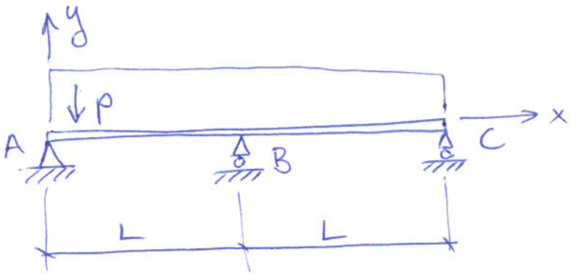
13. gyakorlat

Statikailag határozatlan szerkezetek

7.8



A feladat statikailag határozatlan!

Miért? 1 rúd síkban $\boxed{3}$ DoF (↔, ↕, ↻)

A-nál megtámasztás: $\boxed{-2}$ DoF (↔, ↕)

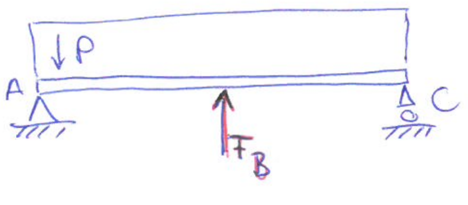
B-nél görgő: $\boxed{-1}$ DoF (↕)

C-nél görgő: $\boxed{-1}$ DoF (↕)

↳ Degree Of Freedom

Tehát: $3-2-1-1=-1$ DoF (0 DoF lenne a határozott)

Határozottá tesszük úgy, hogy a B-nél levő támaszt levesszük, és egy F_B (ismeretlen) erővel helyettesítjük. Később fontos lesz, hogy a B-nél a lehajlás értéke 0, hiszen a görgős támasz gátolja az y irányú elmozdulást.



→ így már határozott!

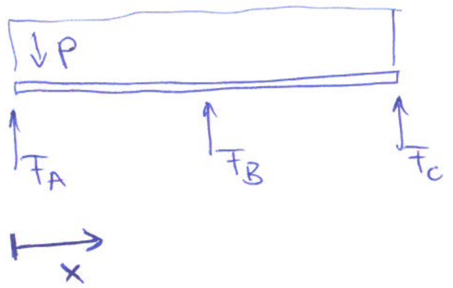
$\underbrace{3-2}_{A}\underbrace{-1}_{C}=\underline{\underline{0}}$ ✓

Castigliano-tétel, alakváltozási feltétel: $\frac{\partial U}{\partial F_B}=0$, mert az F_B-nél a lehajlás zérus!

Csak a hajlításból származó alakváltozási energiát vesszük figyelembe! (U_v-t elhanyagoljuk mindig, N és M_t igénybevétel pedig nincs.)

$M_h(x)$ függvények felírása:

SZTÁ:



($F_{Ax} = 0$, $\sum F_x = 0$ -ból jön)

$$\sum F_y = 0 \rightarrow F_A + F_B + F_C - p \cdot 2L = 0$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \rightarrow -2L \cdot p \cdot L + F_B \cdot L + F_C \cdot 2L = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_C &= pL - \tfrac{1}{2} F_B \\ F_A &= F_C = pL - \tfrac{1}{2} F_B \end{aligned}}$$

A reakciókat F_B-vel kell kifejezni! A reakciók megjelennek az $M_h(x)$ függvényekben, amiket F_B szerint deriválunk. Ha nem F_B-vel fejeznénk ki őket, akkor a deriválásnál elvesztenénk a reakciókat, $\frac{\partial M_h}{\partial F_B}$ 0 lenne, s pl. az I. szakaszban nem kapnánk eredményt.

