4.9
4.10

7. gyakorlat

Sajátérték, sajátvektor számítás

Mohr - körök

(4.9) $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 90 & 40 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$ MPa $\sigma_z = -50$ MPa főfeszt.

$\underline{k}$ főirány : $\underline{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

~ Sajátérték - sajátvektor

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sigma \cdot \underline{n} \longrightarrow \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \sigma \underline{n} = 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} - \sigma \underline{\underline{E}}\, \underline{n} = 0$$

$$\underbrace{(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}})}_{=0} \cdot \underbrace{\underline{n}}_{\neq 0} = 0$$

$\boxed{\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0}$ → karakterisztikus polinom

$$\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 90-\sigma & 40 & 0 \\ 40 & 30-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -50-\sigma \end{bmatrix}$$

$$\det(\cdot) = \underbrace{(-50-\sigma)}\left((90-\sigma)(30-\sigma) - 40^2\right) = 0$$

innen is látszik, hogy a -50 gyöke a kar. polinomnak → főfesz.

Másik két főfeszt:

$$(90-\sigma)(30-\sigma) - 40^2 = 0$$

$$\sigma^2 - 120\sigma + 1100 = 0 \quad \sigma_{1,2} = \begin{cases} 110 \text{ MPa} \\ 10 \text{ MPa} \end{cases}$$

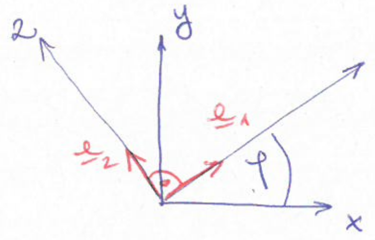
Sorbarendezés: $\sigma_1 = 110$ MPa

$\sigma_2 = 10$ MPa

$\sigma_3 = -50$ MPa $\longrightarrow \underline{e}_3 = \underline{k}$

Másik két főirány: xy síkban van

jobbsodrású rendszer:
$\underline{e}_1 = \underline{e}_2 \times \underline{e}_3$
$\underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1$
$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2$



$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \cdot \underline{\underline{E}})\, \underline{e}_1 = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 90-\sigma_1 & 40 & 0 \\ 40 & 30-\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -50-\sigma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 40 & 0 \\ 40 & -80 & 0 \\ 0 & 0 & -160 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -20 \cdot \cos\varphi + 40 \sin\varphi \\ 40 \cdot \cos\varphi - 80 \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow 40 \sin\varphi = 20 \cos\varphi$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

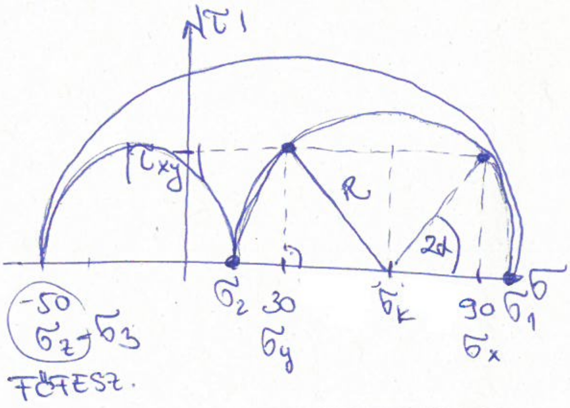
$$\varphi = \arctan\frac{1}{2} = 26{,}57^\circ$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}447 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}447 \\ 0{,}894 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

~ Mohr-körök (csak ha az egyik főállásbeli fesz. fdksz!)

$$\sigma_k = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 60\,\text{MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 50\,\text{MPa}$$



$$\sigma_1 = \sigma_k + R = 110$$

$$\sigma_2 = \sigma_k - R = 10$$

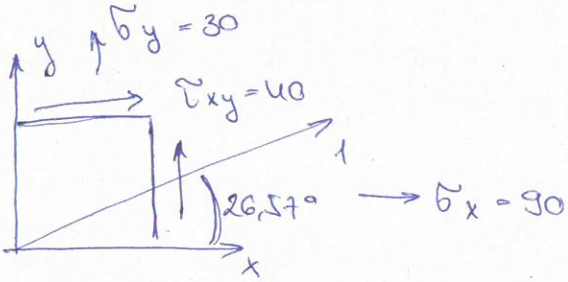
$$\sigma_3 = \sigma_z = -50$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left[\frac{2|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_y}\right] = 26{,}57^\circ$$

α: ezzel forgatjuk el x tengelyt z körül τ_{xy} irányába $\rightarrow$ 1-es irány

Mohr-körök szerkesztése:

1. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$-t felrajzoljuk
2. Főfesz-t kiválasztjuk, másik 2-höz τ-t berajzoljuk
3. Másik 2 közötti szakasz felénél van σ_k
4. Kiszámoljuk a sugarat Pitagorasszal
5. Megrajzoljuk a 3 kört
6. $2\alpha \rightarrow$ főirányok



e_1, e_2, e_3 előző részhez hasonlóan.

(4.10) $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & -40 \\ 0 & -40 & -10 \end{bmatrix}$

~ <u>Sajátérték - sajátvektor</u>

$\sigma_x = -30$ főfesz $\rightarrow$ $\underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ főirány

Karakterisztikus polinom: $\det(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma \underline{\underline{E}}) = 0$

$$\underbrace{((-30) - \sigma)}_{-30 \text{ megoldás}} \left[(-20 - \sigma)(-10 - \sigma) - (-40)^2 \right] = 0$$

Másik 2 mo.: $(-20 - \sigma)(-10 - \sigma) - 40^2 = 0$

$$\sigma^2 + 30\sigma - 1400 = 0$$

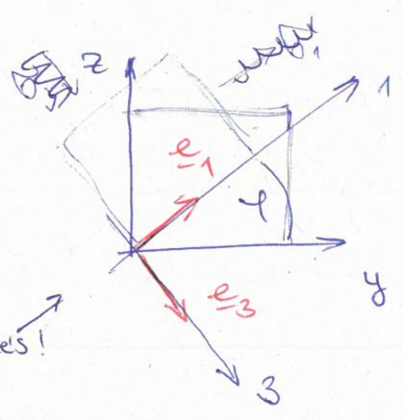
$$\sigma_{1,2} = \begin{cases} 25{,}31 \\ -55{,}31 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Sorbarendezés: $\sigma_1 = 25{,}31$

$\sigma_2 = -30 = \sigma_x \rightarrow e_2 = \underline{i}$

$\sigma_3 = -55{,}31$

Másik két főirány: yz síkban



Feltételezés!

$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$ $e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$

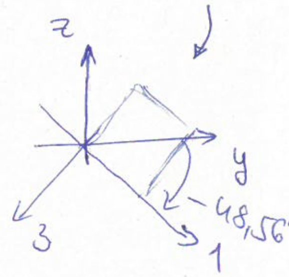
$(\underline{\underline{\sigma}} - \sigma_1 \underline{\underline{E}}) \cdot \underline{e}_1 = \underline{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -45{,}31\cos\varphi - 40\sin\varphi \\ -40\cdot\cos\varphi - 35{,}31\sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \varphi = \arctan(-1{,}13275) = \underline{-48{,}56^\circ}$$

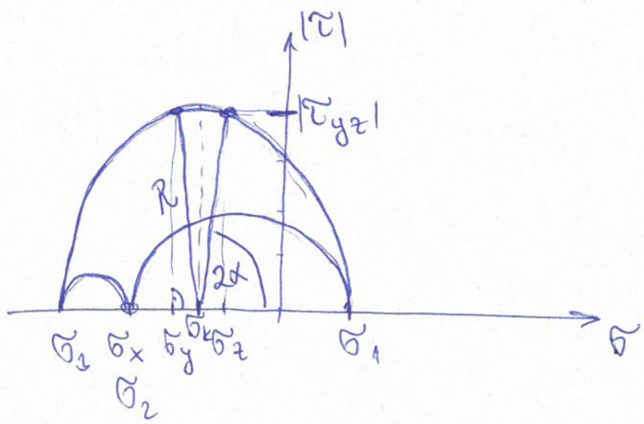
$\downarrow$

negatív, tehát pont a másik irányba forog

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}662 \\ -0{,}75 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}75 \\ -0{,}662 \end{bmatrix}$$



~ Mohr-körök



$$\sigma_k = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} = -15$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = 40{,}31$$

$$\sigma_1 = \sigma_k + R = 25{,}31$$

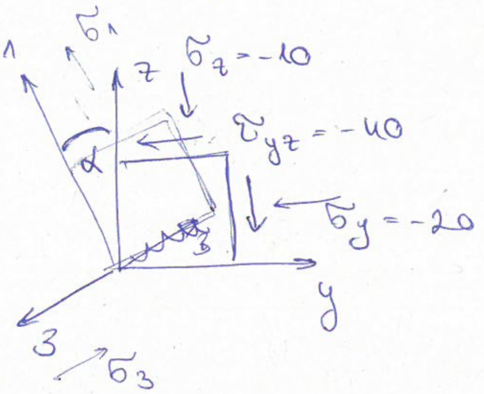
$$\sigma_2 = \sigma_x = -30$$

$$\sigma_3 = \sigma_k - R = -55{,}31$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left[\frac{2|\tau_{yz}|}{\sigma_y - \sigma_z}\right] = 41{,}44^\circ$$

$\downarrow$

Ezzel forgatjuk a z tengelyt x körül τ_{yz} irányba.



$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}662 \\ 0{,}75 \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \underline{i}$$

$$\underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}75 \\ 0{,}662 \end{bmatrix}$$

(Nem pont ua. vektorokat kapunk, de 1-2-3 irányok azonosak és jobbsodrásúak!)