11. gyakorlat

Alakváltozási energia

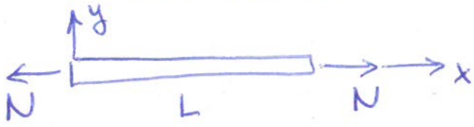
↳ Castigliano-tételhez kell, következő előadás anyaga

Elméleti összefoglaló

Jegyzet: 203 – 208. oldal

Rudakban/Gerendákban felhalmozódó alakváltozási energia.

① Normál igv.:



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

Alakváltozási energiasűrűség:

$$u = \frac{1}{2}\,\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\,\sigma_x \underbrace{\varepsilon_x}_{\sigma_x/E} = \frac{1}{2E}\,\sigma_x^2 = \frac{N^2}{2A^2E}$$

A dx hosszúságú rúdszakaszban felhalmozódó energia:

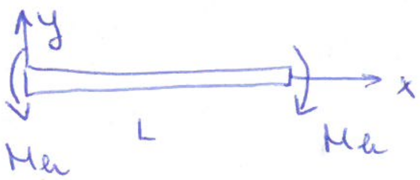
$$dU = u \cdot dV = u \cdot A \cdot dx = \frac{N^2}{2AE}\,dx$$

Az L hosszú rúdban tárolt alakváltozási energia:

$$\boxed{U = \int_0^L \frac{N^2}{2AE}\,dx} \geq 0$$

N, A, E állandó a rúd mentén: $U = \dfrac{N^2 \cdot L}{2AE}$

② Hajlító igv.:



$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \frac{M_h}{I_z} \cdot y \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

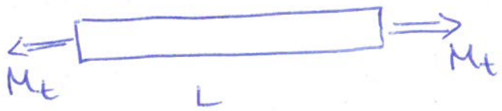
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

$$u = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2E}\sigma_x^{2} = \frac{1}{2E}\frac{M_h^{2}}{I_z^{2}}\,y^{2}$$

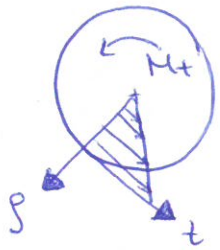
$$dU = \underbrace{\left[\int_{(A)} u\,dA\right]}_{\text{"}u\cdot A\text{"}} dx = \frac{1}{2E}\frac{M_h^{2}}{I_z^{2}}\underbrace{\int_{(A)} y^{2}\,dA}_{I_z}\,dx = \frac{1}{2E}\frac{M_h^{2}}{I_z}\cdot dx$$

$$\boxed{U = \int_0^L \frac{M_h^{2}}{2 I_z E}\,dx} \geq 0$$

3.) Csavaró igv..



$$\underset{(\rho,t,x)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xt} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xt} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xt} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xt} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\tau_{xt} = \frac{M_t}{I_p}\cdot\rho \qquad \gamma_{xt} = \frac{\tau_{xt}}{G}$$

$$u = \frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\tau_{xt}\cdot\gamma_{xt} = \frac{1}{2G}\tau_{xt}^{2} = \frac{1}{2G}\frac{M_t^{2}}{I_p^{2}}\rho^{2}$$

$$dU = \left[\int_{(A)} u\,dA\right] dx = \frac{1}{2G}\frac{M_t^{2}}{I_p^{2}}\underbrace{\int_{(A)} \rho^{2}\,dA}_{I_p}\cdot dx = \frac{1}{2G}\frac{M_t^{2}}{I_p}\,dx$$

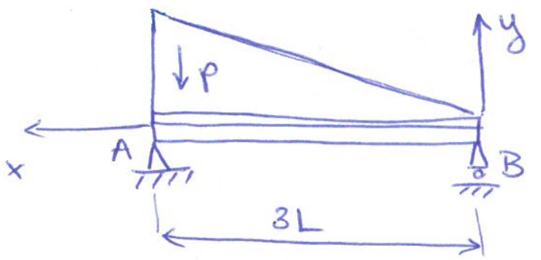
$$\boxed{U = \int_0^L \frac{M_t^{2}}{2 I_p G}\,dx} \geq 0$$

Összetett igénybevétel: $\boxed{U = U_N + U_{Mt} + U_{Mh}}$

(U_V-t, nyírásból adódót elhanyagoljuk)

Feladatok:

(7.5) 1. Határozzuk meg a rúdban felhalmozódó alakváltozási energia nagyságát! A tartó keresztmetszete: 'a' élhosszúságú négyzet.



