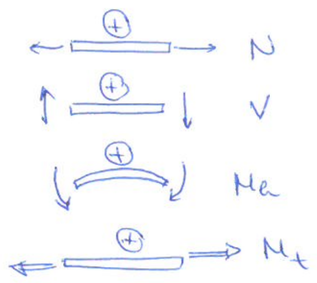
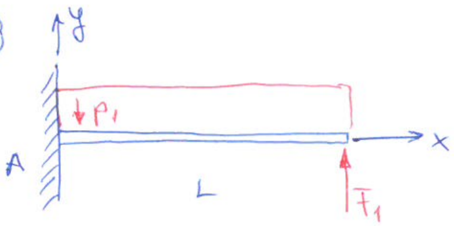
STATIKA - 9. gyakorlat

Igénybevételi függvények, ábrák



1.)

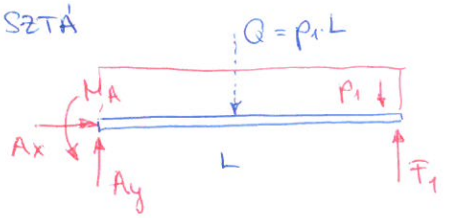


$L = 4m$

$p_1 = 3\,\frac{kN}{m}$

$F_1 = 3kN$

~ Reakciók számítása:



Egyensúlyi egyenletek:

$\sum F_x = 0$ $\quad\boxed{A_x = 0}$

$\sum M_{A(z)} = 0$ $\quad -\underbrace{p_1 \cdot L}_{\text{erő}} \cdot \underbrace{\frac{L}{2}}_{\text{erőkar}} + F_1 \cdot L + M_A = 0$

$$\boxed{M_A = p_1 \frac{L^2}{2} - F_1 L = 12\,kNm}$$

$\sum F_y = 0$ $\quad A_y + F_1 - p_1 L = 0$

$$\boxed{A_y = p_1 L - F_1 = 9kN}$$

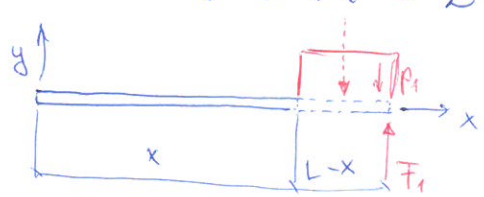
~ Igénybevételi függvények: (csak egy szakasz van)

JOBB OLDALRÓL:

$N(x) = 0$

$V(x) = -F_1 + p_1 (L - x)$

$M_h(x) = -F_1 (L - x) + p_1 (L - x) \frac{L - x}{2}$

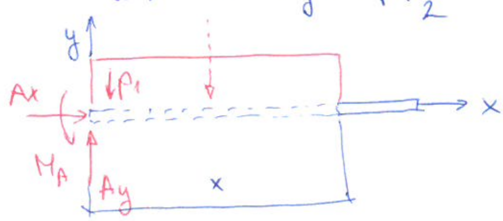


BAL OLDALRÓL:

$N(x) = -A_x$

$V(x) = A_y - p_1 \cdot x$

$M_h(x) = M_A - A_y x + p_1 \frac{x^2}{2}$



Behelyettesítés:

$N(x) = 0$

$V(x) = 9 - 3x$

$M_h(x) = 12 - 9x + 1{,}5x^2$

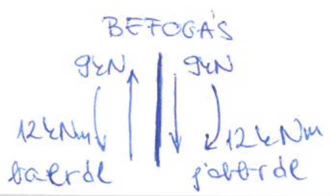
$N(x) = 0$

$V(x) = 9 - 3x$

$M_h(x) = 12 - 9x + 1{,}5x^2$

UGYANAZT KAPTUK!

