2.1
3.1

10. gyakorlat

Rugalmas szál diffegyenlete, kihajlás

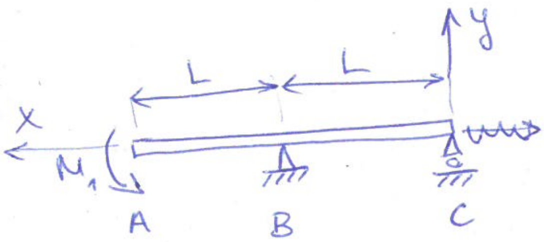
RUG.SZÁL.

(2.1) $M_1 = 2\,Nm$

$I \cdot E = 150\,Nm^2$ (hajlítómerevség)

$L = 1\,m$

$E = 200\,GPa$



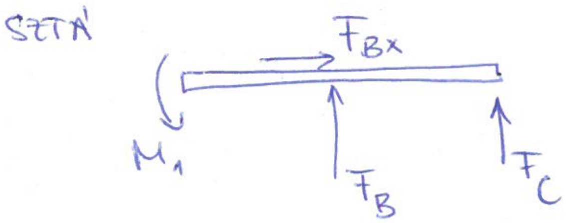
$$\boxed{w(x) = -\frac{M_h(x)}{I \cdot E}}$$ rugszál. diffe.

Megoldás:

a,

~ Egyensúlyi egyenletek, reakcióerők:

SZTÁ



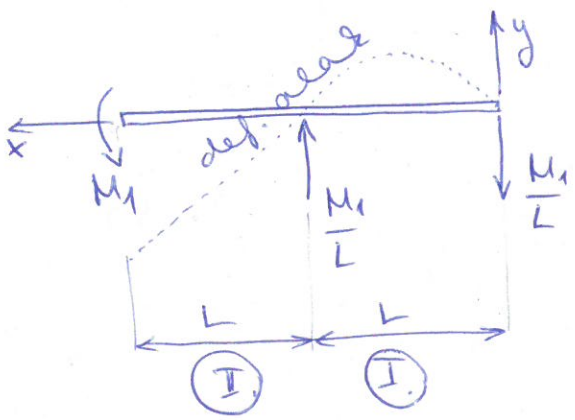
$\sum F_x = 0 \longrightarrow F_{Bx} = 0$

$\sum F_y = 0 \longrightarrow F_B + F_C = 0$

$\sum M_C = 0 \longrightarrow M_1 - F_B \cdot L = 0$

$$\boxed{F_B = \frac{M_1}{L} \qquad F_C = -\frac{M_1}{L}}$$

~ Koordinátarendszer, def. alak ábrázolása



Hajlítónyomatéki igénybevétel:

(+)

I. $M_{h1}(x) = \frac{M_1}{L} x \qquad x = 0 \dots L$

II. $M_{h2}(x) = M_1 \qquad x = L \dots 2L$

~ Rugalmas szál diffegyenlete I-n:

$$-I \cdot E\, w_1''(x) = M_{h1} = \frac{M_1}{L} \cdot x \qquad \Big/ \int \dots dx$$

$$-IEw_1'(x) = \frac{M_1}{2L}x^2 + C_1 \qquad \Big/ \int \dots dx$$

$$-IEw_1(x) = \frac{M_1}{6L}x^3 + C_1 x + C_2$$

(integrálási konstanst nem elfelejteni!)

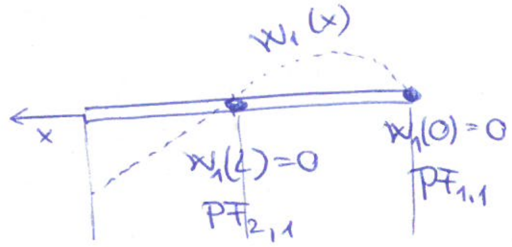
~ peremfeltételek az (I.) szakaszon:

(megtámasztás $x=L$, görgő $x=0$ → y irányban nem hajlik le)