$p = 2\,kN/m$

$a = 20\,mm$

$L = 500\,mm$

$E = 200000\,MPa$

} csak paraméteresen számolunk!

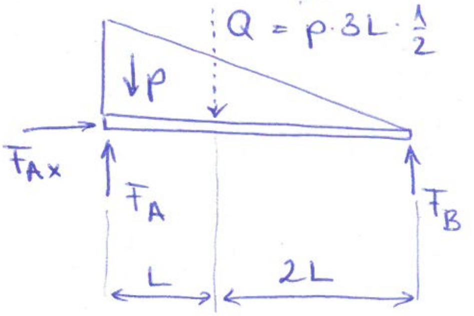
Alakváltozási energia: [Nmm] HAJLÍTÁSBÓL ADÓDIK

$$U_{Mh} = \int_0^{3L} \frac{M_h^2}{2IE}\,dx \longrightarrow \text{kell } I\cdot E \text{ és } M_h(x)$$

Hajlítómerevség: $I\cdot E = \frac{a^4}{12}\cdot E$

SZTÁ:

$$Q = \overbrace{p\cdot 3L\cdot \tfrac{1}{2}}^{\triangle \text{ területe}}$$



(1) $\sum F_x = 0 \longrightarrow \boxed{F_{Ax} = 0}$

(2) $\sum F_y = 0 \longrightarrow F_A + F_B - p\cdot 3L\cdot\frac{1}{2} = 0$

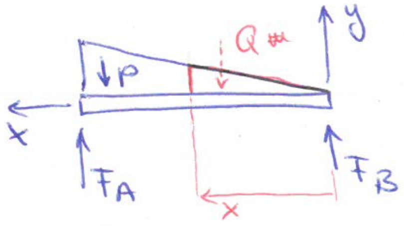
(3) $\sum M_{(A)} = 0 \longrightarrow p\cdot \cancel{3L}\,\frac{1}{2}\cdot L - F_B\cdot \cancel{3L} = 0$

(3)-ból: $F_B = \frac{pL}{2}$

(2)-ből: $F_A = p\cdot L$

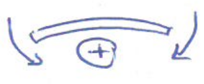
Q: - nagysága a síkidom területe
- helye a síkidom súlypontja

Hajlítónyomatéki függvény: (jobbról)



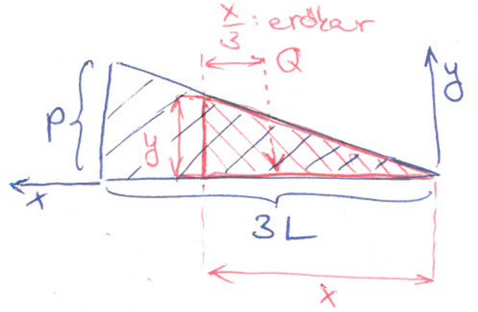
$$M_h(x) = -F_B\cdot x + \underbrace{\left(\frac{p}{3L}x\right)\cdot\frac{x}{2}}_{\text{erő}}\cdot\underbrace{\frac{x}{3}}_{\text{erőkar}} = -\frac{1}{2}L\,p\,x + \frac{p x^3}{18L}$$

(*)



$$U_{Mh} = \int_0^{3L} \frac{\left(-\frac{1}{2}Lpx + \frac{px^3}{18L}\right)^2}{2IE} = \dots = \frac{108 L^5 p^2}{35 a^2 \cdot E}$$

(*) Hasonló háromszögek:

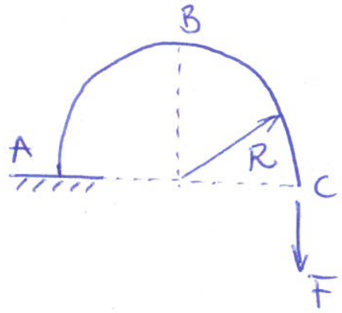


$$\frac{y}{p} = \frac{x}{3L} \rightarrow y = \frac{px}{3L}$$

erő: $Q = \frac{yx}{2} = \frac{px}{3L}\cdot\frac{x}{2}$

② Rúdban felhalmozódó energia nagysága?

(7.1) Normál és hajlító igb.?



$F = 100$ N

$d = 30$ mm

$R = 1000$ mm

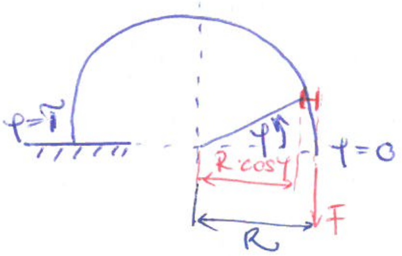
$E = 200000$ MPa

} csak paraméteresen számoljunk!

Megoldás:

$$IE = \frac{d^4\pi}{64}\cdot E \quad ; \quad AE = \frac{d^2\pi}{4}\cdot E$$

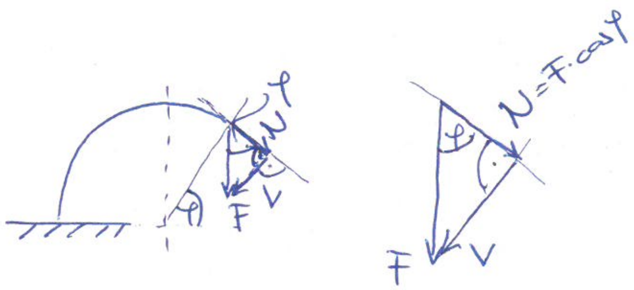
Hajlítónyomatéki igb.:



$$M_h(\varphi) = F\cdot R(1-\cos\varphi)$$

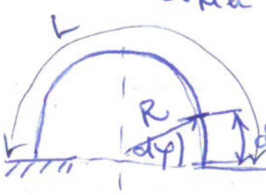
Normál igb.:

$$N(\varphi) = F\cdot\cos\varphi$$



Alakváltozási energiák:

$$U_{Mh} = \int_0^{\overset{\text{félkör hossza}}{L}} \frac{M_h^2}{2IE}\,dx = \int_0^{\pi}\frac{M_h^2(\varphi)}{2IE}\,R\cdot d\varphi = \frac{48F^2R^3}{d^4\cdot E} = 2962{,}96\ \text{Nmm}$$



dx: ívhossza

$dx = R\cdot d\varphi$ ($K = R\cdot 2\pi$, kör kerülete)

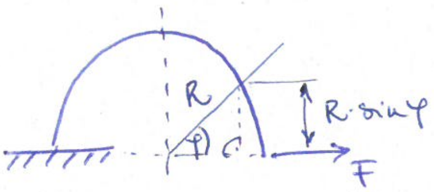
$$U_N = \int_0^{\pi} \frac{N^2(\varphi)}{2AE} R \cdot d\varphi = \frac{F^2 R}{d^2 E} = \underline{\underline{0{,}05666 \, Nmm}}$$

U_N és U_{Mh} aránya? $\frac{U_N}{U_{Mh}} \cdot 100 = 0{,}001875\,\%$

$\Downarrow$

U_N elhanyagolható!!!

Változtassuk az ábrát!



$\frac{U_N}{U_{Mh}}$ arány hogyan változik?

$M_h(\varphi) = -F \cdot R \cdot \sin\varphi$

$N(\varphi) = F \cdot \sin\varphi$

$$U_{Mh} = \int_0^{\pi} \ldots R \cdot d\varphi = \frac{16 F^2 R^3}{d^4 E} = 987{,}654 \, Nmm$$

$$U_N = \int_0^{\pi} \ldots R \cdot d\varphi = \frac{F^2 R}{d^2 E} = 0{,}055556 \, Nmm$$

$$100 \cdot \frac{U_N}{U_{Mh}} = 0{,}005625\,\%$$

$\Downarrow$

itt is elhanyagolható U_N!