tengelyeket.

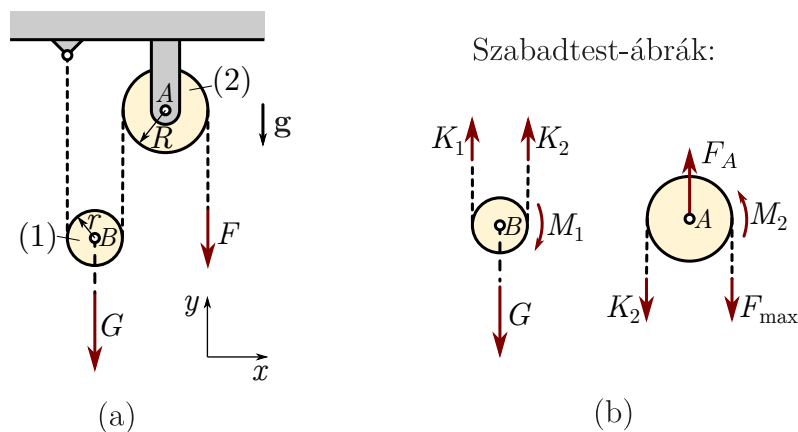
A rácsos szerkezeteknél (4.2. fejezet) elhanyagoltuk a csapsúrlódást, ezért kihasználhatuk, hogy a mindkét végükön csuklósan kapcsolódó, csak a végpontjaikban terhelt rudakban rúdirányú erő ébred. A csapsúrlódás figyelembevételével arra jutunk, hogy a rúderő pontos iránya nem határozható meg statikai alapon, hiszen az egyensúlyhoz elegendő, ha az erő hatásvonala  $r_0$ -nál közelebb van a csapok középpontjaihoz (lásd 7.22. ábra), és ez végtelenül sokféleképpen teljesülhet, azaz elvileg statikailag határozatlanná válik a feladat. Valóságos szerkezetek esetében azonban a rudak  $L$  hossza sokkal nagyobb a csapsúrlódás körének  $r_0$  sugaránál, ezért az erők irányának a rúdiránytól való eltérése elhanyagolható. Hasonló okokból modellezhetjük csuklós kapcsolatként azokat a hegesztett vagy csomólemezes kötéseket, amelyek méreténél sokkal nagyobb a rúd hossza.



**7.22. ábra.** A csapsúrlódás hatása a kétcsuklós rúdban (statikai rúdban) ébredő erő irányára (jelleghelyes ábra, a valóságban  $r_0 \ll L$ , ezért általában jó közelítéssel párhuzamos az erők hatásvonala a rúd hossz tengelyével)

**7.4. példa:** A 7.23. ábrán két elhanyagolható tömegű csiga, és a rajtuk átvettett nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű kötéll látható, mely nem csúszik meg a csigákon. Az (1) jelű,  $r$  sugarú mozgócsiga tengelyére  $G$  súlyú testet akasztunk. Mekkora maximális és minimális  $F$  erővel lehet egyensúlyban tartani a rendszert, ha mindkét csiga tengelyénél  $r_0$  a csapsúrlódás körének nagysága?

Adatok:  $G = 2000 \text{ N}$ ,  $r = 0,1 \text{ m}$ ,  $R = 0,15 \text{ m}$ ,  $r_0 = 0,0015 \text{ m}$



**7.23. ábra.** Csigasor szerkezeti ábrája (a) és a maximális erő határhelyzetéhez tartozó szabadtest-ábra (b)

### Megoldás:

Kezdjük a feladat megoldását a *maximális* erő meghatározásával! Ebben a határhelyzetben a csapsúrlódási nyomatékok olyan értelműek, hogy gátolják a kötéll végének az  $F$  erő irányában történő elmozdulását. Tehát a (2) jelű mozgócsigára az óramutató járásával ellentétes, az (1) jelű csigára pedig az óramutató járásával egyező irányú nyomaték hat. Ennek megfelelően rajzoltuk meg a csigák szabadtest-ábráit. Az (1) jelű testre a  $G$  erőn kívül a két kötéllágról átadódó  $K_1$  illetve  $K_2$  erők hatnak, valamint a csapsúrlódás  $M_1$  nyomatéka. A (2) jelű csigára az  $M_2$  súrlódási nyomaték mellett a  $K_2$  kötél-erő, az  $F$  erő, és a csiga tengelyénél támadó  $F_A$  tartóerő hat.

A csapsúrlódási nyomatékok értékei  $M_1 = r_0 G$  és  $M_2 = r_0 F_A$ , hiszen a két tengelyt  $G$  illetve  $F_A$  erő terheli, és ezek adódnak át a csigákra.

