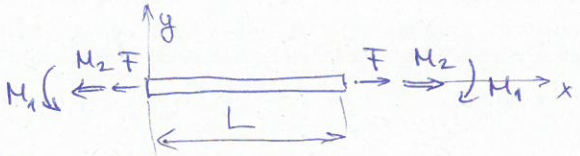
6.2
6.4
6.6

9. gyakorlat

Egyenértékű feszültség elméletek

(6.2) Megoldás



(konstans igénybevételi függvények!)
$N(x) = N$
$M_h(x) = M_1$
$M_t(x) = M_2$

Alakváltozási energia:

~ NORMÁL igénybevétel esetén: $$U_N = \int_0^L \frac{N^2(x)}{2AE}dx = \left[\frac{F^2 x}{2AE}\right]_0^L = \frac{2F^2L}{d^2\pi E}$$

~ HAJLÍTÓ —"— : $$U_{Mh} = \int_0^L \frac{M_h^2(x)}{2IE}dx = \left[\frac{M_1^2 x}{2IE}\right]_0^L = \frac{32M_1^2\cdot L}{d^4\pi\cdot E}$$

~ CSAVARÓ —"— : $$U_{Mt} = \int_0^L \frac{M_t^2(x)}{2I_pG}dx = \left[\frac{M_2^2 x}{2I_pG}\right]_0^L = \frac{32M_2^2L(1+\nu)}{d^4\pi\cdot E}$$

$$A = \frac{d^2\pi}{4}, \quad I = \frac{d^4\pi}{64}, \quad I_p = \frac{d^4\pi}{32}$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

Azonos alakváltozási energiasűrűséget szeretnénk az egyes terhelések hatására → $\boxed{U_N = U_{Mh} = U_{Mt}}$

M_1/F arány: $U_N = U_{Mh}$ → $$\frac{\cancel{2}F^2\cancel{L}}{d^{\cancel{2}}\cancel{\pi}\cancel{E}} = \frac{\overset{16}{\cancel{32}}M_1^2\cdot\cancel{L}}{d^{\cancel{4}\,2}\cancel{\pi}\cancel{E}}$$

$$\frac{d^2}{16} = \frac{M_1^2}{F^2} \longrightarrow \frac{M_1}{F} = \frac{d}{4}$$

M_2/F arány: $U_N = U_{Mt}$ → $$\frac{\cancel{2}F^2\cancel{L}}{d^{\cancel{2}}\cancel{\pi}\cancel{E}} = \frac{\overset{16}{\cancel{32}}M_2^2\cancel{L}(1+\nu)}{d^{\cancel{4}\,2}\cancel{\pi}\cancel{E}}$$

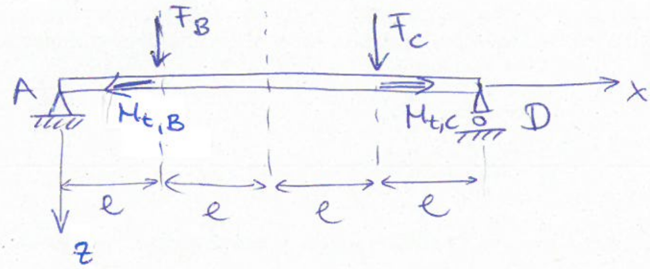
$$\frac{M_2}{F} = \frac{d}{4\sqrt{1+\nu}}$$

Teljes alakváltozási energia: (mind 3 igv. működik és ugyanakkora a belőlük származó U)

$$U = 3\cdot U_N = \frac{6F^2L}{d^2\pi E} = 0{,}095 \text{ Nm}$$

6.4 $d = 20\ mm$

$\sigma_{meg} = 300\ MPa$



$F_B = 300 + 2100 = 2400\ N$

$F_C = 1100 + 200 = 1300\ N$

(példatárban berajzolt értéket összeadjuk)

(tárcsák mereven vannak a tengelyhez rögzítve)

$M_{t,B} = (2100-300)\cdot 60 = 108000\ Nmm$

$M_{t,C} = (1100-200)\cdot 120 = 108000\ Nmm$

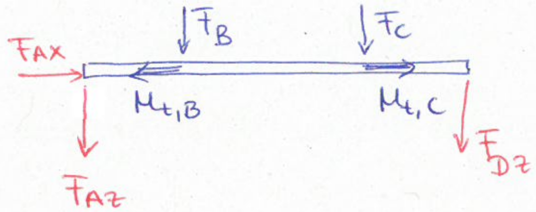
$M_{t,B}$-hez magyarázat:

$\rightarrow 2100\cdot 60 - 300\cdot 60$

$2100 > 300$, tehát $\leftarrow$

Megoldás:

SZTA:



$F_{Ax} = 0 \quad (\sum F_x = 0)$

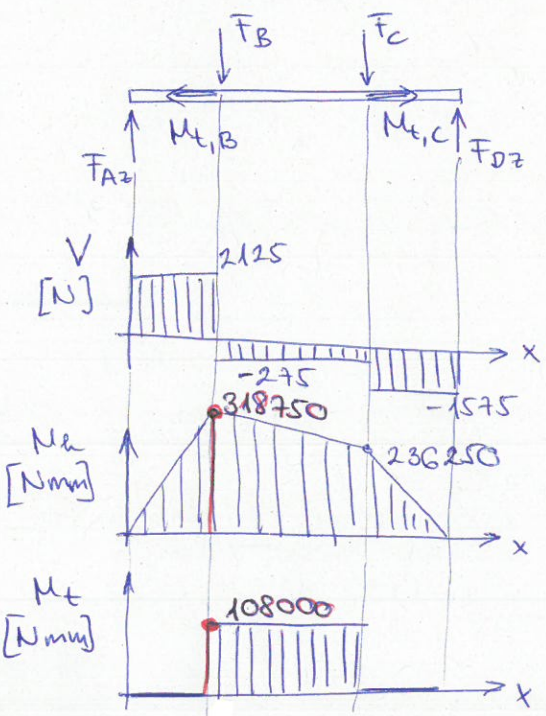
$\sum F_y = 0 \quad F_{Az} + F_{Dz} + F_B + F_C = 0$

$\sum M_A = 0 \quad F_B\cdot l + F_C\cdot 3l + F_{Dz}\cdot 4l = 0$

$\Downarrow$ 2 ismeretlen, 2 egyenlet

$$\boxed{\begin{aligned} F_{Az} &= -2125\ N \\ F_{Dz} &= -1575\ N \end{aligned}}$$

Igénybevételi ábrák: (függvények HF)



Veszélyes km.: $\boxed{B}$

$M_{red}^{Mohr} = \sqrt{318750^2 + 108000^2} = 336549\ Nmm$

$M_{red}^{HMH} = \sqrt{318750^2 + \frac{3}{4}\cdot 108000^2} = 332189\ Nmm$

$K_y = \frac{d^3\pi}{32} = 785{,}4\ mm^3$

$\sigma_{egy}^{Mohr} = \frac{M_{red}^{Mohr}}{K_y} = 428{,}51\ MPa$

$\sigma_{egy}^{HMH} = \frac{M_{red}^{HMH}}{K_y} = 422{,}96\ MPa$

Méretezés:

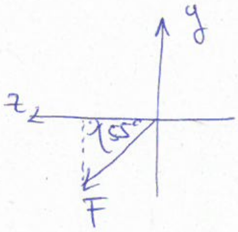
$$d_{min}^{Mohr} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot M_{red}^{Mohr}}{\pi\cdot\sigma_{meg}}} = 22{,}52\ mm \rightarrow$$ (ebből nagyobbat kapunk → érdemes ezt használni méretezéshez)

$$d_{min}^{HMH} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot M_{red}^{HMH}}{\pi\cdot\sigma_{meg}}} = 22{,}43\ mm$$

6.5 <u>Megoldás:</u> (nyírást elhanyagoljuk)

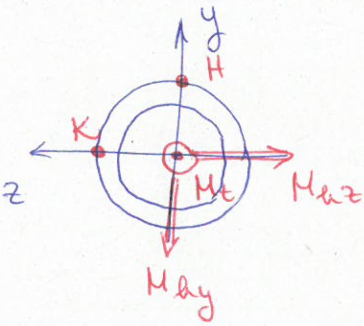
Rúd végén a terhelés:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16\cdot\sin 55^\circ \\ 16\cdot\cos 55^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -13\,106{,}4 \\ 9177{,}22 \end{bmatrix} N$$



Vizsgált km. súlypontjába redukált nyomatékvektor:

$$\underline{M} = \underline{r}\times\underline{F} = \begin{bmatrix} 700 \\ 0 \\ 1300 \end{bmatrix} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 17{,}0384 \\ -6{,}424 \\ -9{,}1745 \end{bmatrix} kNm$$



Hajlító és csavarónyomatékok $\underbrace{\text{nagysága}}_{\text{abs. érték!}}$:
(Kérdés: Melyik melyik?)

$M_t = 17{,}0384\ kNm$

$M_{hy} = 6{,}424\ kNm$

$M_{hz} = 9{,}1745\ kNm$

Keresztmetszeti jellemzők: (szélső szál távolsága: 70)

$$I = \frac{(140^4 - 126^4)\cdot\pi}{64} = 6{,}485\cdot 10^6\ mm^4\ (= I_y = I_z)$$

$$I_p = 2\cdot I = 12{,}97\cdot 10^6\ mm^4$$

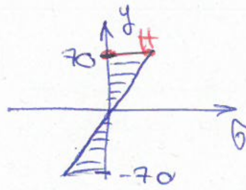
$$K = \frac{I}{70} = 92643{,}8\ mm^3\ (= K_y = K_z)$$

$$K_p = \frac{I_p}{70} = 185288\ mm^3$$

H-ban és K-ban ébredő σ és τ jellegű feszültségek nagysága:

$$\sigma_H = \frac{M_{hz}}{K} = 99{,}03 \text{ MPa} \longrightarrow$$

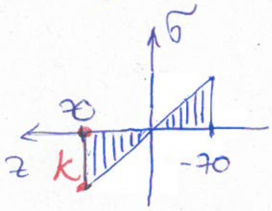
(z tengely körüli hajlításból K-ban 0 lesz a fesz.) H-ban pedig az eloszlás maximuma