Tehát $M_{h1}(x)$ és $M_{h2}(x)$:

$$x: 0 \ldots L \longrightarrow M_{h1}(x) = -F_A \cdot x + p\frac{x^2}{2} = -\left(pL - \frac{1}{2}F_B\right)x + p\frac{x^2}{2} =$$

$$= -pLx + \frac{1}{2}F_B x + p\frac{x^2}{2}$$

$$x: L \ldots 2L \longrightarrow M_{h2}(x) = M_{h1}(x) - F_B(x-L) = \frac{1}{2}F_B x - pLx + p\frac{x^2}{2} - F_B(x-L)$$

Deriváltak:

$$\frac{\partial M_{h1}(x)}{\partial F_B} = \frac{1}{2}x \qquad\qquad \frac{\partial M_{h2}(x)}{\partial F_B} = L - \frac{1}{2}x$$

Castigliano:

$$\frac{\partial U_{Mh}}{\partial F_B} = \emptyset \Longrightarrow \frac{\partial U_{Mh}}{\partial F_B} = \frac{1}{IE}\left[\int_0^L M_{h1}(x) \cdot \frac{\partial M_{h1}(x)}{\partial F_B}dx + \int_L^{2L} M_{h2}(x) \cdot \frac{\partial M_{h2}(x)}{\partial F_B}dx\right] = \emptyset$$

Integrálás után:

$$\frac{1}{IE}\underbrace{\left[\left(\frac{F_B L^3}{12} - \frac{5pL^4}{48}\right) + \left(\frac{F_B L^3}{12} - \frac{5pL^4}{48}\right)\right]}_{=0} = \emptyset \rightarrow \boxed{F_B = \frac{5}{4}pL}$$

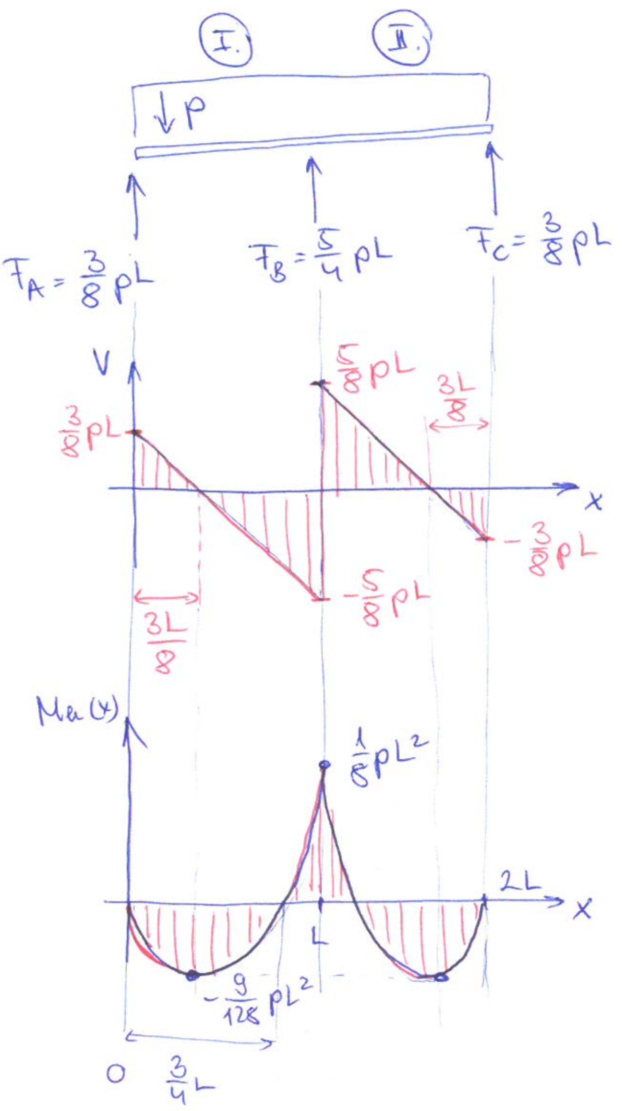
F_A és F_C is számolható már:

$$\boxed{F_A = F_C = \frac{3}{8}pL}$$

Tehát: hányszor nagyobb erő ébred B-nél mint A vagy C-nél?

$$\underbrace{\frac{F_B}{F_A} = \frac{F_B}{F_C}}_{\text{mert } F_A = F_C} = \frac{10}{3} \longrightarrow$$ kb. 3,33-szor nagyobb erő ébred B-nél.

