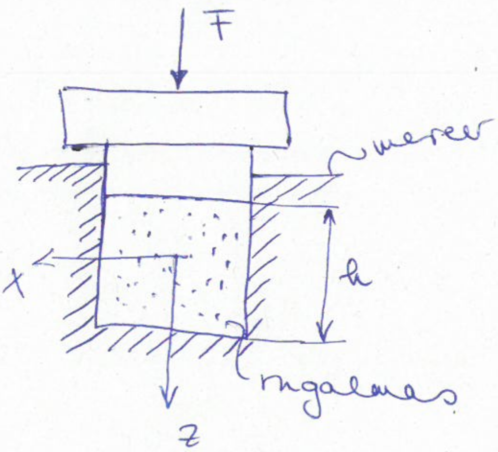
5.1
5.3
5.2

8. gyakorlat

Általános Hooke-törvény

(5.1)



Feladat: a, σ_x, σ_y, σ_z?

b, zsugorodás?

Ahol az anyag deformációja gátolva van, feszültség ébred.
(vagy ugyanúgy / hűtünk)

- Milyen irányokban ébred feszültség? (x, y, z)
- Milyen irányban 0 az ε (alakváltozás)? (x, y)

Megadás:

~ x és y irányban gátolja a fal $\rightarrow$ $\varepsilon_x = 0$; $\varepsilon_y = 0$

~ $\gamma = 0$

~ anyagi pontok alakváltozási állapota:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\text{"összenyomódás"}}{\text{eredeti hossz}}$$

~ Hooke-törvény:

$$(1) \quad \boxed{\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left[\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{I}}\right]} \qquad \varepsilon_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{I}}\right]} \qquad \sigma_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Ezekből minden skaláregyenletet ki lehet hozni, amiket gyakran felírunk.

(1) egyenletből: (bal oldalt kiszámoljuk)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{E\cdot\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\varepsilon_z$$

$$\sigma_z = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_z$$

Ismeretlenek: σ_x, σ_y, σ_z, ε_z → 4 db, 3 egyenlet van.

DE! $\sigma_z = (-)\frac{F}{A} = -\frac{F}{a^2} = -\frac{160\,000}{200^2} = \underline{\underline{-4\ \text{MPa}}}$

NYOMOTT,
tehát negatív

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} = -4{,}985\cdot 10^{-5}$$ (nincs mértékegysége!)

$\sigma_x = \sigma_y = -2{,}154$ MPa (az anyag szét akarja nyomni a merev falat, tehát nyomott az anyag)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4{,}985\cdot 10^{5} \end{bmatrix} [-] \qquad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -2{,}154 & 0 & 0 \\ 0 & -2{,}154 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

Hasáb zsugorodása:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta h}{h} \longrightarrow \Delta h = \varepsilon_z\cdot h = \underline{\underline{-0{,}04985\ \text{mm}}}$$

(példa: rezgésszigetelés  gumi, $\nu \approx 0.5$ → összenyomhatatlan)

(5.3)

P-ben ébredő feszültségi állapot?

Nyúlásmérő bélyeggel mértük.

x tengellyel bezárt szögek és nyúlások:

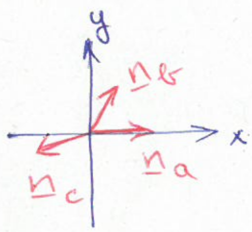
3 független irány

$$\begin{cases} \alpha_a = 0° & \varepsilon_a = 100 \cdot 10^{-6} = 10^{-4} \\ \alpha_b = 70° & \varepsilon_b = 50 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-5} \\ \alpha_c = 200° & \varepsilon_c = -70 \cdot 10^{-6} = -7 \cdot 10^{-5} \end{cases}$$

$E = 200\,GPa$

$\nu = 0{,}3$

<u>Megoldás:</u> P-ben síkfeszültségi állapot van!



$$\underline{n}_a = \begin{bmatrix} \cos\alpha_a \\ \sin\alpha_a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_b = \begin{bmatrix} \cos\alpha_b \\ \sin\alpha_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}342 \\ 0{,}94 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_c = \begin{bmatrix} \cos\alpha_c \\ \sin\alpha_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}94 \\ -0{,}342 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Síkfesz. állapot miatt:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Adott n irányhoz tartozó alakváltozás:

$$\boxed{\varepsilon_n = (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n}}$$

$$\varepsilon_a = (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}_a) \cdot \underline{n}_a = \varepsilon_x = 10^{-4}$$

3 egyenlet,
3 ismeretlen

$$\varepsilon_b = (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}_b) \cdot \underline{n}_b = 0{,}117 \cdot \varepsilon_x + 0{,}883 \cdot \varepsilon_y + 0{,}321\,\gamma_{xy} = 5 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_c = (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{n}_c) \cdot \underline{n}_c = 0{,}883 \cdot \varepsilon_x + 0{,}117 \cdot \varepsilon_y + 0{,}321\,\gamma_{xy} = -7 \cdot 10^{-5}$$

3 egyenletet megoldjuk:

$$\varepsilon_x = 100 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = 256{,}65 \cdot 10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = -585{,}96 \cdot 10^{-6}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\left[\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_I \underline{\underline{I}}\right]$$

$$\varepsilon_x =$$

$$\varepsilon_y = \ldots - \frac{1+\nu}{E}\sigma_x$$

$$\varepsilon_z = \frac{-\nu}{E}\left(+(\sigma_x+\sigma_y)\right) = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y) = -\frac{1+\nu}{\cancel{E}}\left(\frac{\cancel{E}}{1+\nu}\varepsilon_y + \frac{\cancel{E}}{1+\nu}\varepsilon_x\right) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

Hooke-törvény "3. sora, 3. oszlopa": $\sigma_z = 0$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y) = -152{,}85 \cdot 10^{-6}$$

$-\nu - 1$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 100 & -292{,}98 & 0 \\ -292{,}98 & 256{,}65 & 0 \\ 0 & 0 & -152{,}85 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}$-ből Hooke-törvénnyel a feszültségi állapot:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_I \underline{\underline{E}}\right) = \begin{bmatrix} 40{,}844 & -47{,}33 & 0 \\ -47{,}33 & 66{,}15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Főfeszültségek:

$$\det\left(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}\right) = 0 \longrightarrow$$

$$\sigma_1 = 102{,}49 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 4{,}51 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

Főnyúlások:

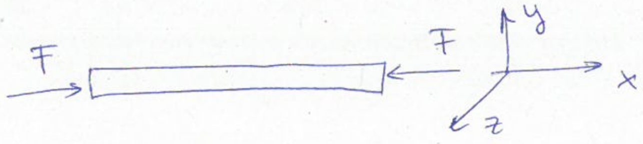
$$\det\left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \varepsilon \underline{\underline{E}}\right) = 0 \longrightarrow$$

$$\varepsilon_1 = 481{,}59 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_2 = -124{,}95 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_3 = -152{,}85 \cdot 10^{-6}$$

5.2



Megoldás:

a)
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma_x = -\frac{F}{A} = -\frac{10\,000}{\frac{d^2\pi}{4}} = \underline{\underline{-2\ \text{MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -10^{-5}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x = 3 \cdot 10^{-6}$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \mathrm{tr}\,\underline{\underline{\varepsilon}} = -4 \cdot 10^{-6}$$

b)
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \cdot \sigma_x$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + 0 + 0 = -7{,}43 \cdot 10^{-6}$$

((5.1) -hez hasonló.)