)

$$\sigma_K = \frac{M_{hy}}{K} = 69{,}34 \text{ MPa} \longrightarrow$$

(y tengely körüli hajlítás:



)

$$\tau_H = \tau_K = \frac{M_t}{K_p} = 91{,}96 \text{ MPa}$$

Egyenértékű feszültségek:

$\boxed{H}$

$$\sigma_{egy}^{Mohr} = \sqrt{\sigma_H^2 + 4\tau_H^2} = 208{,}88 \text{ MPa}$$

$$\vee$$

$$\sigma_{egy}^{HMH} = \sqrt{\sigma_H^2 + 3\tau_H^2} = 187{,}55 \text{ MPa}$$

$\boxed{K}$

$$\sigma_{egy}^{Mohr} = \sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_K^2} = 196{,}55 \text{ MPa}$$

$$\vee$$

$$\sigma_{egy}^{HMH} = \sqrt{\sigma_K^2 + 3\tau_K^2} = 173{,}71 \text{ MPa}$$

6.6 Megoldás: Mivel $\underline{\underline{\sigma}} \neq \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, nem lehet a $\sqrt{\sigma^2 + k\tau^2}$ képletet használni!

Feszültségi állapot:

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} 60 & -80 & 0 \\ -80 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{FŐFESZ.}$$

Főfeszültségek:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= 80 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 &= -260 \text{ MPa} \end{aligned}\right\}$$

$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \cdot \underline{\underline{E}}) = 0$ -ből kijön!

$$0 \cdot \left[(60-\sigma)(-240-\sigma) - 80^2\right] = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \sigma = 80 \\ \searrow \sigma = 260 \end{matrix}$$

Mohr-féle egyenértékű fesz.:

$$\boxed{\sigma_{egy}^{Mohr} = \sigma_1 - \sigma_3} = 340 \text{ MPa}$$

Biztonsági tényező:

$$n = \frac{500}{340} = \underline{\underline{1{,}47}}$$

p felületi nyomás esetén:

$$\underline{\underline{\sigma}}_{(x,y,z)} = \begin{bmatrix} 60 & -80 & 0 \\ -80 & -240 & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ $p>0$!!!, (ha $p<0$, akkor $-p$ pozitív lenne)

$$\boxed{\sigma_{egy}^{HMH} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d}}$$

$\underline{\underline{\sigma}}_d$-t kiszámoljuk:

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{E}} = \frac{1}{3}(-180-p)\cdot\underline{\underline{E}} = \left(-60-\frac{p}{3}\right)\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -60-\frac{p}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -60-\frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -60-\frac{p}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_d = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_h = \begin{bmatrix} 120+\frac{p}{3} & -80 & 0 \\ -80 & -180+\frac{p}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 60-\frac{2p}{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d = \left(120+\frac{p}{3}\right)^2 + \left(-180+\frac{p}{3}\right)^2 + \left(60-\frac{2p}{3}\right)^2 + (-80)^2 + (-80)^2 =$$

$$= \frac{2p^2}{3} - 120p + 63200$$

$$\sigma_{egy}^{HMH} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\sigma}}_d : \underline{\underline{\sigma}}_d} = \sqrt{p^2 - 180p + 94800}$$

$$\sigma_{egy}^{HMH} = 340$$

$\rightarrow 340^2 = p^2 - 180p + 94800$

$$p_{1,2} = \begin{cases} -80 \\ 260 \end{cases}$$

$p>0$, tehát $\underline{\underline{p = 260 \text{ MPa}}}$

6.4 -es feladat, redukált nyomatékhoz magyarázat.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & \emptyset \\ \tau & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix} \qquad \sigma = \frac{M_h}{K}$$

$$\tau = \frac{M_t}{K_p} = \frac{M_t}{2K}$$

$$\sigma_{egy}^{Mohr} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\frac{M_h^2}{K^2} + 4 \cdot \frac{M_t^2}{4K^2}} = \underbrace{\frac{1}{K}\sqrt{M_h^2 + M_t^2} = \frac{M_{red}^{Mohr}}{K}}_{M_{red}^{Mohr} = \sqrt{M_h^2 + M_t^2}}$$

$$\sigma_{egy}^{HMH} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\frac{M_h^2}{K^2} + 3\frac{M_t^2}{4K^2}} = \underbrace{\frac{1}{K}\sqrt{M_h^2 + \frac{3}{4}M_t^2} = \frac{M_{red}^{HMH}}{K}}_{M_{red}^{HMH} = \sqrt{M_h^2 + \frac{3}{4}M_t^2}}$$