Igénybevételi függvények ábrázolása: $(N = \emptyset,\ M_t = \emptyset)$



I. $x: 0 \ldots L$

$$V_1(x) = F_A - p \cdot x = \frac{3}{8}pL - px$$

$$V_1(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{3}{8}L$$

$M_{h1}(x)$ szélsőértéke:

$$M_{h1}\left(x = \frac{3}{8}L\right) = -\frac{9}{128}pL^2$$

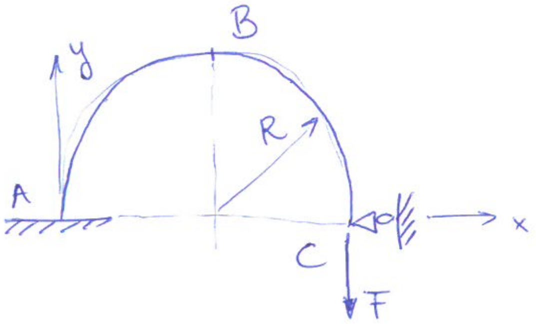
$$\underbrace{M_{h1}(x = L)}_{\text{határon}} = \frac{1}{8}pL^2$$

$\to$ első szakaszon előjelet vált $\to$ hol 0?

$$M_{h1}(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{3}{4}L$$

II. szimmetrikus!

7.10 Reakciók értéke?



Statikailag határozatlan!

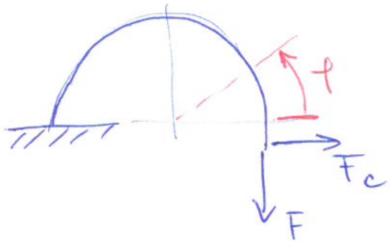
Mert: rúd 3 DoF (↔, ↕, ↻)

befogás: − 3DoF

görgő: − 1 DoF

$\Rightarrow$ $3 - 3 - 1 = \boxed{-1}$ DoF

Határozottá tesszük: görgőt elvesszük, helyére F_C.



F_C irányába nem mozog!

$\Rightarrow$ Alakváltozási feltétel: $\frac{\partial U}{\partial F_C} = 0$

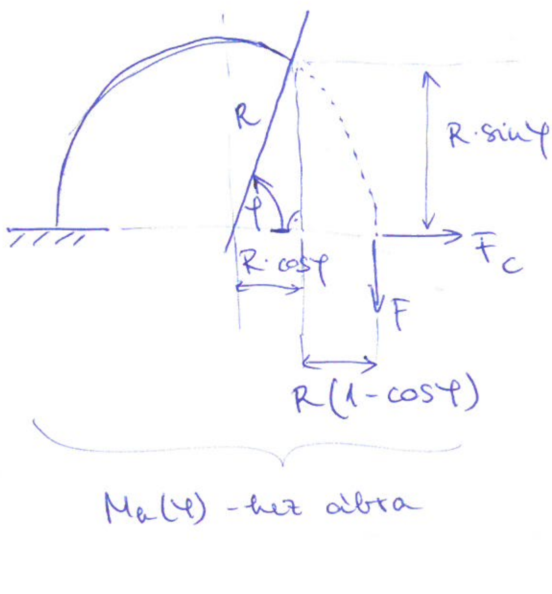
U-ban most U_{Mh} és U_N lesz (csavarás nincs, nyírást el szoktuk hanyagolni.)