Az (1) jelű test egyensúlyi egyenletei:

$$\sum F_y = 0 : \quad K_1 + K_2 - G = 0, \quad (7.38)$$

$$\sum M_b = 0 : \quad K_2 r - K_1 r - M_1 = 0. \quad (7.39)$$

A (2) jelű test egyensúlyi egyenletei pedig:

$$\sum F_y = 0 : \quad F_A - K_2 - F_{\max} = 0, \quad (7.40)$$

$$\sum M_a = 0 : \quad K_2 R - F_{\max} R + M_2 = 0. \quad (7.41)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$K_1 = \frac{G(r - r_0)}{2r} = 985 \text{ N}, \quad K_2 = G - K_1 = 1015 \text{ N}, \quad F_{\max} = \frac{K_2(R + r_0)}{R - r_0} = 1035,51 \text{ N}. \quad (7.42)$$

Az egyensúlyt biztosítani képes *minimális* erő meghatározásához azt kell figyelembe venni, hogy ekkor éppen ellentétes értelműek lesznek a csapsúrlódási nyomatékok. A számítás ezzel a módosítással a maximális erő esetének megfelelően végezhető el. Azonban gyorsabban célt érünk, ha észrevesszük, hogy a csapsúrlódási nyomatékok előjelének megváltoztatása annak felel meg, hogy az  $r_0$  sugarat tartalmazó tagok előjelét változtatjuk meg. Tehát a minimális erő határhelyzetében

$$K_1 = \frac{G(r + r_0)}{2r} = 1015 \text{ N}, \quad K_2 = G - K_1 = 985 \text{ N}, \quad F_{\min} = \frac{K_2(R - r_0)}{R + r_0} = 965,49 \text{ N}. \quad (7.43)$$

Érdemes megvizsgálni azt az esetet is, amikor a súrlódás elhanyagolható, azaz  $r_0 \rightarrow 0$ . A fenti képletek szerint ebben az esetben

$$K_1 = K_2 = \frac{Gr}{2r} = \frac{G}{2} = 1000 \text{ N}, \quad F_{r_0=0} = \frac{K_2 R}{R} = K_2 = \frac{G}{2} = 1000 \text{ N}. \quad (7.44)$$

Tehát ekkor a csigákon átvett kötélágakban azonos nagyságú erő ébred, és a mozgócsigára felfüggesztett teher felének megfelelő  $F$  erő szükséges az egyensúly fenntartásához. ♠

# 8. fejezet

## Függelék

### 8.1. Matematikai alapok – mátrixok és vektorok között értelmezett szorzások

**8.1. definíció.**  $m \times n$  méretű mátrixnak nevezzük az alábbi,  $m$  sorból és  $n$  oszlopból álló táblázatot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

Egy mátrix négyzetes, ha  $n = m$ , azaz a sorainak és oszlopainak száma megegyezik. Ebben az esetben a mátrix bal felső és jobb alsó eleme közötti átlót – ami mentén az elemek két indexe megegyezik, pl.  $a_{11}$  vagy  $a_{22}$  – *főátlónak*, a bal alsó és jobb felső elem közöttit pedig *mellékátlónak* nevezik. A mátrix *szimmetrikus*, ha a főátlóra tükrözve nem változik meg, azaz ha  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**8.2. definíció.** *Mátrix és vektor szorzása.* Egy  $m \times n$  méretű  $\mathbf{A}$  mátrix és egy  $n$  méretű (hosszúságú)  $\mathbf{v}$  vektor szorzata az alábbi  $m$  elemű vektor:

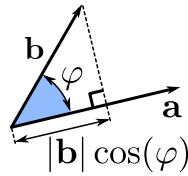
$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}. \quad (8.2)$$

**8.3. definíció.** Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzatának eredménye skalármennyiség, melynek értéke

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\varphi), \quad (8.3)$$

ahol  $\varphi$  a két vektor által bezárt szög (8.1 ábra). A skaláris szorzat jele a pont. ♠

A definícióból következik, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata zérus, párhuzamos vektorok skaláris szorzatának értéke pedig  $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$  vagy  $-|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ . A szorzótényezők sorrendje közömbös, tehát  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ .



8.1. ábra. Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzatának értelmezése.

A fentiek szerint az

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

vektorok skaláris szorzata:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}). \quad (8.5)$$

A bázisvektorok merőlegesek egymásra, ezért a különböző bázisvektorok skaláris szorzata nulla, önmagukkal vett szorzataik értéke viszont 1:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0. \quad (8.6)$$

Ebből következően a (8.5) szorzat eredménye

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (8.7)$$

A skaláris szorzat formálisan végrehajtható a mátrixok szorzásának szabályai alapján is. Ehhez az első tényezőt  $1 \times 3$  elemű mátrixnak (sorvektornak), a második tényezőt pedig  $3 \times 1$  elemű mátrixnak (oszlopvektornak) kell tekinteni, azaz az első tényező transzponáltja szerepel a szorzatban:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (8.8)$$

Ha a fenti értelemben, mátrixok szorzataként tekintik a skaláris szorzást, akkor a szorzótényezők közötti pontot nem szokták kitenni – de azt néha akkor is elhagyják, ha az eredeti, geometriai definíció alapuló műveletet értik alatta.