$PF_{1,1}$: $w_1(0)=0$

$$0 = \frac{M_1}{6L}\cdot 0^3 + C_1\cdot 0 = C_2$$

$$0 = C_2$$



$PF_{2,1}$: $w_1(L)=0$

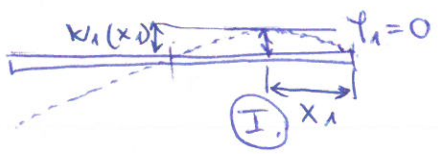
$$0 = \frac{M_1}{6L}\cdot L^3 + C_1\cdot L + \underbrace{0}_{C_2}$$

$$C_1 = -\frac{M_1}{6}\cdot L$$

$$\Longrightarrow \quad w_1(x) = \frac{1}{IE}\left[-\frac{M_1}{6L}x^3 + \frac{M_1}{6}Lx\right] = \frac{M_1}{6L\cdot IE}\left[L^2x - x^3\right] \text{ (lehajlás)}$$

$$\varphi_1(x) = w_1'(x) = \frac{M_1}{6L\cdot IE}\left(L^2 - 3x^2\right) \text{ (szögelfordulás)}$$

~ Maximális lehajlás: $w_1(x)$ szélsőértékét kell megkeresni. Ott van szélső érték, ahol a derivált 0. Derivált: meredekség, adott ponthoz húzott érintő. 0 meredekség → vízszintes érintő. $w_1'(x) = \varphi_1(x) = 0$, tehát a szögelfordulás 0.



$$w_1'(x) = 0$$

$$\varphi_1(x) = 0$$

$$L^2 - 3x^2 = 0 \longrightarrow x_1 = \pm\frac{L}{\sqrt{3}} = 0{,}577L = 577{,}35 \text{ mm}$$

((+) megoldás kell)

Itt a lehajlás értéke:

$$w_1(x_1)=\frac{M_1 L^2}{9\sqrt{3}\,I\,E}=0{,}8553\ \text{mm}$$

b)

~ Szögelfordulás az $x=0$ és $x=L$ helyeken:

$$\varphi_1(0)=\frac{M_1 L}{6IE}=0{,}127^\circ$$

$$\varphi_1(L)=-\frac{M_1 L}{3IE}=-2\varphi_1(0)=-0{,}254^\circ$$

~ Rug. szál diffegyenlete (II.) -n:

$$-IE\cdot w_2''(x)=M_{h2}=M_1 \qquad \Big/\int\ldots dx$$

$$-IE\,w_2'(x)=M_1 x+C_3 \qquad \Big/\int\ldots dx$$

$$-IE\cdot w_2(x)=\frac{M_1}{2}x^2+C_3x+C_4$$

~ Peremfeltételek (II.) -n:

$PF_{1,2}$: $\quad w_2'(L)=w_1'(L)$ (illesztési feltétel, a két függvény, w_1 és w_2 azonos értékűek L-nél és a deriváltjuk is azonos) (egy pontban nem lehet 2 különböző φ szögelfordulás)

$$-\frac{1}{IE}(M_1L+C_3)=-\frac{M_1L}{3IE}$$

$$C_3=-\frac{2}{3}M_1L$$

$PF_{2,2}$: $\quad w_2(L)=w_1(L)=0$

$$0=\frac{1}{2}M_1L^2-\frac{2}{3}M_1L^2+C_4$$

$$C_4=\frac{1}{6}M_1L^2$$

~ Tehát: $\quad w_2(x)=-\dfrac{1}{IE}\left(\dfrac{1}{2}M_1x^2-\dfrac{2}{3}M_1Lx+\dfrac{1}{6}M_1L^2\right)$ (lehajlás)

$$\varphi_2(x)=w_2'(x)=\frac{M_1}{3IE}(2L-3x) \quad \text{(szögelfordulás)}$$

~ Lehajlás és szögelfordulás a rúd végén: ($x = 2L$-nél)

$$w_2(2L) = -\frac{5}{6} \cdot \frac{M_1 L^2}{IE} = -11{,}111 \text{ mm}$$

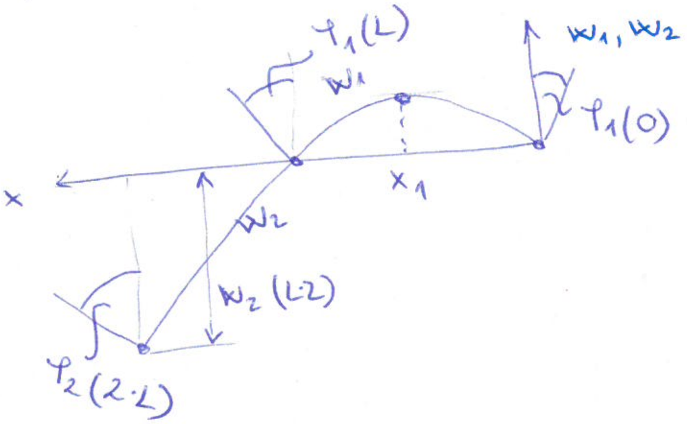
$$\varphi_2(2L) = -\frac{4M_1L}{3IE} = -1{,}019^\circ$$

~ Numerikusan:

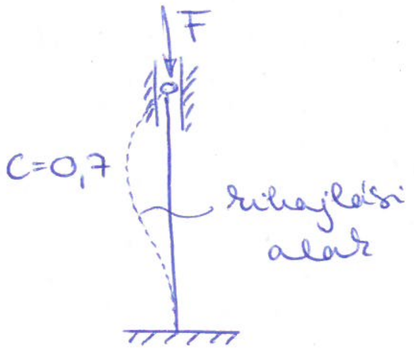
$$w_1(x) = \frac{x}{450} - \frac{x^3}{450\ 000\ 000} \quad [\text{mm}]$$

$$w_2(x) = -\frac{20}{9} + \frac{2x}{225} - \frac{x^2}{150\ 000} \quad [\text{mm}]$$

~ Ábrázolás:



3.1 KIHAJLÁS



$L_0 = 0{,}7 \cdot L = 2450$ mm (kihajlási hossz)

~ Feltételezzük, hogy az Euler-képlet áll:

$$F_t = \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2 I_2 \cdot E$$

~ Biztonság miatt: $n \cdot P = F_t = 300\ 000$ N

~ I_2: $I_2 = \frac{\pi}{64}\left[d^4 - (d-2t)^4\right] \longrightarrow t = ?$

$$300\ 000 = \left(\frac{\pi}{2450}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{64}\left[100^4 - (100-2t)^4\right] \cdot 72000$$

⋮

$t = 8{,}3$ mm

~ Karcsúsági tényező:

$$A = (100^2 - 83{,}4^2) \cdot \frac{\pi}{4} = 2391{,}1 \text{ mm}^2$$

$$I_z = (100^4 - 83{,}4^4) \cdot \frac{\pi}{64} = 2\,533\,899{,}91 \text{ mm}^4$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 32{,}55 \text{ mm} \quad \text{(inerciasugár)}$$

$$\lambda = \frac{L_0}{i_z} = \frac{2450}{32{,}55} = 75{,}27 \quad \text{(karcsúsági tényező)}$$

~ σ_0-hoz tartozó λ_0: (ellenőrizni kell, hogy a rúd karcsúsági tényezője azon a tartományon van-e, ahol az Euler hiperbola használható)

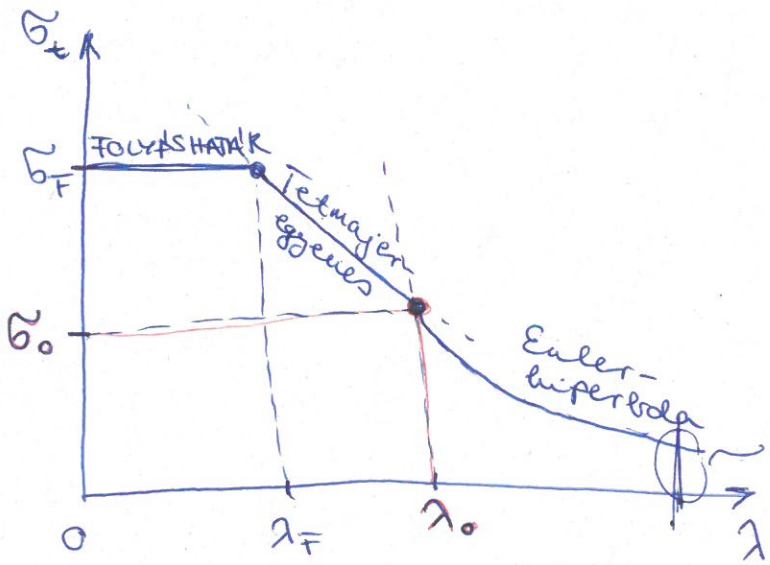
$$\sigma_t = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 E \longrightarrow \sigma_0 = \left(\frac{\pi}{\lambda_0}\right)^2 E$$

(Euler hiperbola)

$\frac{F_t}{A} = \sigma_t$, tehát F_t képletekből kijön

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_0}} = 38{,}48$$

$\lambda > \lambda_0 \longrightarrow$ Euler-képlet kell, tehát jót feltételeztünk



ez a diagram az anyagtól függ

mi itt vagyunk

"zömök" rúd

"karcsú" rúd