$$U = U_{Mh} + U_N$$

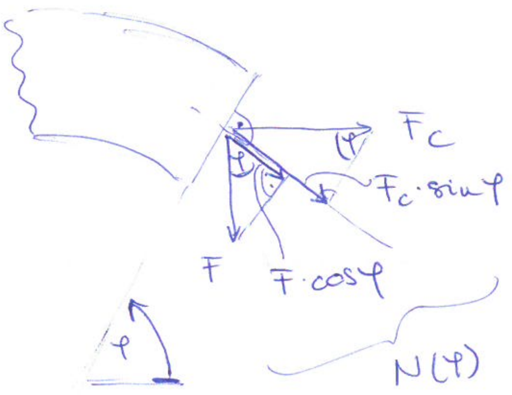
Itt most a reakcióerőket, nyomatékot nem kell kifejezni F_C-vel, mert ha a C felőli végtől írjuk fel az igénybevételi függvényeket, a reakciók nem jelennek meg.

Igénybevételi függvények:

$$\varphi: 0 \ldots \pi \begin{cases} N(\varphi) - F\cdot\cos\varphi + F_C\cdot\sin\varphi \\ M_h(\varphi) = FR(1-\cos\varphi) - F_C\cdot R\cdot\sin\varphi \end{cases}$$



$M_h(\varphi)$-hez ábra



$$\frac{\partial N(\varphi)}{\partial F_c} = \sin\varphi \qquad \frac{\partial M_h(\varphi)}{\partial F_c} = -R\cdot\sin\varphi$$

görbe rúd!!!

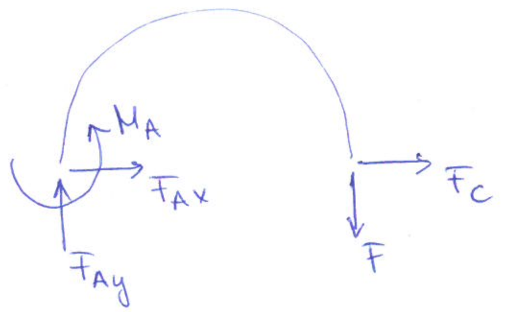
$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{\partial U}{\partial F_c}}_{\frac{\partial U_{Mh}}{\partial F_c}+\frac{\partial U_N}{\partial F_c}} = \frac{1}{AE}\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} N(\varphi)\cdot\frac{\partial N(\varphi)}{\partial F_c}\boxed{R\,d\varphi} + \frac{1}{IE}\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\pi}} M_h(\varphi)\,\frac{\partial M_h(\varphi)}{\partial F_c}\boxed{R\,d\varphi} = 0$$

Integrálás után:

$$F_c\cdot\frac{\pi R}{2A} + \left(F_c\pi - 4F\right)\cdot\frac{R^3}{2I} = 0 \longrightarrow \boxed{F_c = \frac{4FAR^2}{\pi\left(I+AR^2\right)}}$$

Reakciók?

SZTÁ



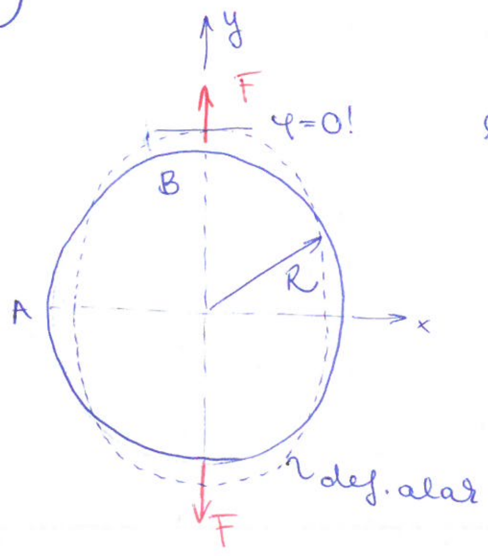
$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{F_{Ax} = -F_c}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{F_{Ay} = F}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 \rightarrow +M_A - F\cdot 2R = 0$$

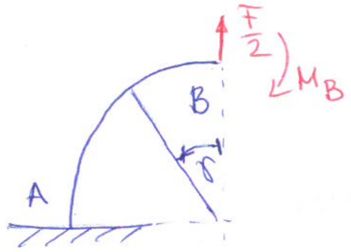
$$\boxed{M_A = 2FR}$$

7.12



Átalakítjuk a feladatot, szimmetriát kihasználva: (Részletek: Jegyzet 250.–257. o.)