Az  $\mathbf{a}$  vektor nagysága is könnyen számítható a skaláris szorzat segítségével, a Pythagoras-tétel alapján:  $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ , és

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (8.9)$$

A skaláris szorzat segítségével ki tudjuk számítani egy adott  $\mathbf{a}$  vektor bármely irányú vetületeit, és így a koordinátáit és komponenseit is egy másik derékszögű koordináta-rendszerben. Ehhez az  $\mathbf{a}$  vektort a vizsgált irányba mutató egységvektorral, vagy a koordináta-rendszer (egységnyi hosszúságú) bázisvektoraival kell skalárisan szorozni. Például Descartes-féle  $(xyz)$  koordináta-rendszerben a koordináták

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}. \quad (8.10)$$

A vektorértékű komponensek meghatározásához meg kell szorozni a koordinátákat a megfelelő egységvektorokkal.  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ , ahol

$$\mathbf{a}_x = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i}, \quad \mathbf{a}_y = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}, \quad \mathbf{a}_z = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}. \quad (8.11)$$

Itt a zárójelben lévő kifejezések skaláris szorzatok, tehát eredményük skalár.

Ha szeretnénk meghatározni egy  $\mathbf{a}$  vektor  $\mathbf{b}$  irányú vetületét (komponensét), akkor a fentiek szerint a  $\mathbf{b}$  irányú

$$\mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \quad (8.12)$$

egységvektorral kell beszoroznunk az  $\mathbf{a}$  vektort:

$$a_b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b \quad (\text{skalár koordináta}) \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_b = a_b \mathbf{e}_b \quad (\text{vektor komponens}). \quad (8.13)$$

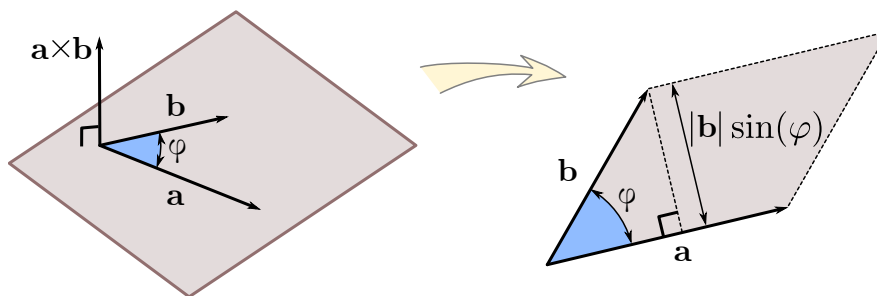
Hasonlóan számíthatjuk ki az  $\mathbf{a}$  vektor  $a_1, a_2, a_3$  koordinátáit egy tetszőleges,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  bázisvektorokkal megadott derékszögű koordináta-rendszerben, pl.  $a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1$  és  $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$ .

A tömörség érdekében gyakran elhagyják a szorzásra utaló pontot a skaláris szorzat kijelölésekor, tehát  $\mathbf{a}\mathbf{b}$  is a két vektor skaláris szorzatát jelöli.

**8.4. definíció.** Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok vektoriális szorzatának eredménye vektor, melynek nagysága

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\varphi), \quad (8.14)$$

ahol  $\varphi$  a vektorok által bezárt szög. Az  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektor merőleges mind az  $\mathbf{a}$ , mind a  $\mathbf{b}$  vektorra és az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  vektorok jobbsodrású rendszert alkotnak (8.2 ábra). ♠



8.2. ábra. Az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok vektoriális szorzatának értelmezése.

A definícióból következik, hogy párhuzamos vektorok vektoriális szorzata a nullvektor, merőleges vektorok vektoriális szorzatának nagysága a két vektor abszolút értékének szorzatával egyenlő, továbbá  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ . A 8.2 ábra alapján az is könnyen belátható, hogy az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok által kifeszített paralelogramma területe  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ .

A szorzótényezőket kifejtve

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}). \quad (8.15)$$

Figyelembe véve, hogy  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$  és  $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ , és  $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ ,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} \quad (8.16)$$

$$+ a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{j} \times \mathbf{k} \quad (8.17)$$

$$+ a_z b_x \mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \times \mathbf{k} \quad (8.18)$$

$$= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

A vektoriális szorzat számítása formálisan egy ún. determináns kifejtésével is megtehető.

**8.5. definíció.** A  $3 \times 3$  méretű

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

mátrix determinánsa az alábbi kifejezés:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &\equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}). \end{aligned} \quad (8.21)$$



A számítás annak felel meg, hogy a mátrix első során végighaladva felváltva pozitív illetve negatív előjellel vesszük figyelembe az ott szereplő elemeket (ez a sakktábla szabály), melyeket a hozzájuk tartozó  $2 \times 2$  méretű ún. aldeterminánsokkal szorzunk, és az eredményeket összeadjuk. Az első sor első eleméhez az az aldetermináns tartozik, amit az első sor és az első oszlop letakarásával kapunk az eredeti mátrixból. A második illetve a harmadik elemhez tartozó aldeterminánsokat pedig az első sor és a második illetve harmadik oszlop letakarásával kapjuk. A  $2 \times 2$  méretű aldeterminánsok meghatározása során ugyanezt a szabályt alkalmazzuk, például az első aldeterminánsban az  $a_{22}$  elemhez az  $a_{33}$  elem – mint  $1 \times 1$  méretű aldetermináns – tartozik, a negatív előjellel figyelembe veendő  $a_{23}$  elemet pedig  $a_{32}$ -vel kell megszorozni. A definíció kiterjeszthető nagyobb méretű mátrixok esetére is, mert tetszőleges méretű négyzetes mátrix esetén is visszavezethető a számítás kisebb méretű aldeterminánsok meghatározására.

A fenti definíció akkor is alkalmazható, ha a mátrix első sorában három darab bázisvektor, a második és harmadik sorban pedig skalárok – két vektor skalárkomponensei – szerepelnek. Ezt kihasználva az alábbi alakban is felírhatjuk két vektor vektoriális szorzatát:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \quad (8.22)$$

A  $2 \times 2$  méretű ún. aldeterminánsok számítása során úgy kell eljárni, hogy a bal felső elemet megszorozzuk a jobb alsó elemmel (például az  $\mathbf{i}$  vektorral párhuzamos,  $x$  komponens számítása során ebből  $a_y b_z$  adódik), majd ebből kivonjuk a jobb felső és bal alsó elem szorzatát



(a példában  $a_z b_y$ ). Külön oda kell figyelni az  $y$  irányú komponens számítására, mert abban az esetben negatív előjellel kell figyelembe venni a számított aldetemináns értékét.

Más felírási mód is alkalmazható:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

Ebben az esetben az  $x$  komponens számításakor letakarjuk mindkét vektor első elemét, majd formálisan ugyanúgy végezzük a szorzást, mint az aldeteminánsnál: a bal felső elemet szorozzuk a jobb alsóval, és abból kivonjuk a másik két elem szorzatát:  $a_y b_z - a_z b_y$ . Az  $y$  komponens számításakor a középső elemeket takarjuk le, és most úgy vesszük figyelembe az ehhez az esethez tartozó negatív előjelet, hogy a először a jobb felső elemet szorozzuk a bal alsóval, és abból vonjuk ki a másik két elem szorzatát:  $a_z b_x - a_x b_z$ . Végül, a  $z$  komponens számításakor a két vektor utolsó elemét takarjuk le, és megint a bal felső és jobb alsó elemek szorzatából vonjuk ki a másik két elem szorzatát:  $a_x b_y - a_y b_x$ .

Számítások ellenőrzésére felhasználható, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata nulla, például  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ .

A vektoriális szorzat nem asszociatív, tehát  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ . Egy ilyen, *hármass vektoriális szorzat* kiszámítását könnyíti meg az alábbi tétel:

**8.6. tétel.** Kifejtési tétel (*bac-cab szabály*).

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (8.24)$$

A *hármass vektoriális szorzat* eredménye olyan vektor, mely felírható a képlet bal oldalán zárójelben levő  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok lineáris kombinációjaként. A szorzatban középen álló vektort pozitív, a másik zárójelben levő vektort pedig negatív előjellel kell figyelembe venni. ♠

A kifejtési tételnek megfelelően,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (8.25)$$

A kifejtési tételből is látszik, hogy *hármass skaláris szorzat* nem értelmezhető, hiszen az  $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$  képletben a  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  szorzat eredménye már skalár, így nem lehet egy skaláris szorzat tényezője – a skaláris szorzatban mindkét tényezőnek vektornak kell lennie.

**8.7. definíció.** Az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok *hármass vegyes szorzata*  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ . ♠

A *hármass vegyes szorzat* az  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  és  $\mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát adja meg. Ez alapján könnyen belátható, hogy a szorzat bárhogy zárójelezhető és a tényezők ún. *ciklikus permutációja* sem változtatja meg a végeredményt:

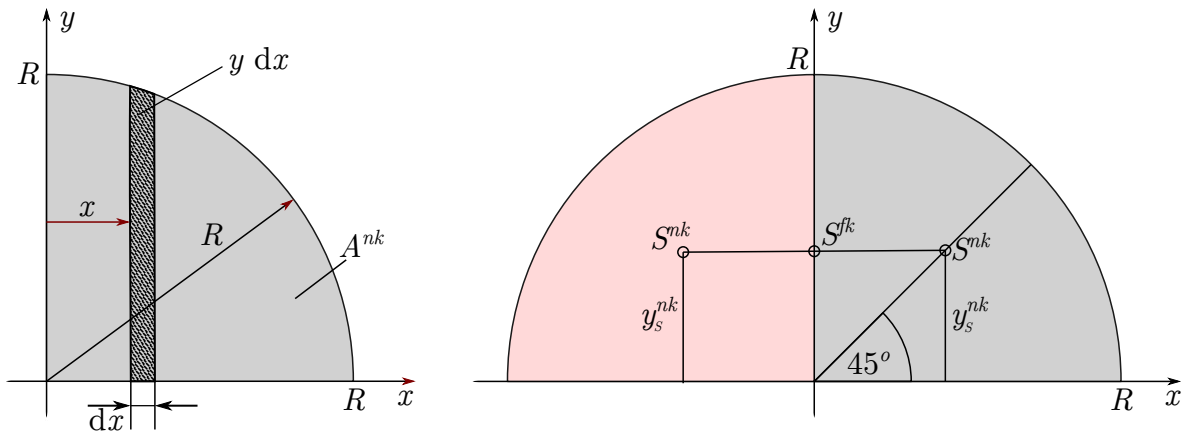
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (8.26)$$

Mivel a skaláris szorzat tényezői felcserélhetőek,  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  is teljesül.

## 8.2. Néhány homogén test és síkidom súlypontjának számítása

### 8.2.1. Negyedkörcikk alakú lemez súlypontja

A kör egyenlete:  $R^2 = x^2 + y^2$ , amiből  $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Osszuk fel a negyedkörcikket elemi,  $dx$  szélességű és  $y(x)$  magasságú csíkokra a 8.3. ábrának megfelelően! Az  $x$  koordinátánál található csík területe  $dA = y(x) dx = \sqrt{R^2 - x^2} dx$ .



8.3. ábra. Negyedkörcikk és félkörlap alakú lemezek

A súlypont (3.77) képletét alkalmazva:

$$x_S = \frac{\int_{(A)} x dA}{A} = \frac{\int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx}{R^2 \pi / 4} = \frac{R^3 / 3}{R^2 \pi / 4} = \frac{4R}{3\pi}, \quad (8.27)$$

Mivel a negyedkörcikk szimmetrikus az  $x = y$  egyenesre, és a súlypontnak a szimmetria-tengelyen kell elhelyezkednie,  $y_S = x_S$ .

Ha két negyedkörcikket összeillesztünk a 8.3. ábrán látható módon, akkor egy félkörlapot kapunk. A félkörlap súlypontjának  $y_S^{fk}$  koordinátája megegyezik a negyedkörcikk súlypontjának  $y_S^{nk}$  koordinátájával, ugyanis a (3.89) képlet alkalmazása az alábbi eredményre vezet:

$$y_S^{fk} = \frac{y_S^{nk} A^{nk} + y_S^{nk} A^{nk}}{2A^{nk}} = y_S^{nk}. \quad (8.28)$$

Itt  $nk$  a negyedkörcikkhez,  $fk$  pedig a félkörlapoz tartozó mennyiségeket jelöli.

A tengelyre számított másodrendű nyomatékok a fentiekhez hasonlóan határozhatók meg:

$$I_y^{nk} = \int_{(A)} x^2 dA = \int_0^R x^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{R^4 \pi}{16} = \frac{d^4 \pi}{256}, \quad (8.29)$$

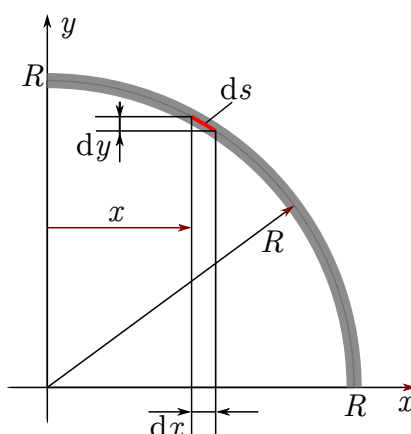
ahol  $d = 2R$  a teljes kör átmérőjét jelöli.

### 8.2.2. Negyedkörív alakú rúd súlypontja

Osszuk fel a negyedkörív alakú rudat elemi  $ds$  hosszúságú ívekre, a 8.4. ábrának megfelelően! Ha egy ilyen elem végpontjainak  $x$  illetve  $y$  koordinátái között  $dx$  illetve  $dy$  a különbség, akkor a hossza kifejezhető  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  alakban.

Mivel  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ , ezért  $dy = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx$ . Ha ezt az eredményt behelyettesítjük  $ds$  képletébe, akkor azt kapjuk, hogy

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx. \quad (8.30)$$



8.4. ábra. Negyedkörív alakú rúd

A súlypont (3.87) képletét alkalmazva, és kihasználva, hogy a rúd teljes hossza  $L = 2R\pi/4 = R\pi/2$ ,

$$x_S = \frac{\int_{(L)} x ds}{L} = \frac{\int_0^R x \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} dx}{R\pi/2} = \frac{R^2}{R\pi/2} = \frac{2R}{\pi}. \quad (8.31)$$

A rúd szimmetriája miatt  $y_S = x_S$ .

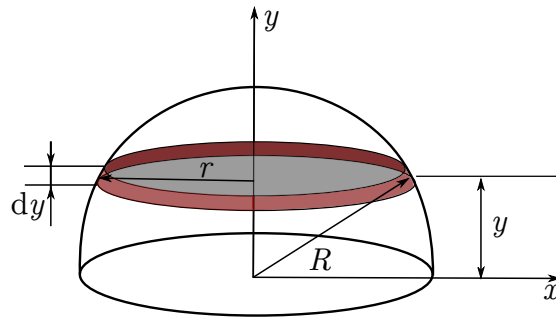
### 8.2.3. Félgömb súlypontja

Osszuk fel a félgömböt elemi  $dy$  vastagságú és  $r$  sugarú korongokra, a 8.5. ábrának megfelelően! Az  $y$  koordinátánál lévő korong sugara  $r = \sqrt{R^2 - y^2}$ , ezért az ehhez tartozó elemi térfogat  $dV = r^2\pi dy = (R^2 - y^2)\pi dy$ , a félgömb térfogata pedig

$$V = \int dV = \pi \int_0^R (R^2 - y^2) dy = \frac{2}{3}\pi R^3. \quad (8.32)$$

A súlypont (3.71) képletét alkalmazva

$$y_S = \frac{\int_{(V)} y dV}{V} = \frac{\pi \int_0^R y(R^2 - y^2) dy}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{R^4\pi/4}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{8}R. \quad (8.33)$$

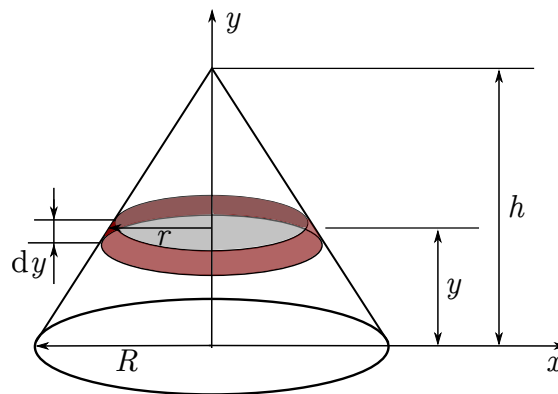


8.5. ábra. Félgömb súlypontjának számítása

### 8.2.4. Kúp súlypontja

Osszuk fel a kúpot elemi  $dy$  vastagságú és  $r$  sugarú korongokra! Ha a kúp magassága  $h$ , akkor az  $y$  koordinátánál egy ilyen korong sugara  $r = (h - y)R/h$  (hasonló háromszögek:  $r/R = (h - y)/h$ ). Tehát az ehhez tartozó elemi térfogat  $dV = r^2\pi dy = (h - y)^2R^2/h^2 \pi dy$ , és a kúp térfogata

$$V = \int dV = \pi \int_0^R (h - y)^2 R^2 / h^2 dy = \frac{1}{3} \pi h R^2. \quad (8.34)$$

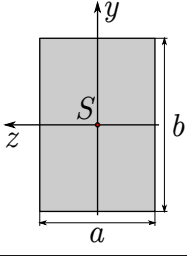
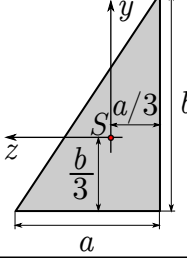
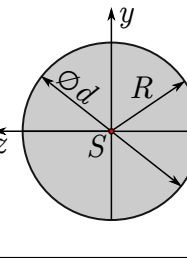
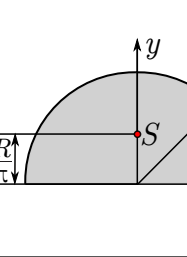
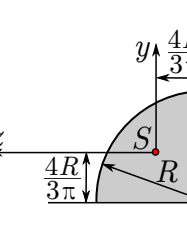


8.6. ábra. Kúp súlypontjának meghatározása

A súlypont (3.71) képletét alkalmazva

$$y_S = \frac{\int_{(V)} y dV}{V} = \frac{\pi \int_0^R y (h - y)^2 R^2 / h^2 dy}{V} = \frac{R^2 \pi h^2 / 12}{1/3 \pi R^2 h} = \frac{1}{4} h. \quad (8.35)$$

## 8.3. Síkidomok másodrendű nyomatékai

	$I_y = \frac{a^3 b}{12}, \quad I_z = \frac{a b^3}{12}, \quad I_{yz} = 0$
	$I_y = \frac{a^3 b}{36}, \quad I_z = \frac{b^3 a}{36}, \quad I_{yz} = -\frac{a^2 b^2}{72}$
	$I_y = I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{d^4 \pi}{64}, \quad I_{yz} = 0$
	$I_y = \frac{R^4 \pi}{8}, \quad I_z = R^4 \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right), \quad I_{yz} = 0$
	$I_y = I_z = R^4 \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right), \quad I_{yz} = -\frac{4R^4}{9\pi}$

8.7. ábra. Néhány síkidom súlypontra számított másodrendű nyomatékai

## 8.4. A legfontosabb szakkifejezések angol megfelelői

Ebben a fejezetben néhány fontos szakkifejezés angol megfelelőjét gyűjtöttük ki, hogy megkönnyítsük az olvasó eligazodását a nemzetközi szakirodalomban. Felhívjuk arra a figyelmet, hogy sajnos nem minden elnevezés esetében egységes a szakirodalom, ezért előfordulhat, hogy az itt szereplő kifejezésektől eltérőeket használnak egyes kutatócsoportokban. Néhány kifejezésnek nem találtuk meg az angol megfelelőjét, ezeket legtöbbször csak körülírják a szakkönyvekben. További nehézséget jelent a fordítás során, hogy bizonyos tudományos eredményeket más-más tudósnak tulajdonítanak a különböző országokban, ezért az angol nyelvű elnevezés egyes esetekben különbözik a magyartól.

akció-reakció elv	principle of action and reaction
anyag pont	particle
átmetsző módszer	method of sections
befogott tartó	cantilever
belső erők	internal forces
csavarás	torsion
csiga	pulley
csomópont	node
csomóponti módszer	method of joints
csukló	joint
csúszka	slider
deformáció	deformation
determináns	determinant
egységvektor	unit vector
ék	wedge
eredő	resultant
erő	force
erő egyensúlyi egyenletek	force balance equations
erőcsavar	wrench
erőpár	couple
egyenértékű erőrendszer	equivalent force system
Eytelwein-egyenlet	Eytelwein equation, capstan equation
feszültség	stress
főmásodrendű nyomaték	principal moment of inertia
főtengelyek	principal axes
Gerber-tartó	Gerber girder
gömbcsukló	ball and socket joint
gördülés	rolling
hajlítás	bending
hajlítónyomaték	bending moment
hatásvonal	line of action
igénybevétel	stress resultant
ív hosszparaméter	arc length
kényszer	constraint

kéttámaszú tartó	simply supported beam
kihajlás	buckling
konzolos tartó	cantilever
kölcsönhatás	interaction
kötél	rope, string
közös támadáspontú erők	concurrent forces
közös síkba eső erők	coplanar forces
külső erő	externally applied force
lejtő	inclined plane
megoszló erő	force distribution, distributed force/load
merev test	rigid body
Newton-törvények	Newton's laws
nyírás	shear force
normáligénybevétel	tension (húzás), compression (nyomás)
nyomaték	moment, torque
nyomaték egyensúlyi egyenletek	moment balance equations
rácsos szerkezet	truss
reakcióerő	reaction force
rúd	bar
síkcsukló	hinge, pin
skaláris szorzat	dot product, inner product
statikai nyomaték	first area moment
statikailag határozott/határozatlan	statically determinate/indeterminate
statikai rúd	two-force body/member
Steiner-tétel	parallel axis theorem
súlypont	centroid, centre of gravity
súrlódás	friction
súrlódási félkúpszög	friction angle
szabadsági fok	degree(s) of freedom
szabadtest-ábra	free body diagram
szuperpozíció-elv	principle of superposition
támadáspont	point of action
tapadási/csúszási súrlódási tényező	static/dynamic(kinetic) coefficient of friction
tengelyre számított nyomaték	moment about an axis
statikailag túlhatározott szerkezet	redundant structure
vakrúd	zero force member
vektoriális szorzat	cross product, vector product
vektorkettős	dynamite/screw





# Felhasznált és ajánlott irodalom

- [1] Elter Pálné. *Statika példatár*. Műegyetemi Kiadó, 45040, 2000.
- [2] Muttnyánszky Ádám. *Statika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1957.
- [3] M. Csizmadia Béla and Nándori Ernő (szerk.). *Mechanika mérnököknek – Statika*. Nemzeti Könyvkiadó, Budapest, 1996.
- [4] Szeidl György. *Műszaki mechanika – A vektor- és tenzorszámítás alapismeretei mérnököknek*. Miskolci Egyetem, 2014.
- [5] Agárdy Gyula and Lublós László. *Mechanika I. – Statika*. Széchenyi István Egyetem, 2006.
- [6] Pattantyús Ábrahám Géza. *Gépész- és villamosmérnökök kézikönyve*. Műszaki Könyvkiadó, 1961.
- [7] Muttnyánszky Ádám. *Szilárdságtan*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.



# A felhasznált ábrák forrásai

- [A1] <https://www.ctvnews.ca/canada/difficult-to-top-new-canadians-take-citizenship-oath-on-cn-tower-s-edgewalk-1.4126976>.
- [A2] <https://femina.hu/utazas/legveszelyesebb-hegyi-utak/>.
- [A3] A szerző saját felvételei.
- [A4] <https://www.modernwoodenboat.com/boat-stability-for-dummies/>.
- [A5] <https://pixabay.com/hu/photos/toronydaru-daru-torony-építkezés-914607/>.
- [A6] [newcivilengineer.com/latest/mississippi-river-bridge-broken-beam-went-unnoticed-for-at-least-two-years-18-05-2021/](http://newcivilengineer.com/latest/mississippi-river-bridge-broken-beam-went-unnoticed-for-at-least-two-years-18-05-2021/).
- [A7] <https://www.progressiverailroading.com/mechanical/article/alltranstek-tackles-imploding-tank-car-legend-on-mythbusters-tv-show-47621>.
- [A8] [https://www.wallpapertip.com/wpic/jiwbr\\_solar-system-planet-sun-digital-art-wallpapers-hd/](https://www.wallpapertip.com/wpic/jiwbr_solar-system-planet-sun-digital-art-wallpapers-hd/).
- [A9] <https://www.timeout.com/things-to-do/10-virtual-roller-coaster-rides-for-at-home-thrills>.
- [A10] [https://oras.blog.hu/2017/10/04/mechanikus\\_orak\\_kezifelhuzos\\_vagy\\_automata](https://oras.blog.hu/2017/10/04/mechanikus_orak_kezifelhuzos_vagy_automata).
- [A11] <https://www.autonavigator.hu/cikkek/futomuhibak-nem-eleg-a-lengescsillapito-ellenorzese/>.
- [A12] <https://www.mm.bme.hu/rezgesmeres>.
- [A13] Magyar Bálint (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A14] <https://www.pikist.com/free-photo-vgvao>.
- [A15] <https://www.nextflow-software.com/automotive/rain-on-windshield/>.
- [A16] <https://www.railwaygazette.com/infrastructure/rzd-completes-replacement-kola-bridge/57488.article>.
- [A17] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A18] [https://hvg.hu/vilag/20100122\\_sorosdoboz\\_szuletesnap](https://hvg.hu/vilag/20100122_sorosdoboz_szuletesnap).

- [A19] <http://www.mtdl.hu/lpg-pb-gaztartalyok>.
- [A20] <https://dovilit.hu/haz-szerkezetek-epitese-fodem/>.
- [A21] <https://www.emag.hu/viszkoelasztikus-furdoszobai-szonyeg-d1000122/pd/dchfrsbbm/>.
- [A22] A szerző saját felvételei.
- [A23] [http://www.taneszkozcentrum.hu/rugos\\_eromero\\_30n\\_1512](http://www.taneszkozcentrum.hu/rugos_eromero_30n_1512).
- [A24] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A25] <https://tiresvote.com/articles/everything-you-need-know-about-contact-patch/>.
- [A26] <http://www.tyresdontspoil.com/articles/3-things-to-know-about-tyres.html>.
- [A27] <https://wusthof.hu/termekek/kesek>.
- [A28] <https://www.dreamstime.com/photos-images/hand-balloon-needle.html>.
- [A29] <http://www.supraconductivite.fr>.
- [A30] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A31] A szerző saját felvételei.
- [A32] A szerző saját felvételei.
- [A33] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A34] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A35] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A36] <https://hirmagazin.sulinet.hu/hu/tudomany/a-vacuum-vane-ott-valami-ahol-semmi-sincs>.
- [A37] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A38] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A39] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A40] <https://structurae.net/en/structures/jozef-pilsudski-bridge/media>.
- [A41] <https://skyciv.com/education/types-of-supports-in-structural-analysis/>.
- [A42] A szerző saját felvétele.
- [A43] A szerző saját felvétele.
- [A44] A szerző saját felvétele.

- [A45] <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=6052726>.
- [A46] képszám: 56166 Fortepan, Rádió és Televízió Újság.
- [A47] A szerző saját felvétele.
- [A48] <https://civildigital.com/types-of-structural-supports-boundary-conditions/>.
- [A49] A szerző saját felvétele.
- [A50] A szerző saját felvételei.
- [A51] <https://www.autonavigator.hu/cikkek/kenyelmesen-ulsz-jobb-lenne-rendesen/>.
- [A52] <https://pixabay.com/hu/photos/fogantyú-kormány-kerékpár-4562730/>.
- [A53] A szerző saját felvételei.
- [A54] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A55] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A56] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A57] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A58] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A59] A szerző saját felvételei.
- [A60] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A61] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A62] Takács Dénes (BME Műszaki Mechanikai Tanszék).
- [A63] A szerző saját felvétele.
- [A64] A szerző saját felvételei.