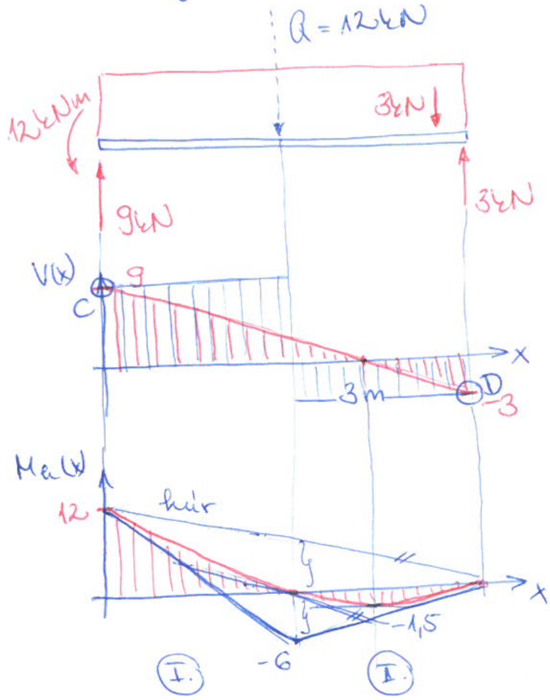
Befogás km-e: $x = 0$



→ egyensúlyban van!

~ Igénybevételi ábrák:

Rúd rajza a valódi terheléssel:



$N(x) = 0$, $M_t(x) = 0$ → ezeket nem rajzoljuk fel!

$V(x) = 9 - 3x$ → lineáris!

$x = 0 \rightarrow V(0) = 9$ kN

$x = 4 \rightarrow V(4) = -3$ kN

V(x) hol nulla?

$V(x) = 9 - 3x = 0 \rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$ m

V(x)-et felrajzoljuk a helyettesítő Q erővel is. C (x=0) és D (x=4) helyeken a kék és piros igénybevételi ábra ugyanazt a V(x) értéket adja.

$\frac{dM_h(x)}{dx} = -V(x)$ → C és D helyeken ugyanaz az érintője a megoszlóból és helyettesítő erőből felrajzolt $M_h(x)$-nek.

$M_h(x)$ helyettesítő erővel:

I. $M_h'(x) = -V(x) = -9$ a meredekség.

$12 - 9 \cdot 2 = -6$

II. 3 a meredekség

A megoszlóból számolt $M_h(x)$-nek $x=0$-nál és $x=4$-nél ez az érintője.

$M_h(x)$ egy parabola → szélsőértéke:

$V(x) = 0$-nál $\left(\frac{dM_h(x)}{dx} = -V(x) \right.$

x^2 együtthatója: >0 ∪ <0 ∩

$(V'(x) = p(x))$

$M_h(3) = -1{,}5$

Parabolaszerkesztés:

1. két végpontban érintő
2. érintők metszéspontja
3. húr megrajzolása: két végpontot összekötjük
4. felezőpontba párhuzamost húzunk a húrral

!

$\boxed{M}$ Módszerek $M_h(x)$ rajzolására

(1.) Kiszámoljuk sok x helyen, ábrázoljuk a pontokat és összekötjük.

$M_h(x) = 12 - 9x + 1{,}5x^2$

x	0 m	1 m	2 m	3 m	4 m
$M_h(x)$ [kNm]	12	4,5	0	−1,5	0

(2.) Differenciális kapcsolat kihasználásával

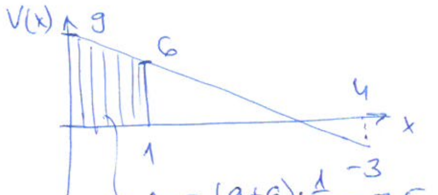
$$\frac{dM_h(x)}{dx} = -V(x)$$

$$dM_h(x) = -V(x)dx \qquad / \int_{x_0}^{x_0+\Delta x}$$

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dM_h(x)}_{M_h \text{ megváltozása a } \Delta x \text{ szakaszon}} = -\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} V(x)\cdot dx \rightarrow V(x) \text{ alatti terület nagysága a } \Delta x \text{ szakaszon } (A_V)$$

$$M_h(x_0+\Delta x) - M_h(x_0) = -A_V \rightarrow \underbrace{M_h(x_0+\Delta x)}_{M_h\ \Delta x\text{-nél}} = \underbrace{M_h(x_0)}_{M_h \text{ kezdőértéke}} - \underbrace{A_V}_{\text{terület}}$$

Pl.



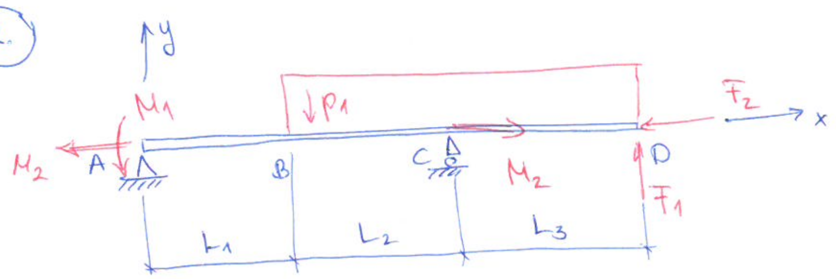
$A_V = (9+6)\cdot\frac{1}{2} = 7{,}5$

$M_h(x_0)\big|_{x=0} = 12$

$M_h(\underbrace{x_0+\Delta x}_{\Delta x = 1m}) = M_h(x_0) - A_V = 12 - 7{,}5 = 4{,}5$ ✓

(táblázatban is ez van)

(2.)



$L_1 = 2m$ $\quad F_1 = 8kN$

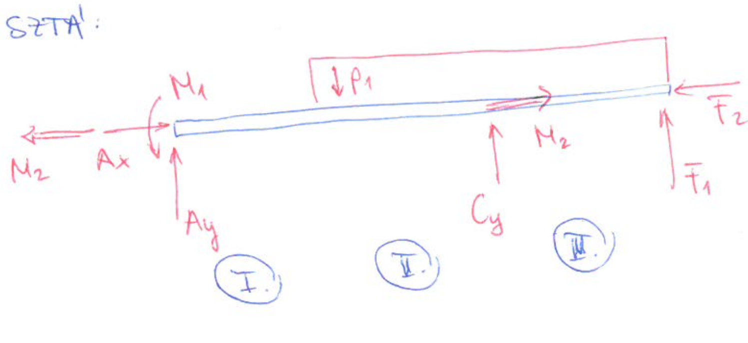
$L_2 = 3m$ $\quad F_2 = 7kN$

$L_3 = 4m$ $\quad p_1 = 5\,\frac{kN}{m}$

$M_1 = 4kNm$

$M_2 = 6kNm$

SZTA:



$\sum F_x = 0 \qquad A_x - F_2 = 0 \qquad A_x = F_2$

$\sum F_y = 0 \qquad A_y + C_y + F_1 - p_1(L_2+L_3) = 0$

$\sum M_{A(z)} = 0 \qquad M_1 + C_y(L_1+L_2) + F_1(L_1+L_2+L_3) - p_1(L_2+L_3)\left(L_1+\frac{L_2+L_3}{2}\right) = 0$

Nyomatéki egyenletből: $C_y = \frac{1}{L_1+L_2}\left(-M_1 - F_1(L_1+L_2+L_3) + p_1(L_2+L_3)\left(L_1+\frac{L_2+L_3}{2}\right)\right) =$

$= \underline{\underline{23{,}3\,kN}}$

y irányból: $A_y = -C_y - F_1 + p_1(L_2+L_3) = \underline{\underline{3{,}7\,kN}}$

$A_x = 7\,kN$

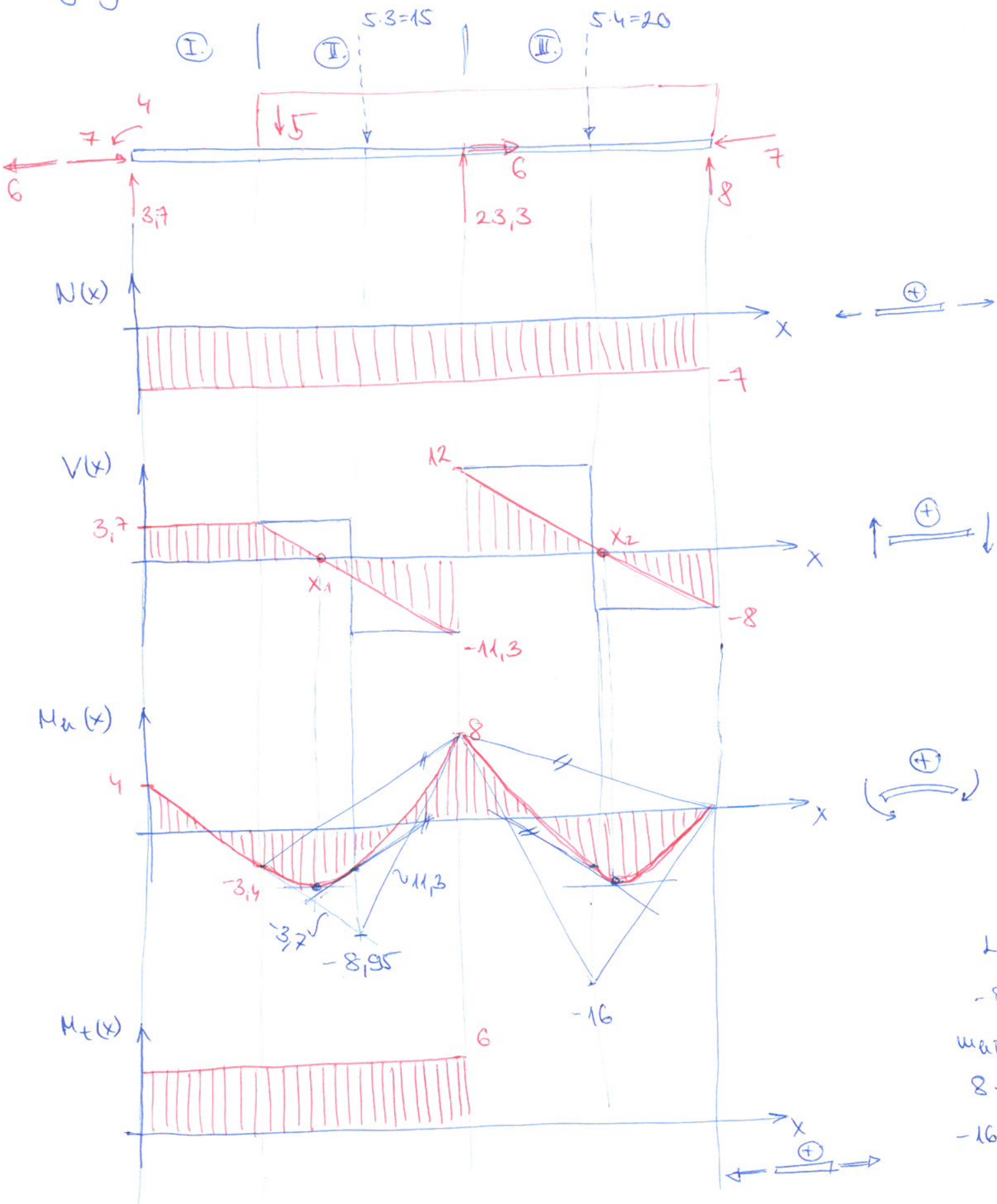
Minden pozitív, tehát abba az irányba mutat, ahogyan feltételeztük.

Igénybevételi függvények SZTÁ alapján: 3 részre kell osztani!

	I.	II.	III.
	$x: 0 \dots L_1$	$x: L_1 \dots L_1+L_2$	$x: L_1+L_2 \dots L_1+L_2+L_3$
$N(x)$	$N_I(x) = -A_x$	$N_{II}(x) = -A_x$	$N_{III}(x) = -A_x$ $N_{III}(x) = -F_2$
$V(x)$	$V_I(x) = A_y$	$V_{II}(x) = A_y - p_1(x-L_1)$	$V_{III}(x) = A_y - p_1(x-L_1) + C_y$ $V_{III}(x) = -F_1 + p_1(L_1+L_2+L_3-x)$
$M_h(x)$	$M_{hI}(x) = M_1 - A_y \cdot x$	$M_{hII}(x) = M_1 - A_y x + p_1\frac{(x-L_1)^2}{2}$	$M_{hIII}(x) = M_1 - A_y x + p_1\frac{(x-L_1)^2}{2} - C_y(x-L_1-L_2)$ $M_{hIII}(x) = -F_1(L_1+L_2+L_3-x) + p_1\frac{(L_1+L_2+L_3-x)^2}{2}$
$M_t(x)$	$M_{tI}(x) = M_2$	$M_{tII}(x) = M_2$	$M_{tIII}(x) = 0$ $M_{tIII}(x) = 0$

(kék: balról, piros: jobbról)

Igénybevételi ábrák:



$m_{hI} = -3,7$

L_1-nél:

$4 - 3,7 \cdot 2 = -3,4$

$L_1 + \frac{L_2}{2}$ -nél:

$-3,4 - 3,7 \cdot 3,5$

L_2-nél: $m_{hII} = 11,3$

$-8,95 + 11,3 \cdot 1,5$

$m_{hIII} = -12$

$8 - 2 \cdot 12$

$-16 + 8 \cdot 2 = 0$

$M_h(x)$ szélsőértékei II. és III. szakaszon:

x_1: $V_{II}(x_1) = 0 \rightarrow A_y - p_1(x_1 - L_1) = 0$ $\quad x_1 = \frac{A_y + pL_1}{p} = 2,74\,m$

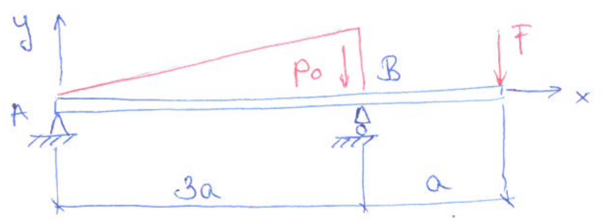
$M_{hII}''(x) = -p_1(x) > 0 \rightarrow$ lok. min

$M_{hII}(x_1) = \underline{\underline{-4,88\,kNm}}$

x_2: $V_{III}(x_2) = 0 \rightarrow A_y + C_y - p_1(x_2 - L_1) = 0$ $\quad x_2 = 7,4\,m$

$M_{hIII}(x_2) = \underline{\underline{-6,44\,kNm}}$ (ez is lok. min.)

3.

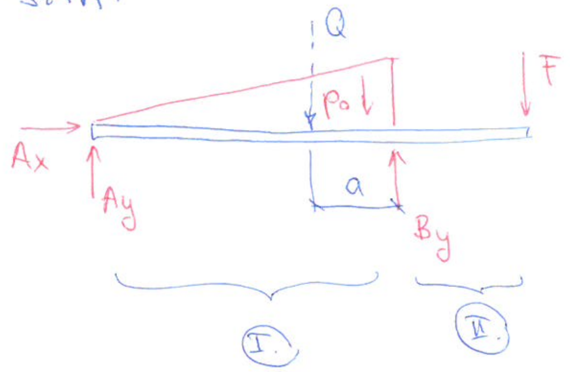


$a = 0{,}3\,m$

$F = 1\,kN$

$p_0 = 4\,kN/m$

SZTA':



$\sum F_x = 0 \qquad \boxed{A_x = 0}$

$\sum F_y = 0 \qquad A_y + B_y - F - \frac{p_0 \cdot 3a}{2} = 0$

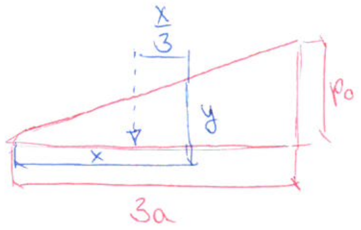
$\sum M_{A(z)} = 0 \qquad -F \cdot 4a + B_y \cdot 3a - \frac{p_0 \cdot 3a}{2} \cdot 2a = 0$

$\boxed{A_y = 0{,}267\,kN}$

$\boxed{B_y = 2{,}533\,kN}$

Két szakaszra osztjuk! $(N(x) = 0,\ M_t = 0)$ Balról írjuk fel I.-t, II.-t jobbról!

	I. $x: 0 \dots 3a$	II. $x: 3a \dots 4a$
$V(x)$	$V_I(x) = A_y - \frac{p_0}{3a} x \cdot \frac{x}{2}$	$V_{II}(x) = F$
$M_h(x)$	$M_{hI}(x) = -A_y \cdot x + \frac{p_0}{3a} x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3}$	$M_{hII}(x) = F(4a - x)$



$\frac{y}{x} = \frac{p_0}{3a}$

$y = \frac{p_0}{3a} \cdot x$

II. szakasz balról:

$$V_{II}(x) = A_y - \frac{p_0}{3a} 3a \cdot \frac{3a}{2} + B_y = A_y - \frac{p_0}{2} 3a + B_y$$

$$M_{hII}(x) = -A_y x + \frac{p_0}{3a} \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} (x - 2a) - B_y (x - 3a)$$

Felrajzolás: HF kiszámolni különböző x helyeken és ábrázolni