"A" pont csak az x tengelyen mozogna



M_B: elhagyott rész hatása

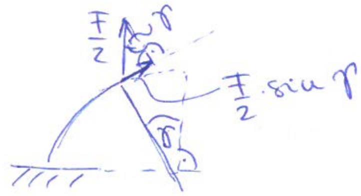
(Kidolgozás 7. oldalán magyarázat, hogy miért így néz ki a modell.)

B-ben a szögelfordulás zérus:

$$\varphi_B = 0 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial M_B} = 0 \qquad U = U_{Mh} + U_N \qquad (M_t = 0,\ V \approx 0)$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_B} = \frac{\partial U_{Mh}}{\partial M_B} + \frac{\partial U_N}{\partial M_B}$$

$$N(\gamma) = \frac{F}{2}\cdot \sin\gamma \longrightarrow \frac{\partial N(\gamma)}{\partial M_B} = 0 \longrightarrow \frac{\partial U_N}{\partial M_B} = 0 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial M_B} = \frac{\partial U_{Mh}}{\partial M_B}$$



$$M_h(\gamma) = M_B - \frac{F}{2}\cdot \sin\gamma \cdot R \longrightarrow \frac{\partial M_h(\gamma)}{\partial M_B} = 1$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi_B = \frac{1}{IE}\int_{\boxed{0}}^{\boxed{\frac{\pi}{2}}} \underbrace{\left(M_B - \frac{F}{2}R\sin\gamma\right)}_{M_h(\gamma)} \underbrace{1}_{\frac{\partial M_h(\gamma)}{\partial M_B}} \boxed{R\,d\varphi} = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(M_B - \frac{F}{2}R\sin\gamma\right) d\varphi = 0$$

(R-et ki lehet vinni az $\int$ elé)

$$\frac{1}{2}\left(M_B \cdot \pi - FR\right) = 0 \longrightarrow \boxed{M_B = \frac{FR}{\pi}}$$

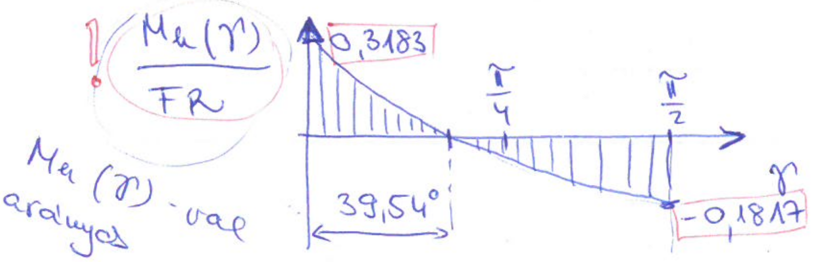
Ezzel a hajlítónyomatéki igénybevétel:

$$M_h(\gamma) = \underbrace{FR}_{\text{konstans}}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin\gamma\right)$$ tudjuk szám szerint

