4.3
4.7
4.6
125-147. o.

6. gyakorlat

Főfeszültségek, főirányok

(4.3) Főfeszültségek, feszültségi főirányok?

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} -20 & 0 & 30 \\ 0 & 15 & 0 \\ 30 & 0 & 40 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\boxed{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3} \quad (\tau = 0)$$

(előjeleket is figyelembe vesszük, nem abszolút értéket nézünk)

~ y normálisú lapon nem ébred $\tau \rightarrow \sigma_y = 15$ MPa főfeszt.
(de még nem tudjuk, hogy $\sigma_1 / \sigma_2 / \sigma_3$)

~ xz síkban a főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -20 \\ \sigma_z &= 40 \\ \tau_{xz} &= 30 \end{aligned}\right\} \quad \sigma_{1,2} = \begin{cases} 52{,}43 \\ -32{,}43 \end{cases}$$

~ Sorbarendezés:

$\sigma_1 = 52{,}43$ MPa

$\sigma_2 = 15$ MPa

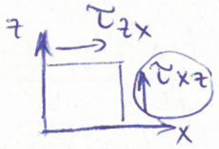
$\sigma_3 = -32{,}43$ MPa

$$\underset{(1,2,3)}{\underline{\underline{\sigma}}} = \begin{bmatrix} 52{,}43 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & -32{,}43 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

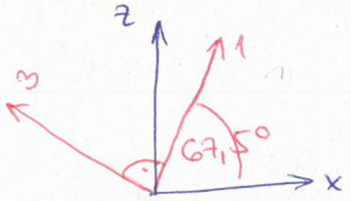
~ Főirányok: $\sigma_2 = \sigma_y$ miatt az y irány főirány! (2-es)
1-es és 3-as főirány az xz síkban fekszik.
(⊥-ek egymásra)

~ Az 1-es irány x-szel bezárt szöge:

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = 67{,}5^\circ$$

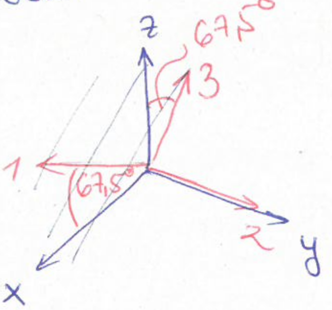


1-es tengely forgatása

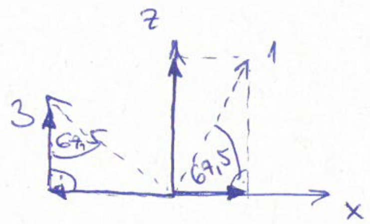


xyz, 123 jobbsodrású legyen!
(y = 2-es irány a lapba befelé mutat)

Térben:



~ A főirányokba mutató egységvektorok (hossza 1!!!) az x-y-z koord. rsz-ben:



$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos 67{,}5^\circ \\ 0 \\ \sin 67{,}5^\circ \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} -\sin 67{,}5^\circ \\ 0 \\ \cos 67{,}5^\circ \end{bmatrix}$$

~ Ellenőrző számítás: τ a 3-as főirányra merőleges síkon?

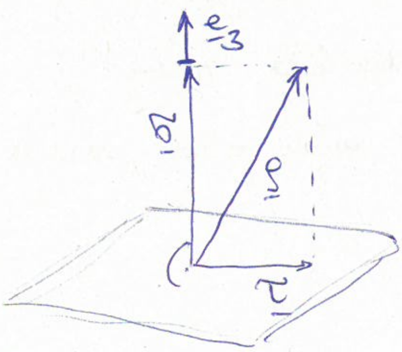
$$\underline{\rho} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 29{,}958 \\ 0 \\ -12{,}409 \end{bmatrix}$$

(a $\underline{e}_3$ irányhoz tartozó fesz. vektor)

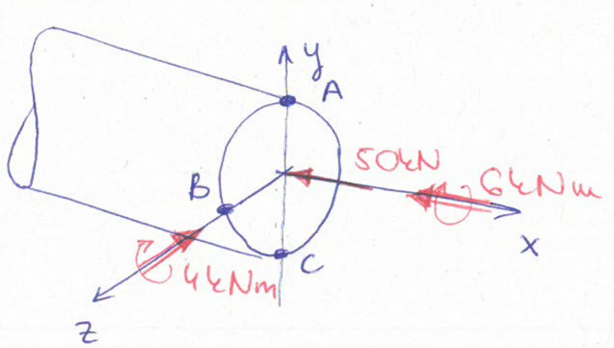
$$\sigma = \underline{\rho} \cdot \underline{e}_3 = -32{,}43 = \sigma_3$$

$$\underline{\sigma} - \sigma \cdot \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 29{,}958 \\ 0 \\ -12{,}409 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tau} = \underline{\rho} - \underline{\sigma} = \phi$$



(4.7) A, B, C pont: főfesz., főirányok? Kiskocka!



~ Km-i jellemzők:

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = 11309{,}7 \text{ mm}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{d^4\pi}{64} = 10\,178\,760 \text{ mm}^4$$

$$K_z = \frac{d^3\pi}{32} = 169\,646 \text{ mm}^3$$

$$I_p = \frac{d^4\pi}{32} = 20\,357\,520 \text{ mm}^4$$

$$K_p = \frac{d^3\pi}{16} = 339\,292 \text{ mm}^3$$

~ Feszültség eloszlások:

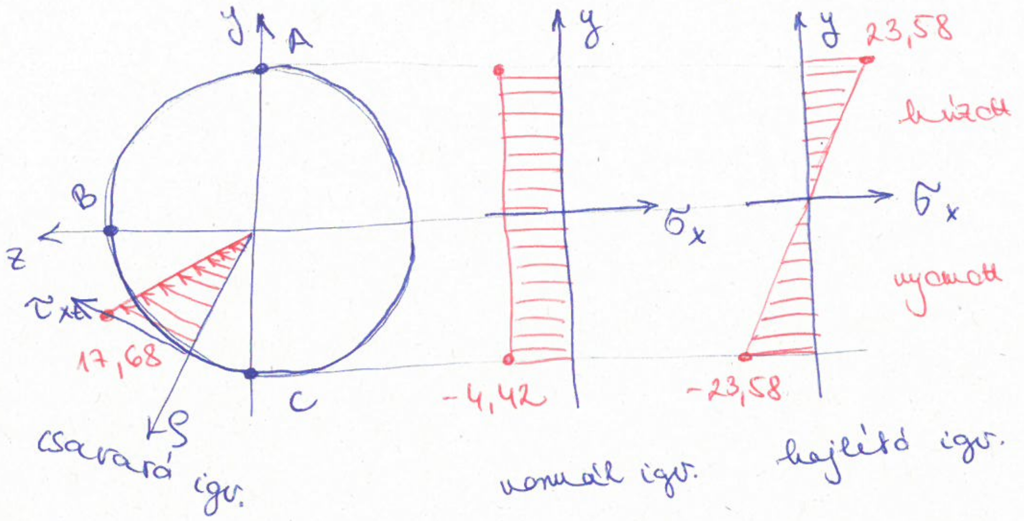
Normál ig.v.: $\sigma_x = -\dfrac{50000}{A} = -4{,}42\ \text{MPa}$

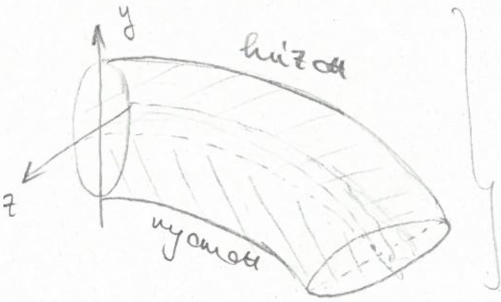
Hajlító ig.v.: (z körül) $\sigma_x(y) = \dfrac{4\,000\,000}{I_z} \cdot y = 0{,}392975 \cdot \underset{[mm]}{y}$

$\sigma_{x\,max} = \dfrac{4\,000\,000}{K_z} = 23{,}58\ \text{MPa}$

Csavaró ig.v.: (x körül) $\tau_{xt} = \dfrac{6\,000\,000}{I_p}\rho = 0{,}294731\,\underset{[mm]}{\rho}$

$\tau_{max} = \dfrac{6\,000\,000}{K_p} = 17{,}68\ \text{MPa}$





hajlítás után így néz ki a rúd

~ Feszültségi állapotok:

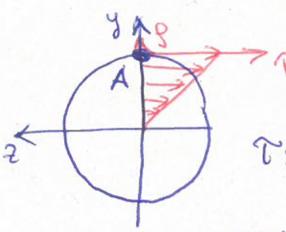
$\boxed{A}$

$\sigma_x = 23{,}58 - 4{,}42 = 19{,}16\ \text{MPa}$

$\tau_{xz} = -17{,}68\ \text{MPa}$

$$\underline{\underline{\sigma}}_A = \begin{bmatrix} 19{,}16 & 0 & -17{,}68 \\ 0 & 0 & 0 \\ -17{,}68 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

τ_{xz}-hez magyarázat:



$\tau_{xt}\big|_A = -17{,}68$, mert ⊖ z irányba mutat, és x normálisú síkban van $\Rightarrow \boxed{\tau_{xz}}$

$\sigma_y = 0$ főfeszültség, $\underline{j}$ az egyik főirány.

Az xz síkban ébredő feszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^{\,2}} = \begin{cases} 29{,}69 \\ -10{,}53 \end{cases}$$

$\sigma_1 = 29{,}69$ MPa

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -10{,}53$ MPa

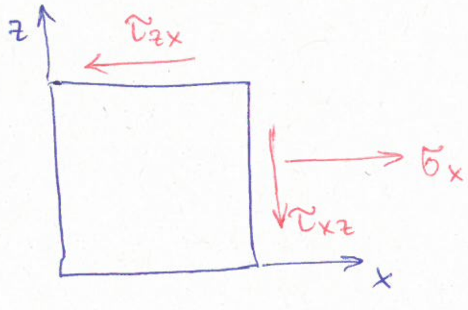
Az 1-es főirány és x által bezárt szög:

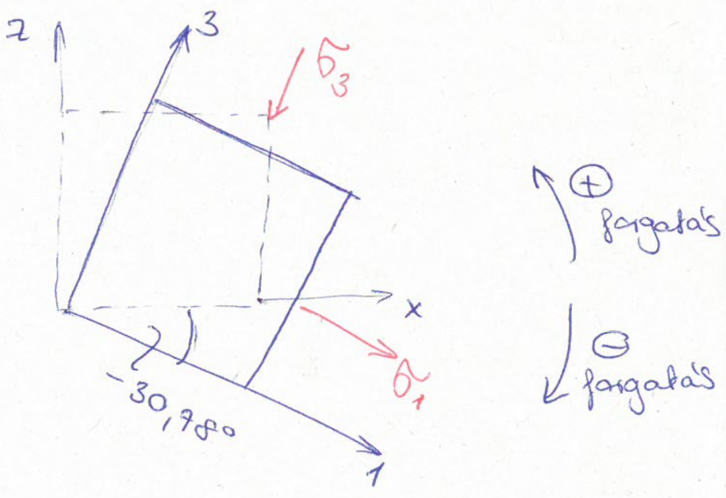
$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}\right) = -30{,}78^\circ$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}859 \\ 0 \\ -0{,}512 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{j}$$

$$\underline{e}_3 = \underbrace{\underline{e}_1 \times \underline{e}_2}_{} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}512 \\ 0 \\ 0{,}859 \end{bmatrix}$$

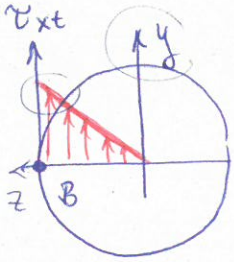
keresztszorzás:
jobbsodrású
rendszert ad
(3 ⊥ 1-2 síkra)





$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 20{,}11 \text{ MPa}$$

$\boxed{B}$



$\oplus\ \tau_{xy}$

$$\underline{\underline{\sigma}}_B = \begin{bmatrix} -4{,}42 & 17{,}68 & 0 \\ 17{,}68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$\sigma_x = -4{,}42$

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 17{,}68$

$\sigma_z = 0$ főfeszültség, $\perp$ főirány.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \begin{cases} 15{,}61 \\ -20{,}03 \end{cases}$$

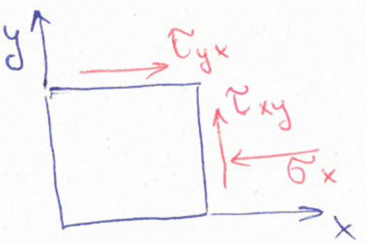
$\sigma_1 = 15{,}61$ MPa

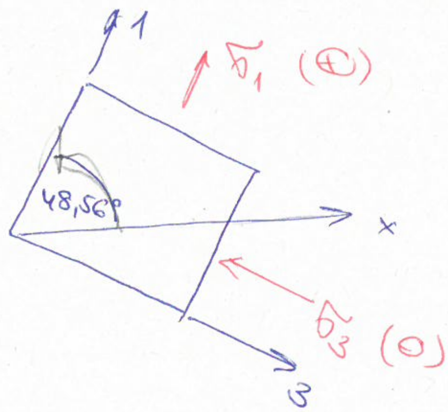
$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -20{,}03$ MPa

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right) = 48{,}56°$$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}662 \\ 0{,}75 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} \sin\varphi_1 \\ -\cos\varphi_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -0{,}662 \\ 0 \end{bmatrix}$$





$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 17{,}82 \text{ MPa}$$

$\boxed{C}$ $\boxed{HF}$

$$\underline{\underline{\sigma}}_C = \begin{bmatrix} -28 & 0 & 17{,}68 \\ 0 & 0 & 0 \\ 17{,}68 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma_y = 0$ főfesz., $\perp$ főirány

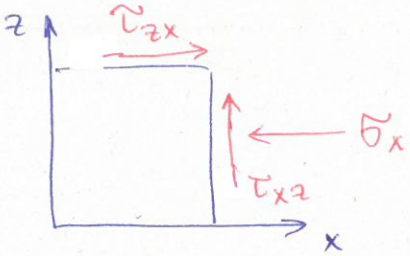
$\sigma_1 = 8{,}55$ MPa

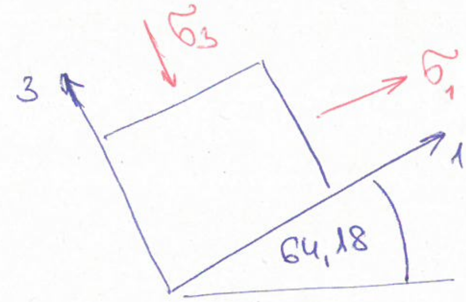
$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = -36{,}55$ MPa

$\varphi_1 = 64{,}18°$

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ 0 \\ \sin\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}435 \\ 0 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_3 = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_1 \\ 0 \\ \cos\varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}9 \\ 0 \\ 0{,}435 \end{bmatrix}$$





$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = 22{,}55\ \text{MPa}$$

(4.6) $\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\tau_{max} = ?$

$\sigma_z = 0$ főfeszültség $\rightarrow$ Másik kettő: $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$

$$= \frac{1}{2}\sigma \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{1}{2}\sigma \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 (\sigma^2 + 4\tau^2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sigma \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$\tau \neq 0$ megoldást keresünk!

Nézzük a következő egyenletet:

$$0 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\sigma \pm \cancel{\tfrac{1}{2}}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \rightarrow |\sigma| = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Ha $\tau = 0$: $|\sigma| = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$

De $\tau \neq 0$ esetet vizsgálunk,

tehát $|\sigma| < \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\sigma_1 = \tfrac{1}{2}\sigma + \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} > 0$$

$$\boxed{\sigma_3 = \tfrac{1}{2}\sigma - \tfrac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} < 0$$

$\boxed{\sigma_2 = 0}$ $\boxed{\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$