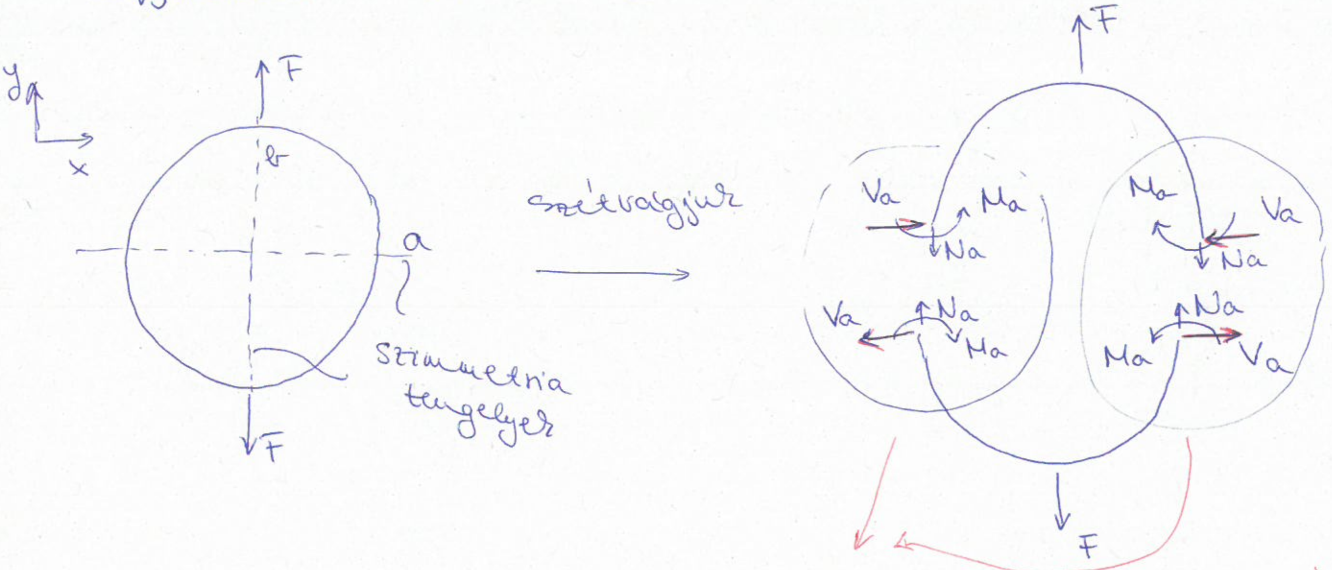
$$M_h(\gamma = 0) = \frac{1}{\pi}\cdot FR = \boxed{0{,}3183}\cdot FR$$

$$M_h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)FR = \boxed{-0{,}1817}\cdot FR$$

$$M_h(\gamma) = 0 \longrightarrow \gamma^* = \arcsin\frac{2}{\pi} = 0{,}69\,\text{rad} = \underline{39{,}54°}$$



Egyszerűsített modell létrehozása:

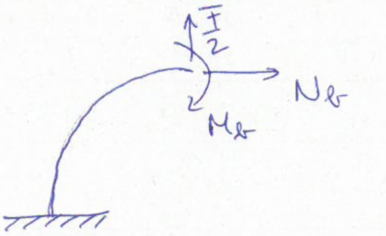


Szimmetria miatt a rúdvégek igénybevételének is szimmetrikusnak kell lennie! → Ez V_a-ra csak akkor igaz, ha $V_a = 0$

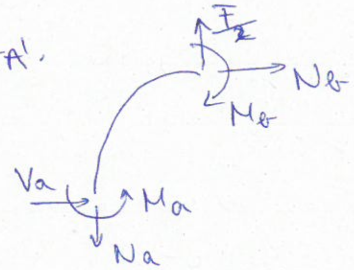
⟹ SZIMMETRIATENGELY MENTÉN A NYÍRÓ IGÉNYBEVÉTEL ZÉRUS!

Itt a φ is zérus és y irányban sem mozog → rakhatunk ide egy befogást.

Most vágjuk el b mentén! Tudjuk, hogy $V_b = 0$. (ÉS $F/2$ lesz F helyett.)



SZTA!



$V_a = 0$ az előző rész miatt!

$$\sum F_x = 0 = N_b + \underbrace{V_a}_{0}$$

$$\Longrightarrow N_b = 0$$

Tehát: