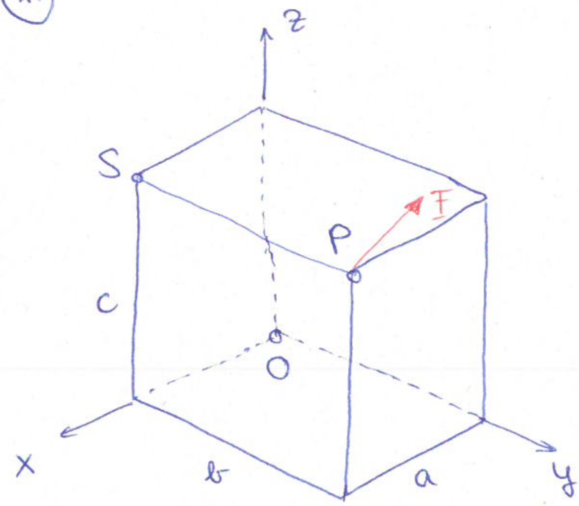
STATIKA – 4. gyakorlat

Erőrendszer redukáltja

(1.)



$a = 20$ mm

$b = 40$ mm

$c = 60$ mm

$$\underline{F} = 10\underline{i} + 50\underline{j} + 70\underline{k} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix}$$

Kérdés:

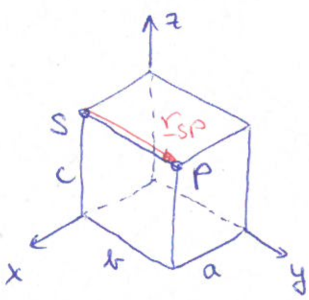
a) $\underline{M}_S = ?$

b) $\underline{M}_O = ?$

Megoldás:

a)
$$\underline{M}_S = \underline{r}_{SP} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \oplus & \ominus & \oplus \end{array} \\ \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 40 & 0 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix} \end{array} = \underline{i}(40\cdot70 - 50\cdot0) - \underline{j}(0\cdot70 - 10\cdot0) + \underline{k}(50\cdot0 - 10\cdot40)$$

!



$$\underline{r}_{SP} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} [\text{mm}]$$

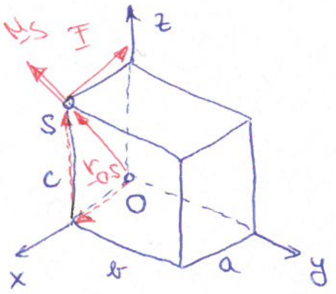
$$= \underline{i}\cdot 2800 - \underline{j}\cdot 0 + \underline{k}\cdot(-400) =$$

$$= \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} [\text{Nmm}] = \underline{M}_S$$

[P-ben $\underline{F}$ → S-ben $\underline{F}$ és $\underline{M}_S$]

b) O-ba redukáljuk: lesz $\underline{F}$ erő és nyomaték

$$\underline{M}_O = \underline{M}_S + \underline{r}_{OS} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 70 \end{bmatrix} =$$



$$= \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \oplus & \ominus & \oplus \end{array} \\ \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 20 & 0 & 60 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix} \end{array}} = \begin{bmatrix} 2800 \\ 0 \\ -400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3000 \\ -800 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3000 \\ -800 \\ 600 \end{bmatrix} [\text{Nmm}]$$

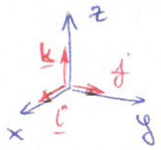
$$\underline{r}_{OS} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 60 \end{bmatrix} [\text{mm}]$$

$$+\underline{i}(0\cdot70 - 50\cdot60) - \underline{j}(20\cdot70 - 10\cdot60) + \underline{k}(20\cdot50 - 10\cdot0) =$$

$$= \underline{i}\cdot(-3000) - \underline{j}(+800) + \underline{k}\cdot1000 = \begin{bmatrix} -3000 \\ -800 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Erők nyomatéka az O pontra:

$$\underline{i}\times\underline{j}=\underline{k} \qquad \underline{j}\times\underline{i}=-\underline{k}$$
$$\underline{j}\times\underline{k}=\underline{i} \qquad \underline{k}\times\underline{j}=-\underline{i}$$
$$\underline{k}\times\underline{i}=\underline{j} \qquad \underline{i}\times\underline{k}=-\underline{j}$$



$$\underline{M}_{OF_1}=\underline{r}_1\times\underline{F}_1=(2\underline{i}+3\underline{j}+4\underline{k})\times(-25\underline{k})=2\cdot(-25)\cdot\underbrace{\underline{i}\times\underline{k}}_{-\underline{j}}+3\cdot(-25)\,\underbrace{\underline{j}\times\underline{k}}_{\underline{i}}+$$
$$+4\cdot(-25)\,\underbrace{\underline{k}\times\underline{k}}_{\underline{0}}=50\underline{j}-75\underline{i}=\begin{bmatrix}-75\\50\\0\end{bmatrix}[Nm]$$

$$\underline{M}_{OF_2}=\underline{r}_2\times\underline{F}_2=(4\underline{k})\times(70\underline{j})=-280\,\underline{i}=\begin{bmatrix}-280\\0\\0\end{bmatrix}[Nm]$$

$$\underline{M}_{OF_3}=\underline{r}_3\times\underline{F}_3=(2\underline{i})\times(-60\underline{i})=\underline{0}$$

Az erőrendszer nyomatéka az O-ra:

$$\boxed{\underline{M}_O=\sum_{j=1}^{m}\underline{M}_j+\sum_{i=1}^{n}\underline{r}_i\times\underline{F}_i}$$

$$\underline{M}_O=\underline{M}_1+\underline{M}_2+\underbrace{\underline{M}_{OF_1}}_{\underline{r}_1\times\underline{F}_1}+\underbrace{\underline{M}_{OF_2}}_{\underline{r}_2\times\underline{F}_2}+\underbrace{\underline{M}_{OF_3}}_{\underline{r}_3\times\underline{F}_3}=\ldots=\begin{bmatrix}-265\\160\\0\end{bmatrix}[Nm]$$

Statikai vektorkettős: erőrendszer redukálva O-ban:

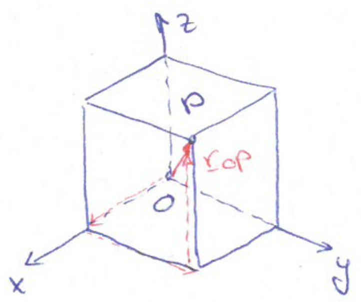
$$\boxed{\left[\underline{F};\underline{M}_O\right]_O} \qquad \underline{F}=\begin{bmatrix}-60\\70\\-25\end{bmatrix}[N] \;;\quad \underline{M}_O=\begin{bmatrix}-265\\160\\0\end{bmatrix}[Nm]$$

b) redukált A-ra?

$$\underline{M}_A=\underline{M}_O+\underbrace{\underline{r}_{AO}}_{\boxed{-\underline{r}_1}}\times\underline{F}=\underline{M}_0-\underline{r}_1\times\underline{F}=\begin{bmatrix}-265\\160\\0\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{vmatrix}\underline{i}&\underline{j}&\underline{k}\\-2&-3&-4\\-60&70&-25\end{vmatrix}}_{\begin{bmatrix}355\\190\\-320\end{bmatrix}}=\ldots=\begin{bmatrix}90\\350\\-320\end{bmatrix}[Nm]$$

$$\left[\underline{F};\underline{M}_A\right]_A, \quad \underline{F}=\begin{bmatrix}-60\\70\\-25\end{bmatrix}[N] \;;\quad \underline{M}_A=\begin{bmatrix}90\\350\\-320\end{bmatrix}[Nm]$$

Ha P-ből O-ba:

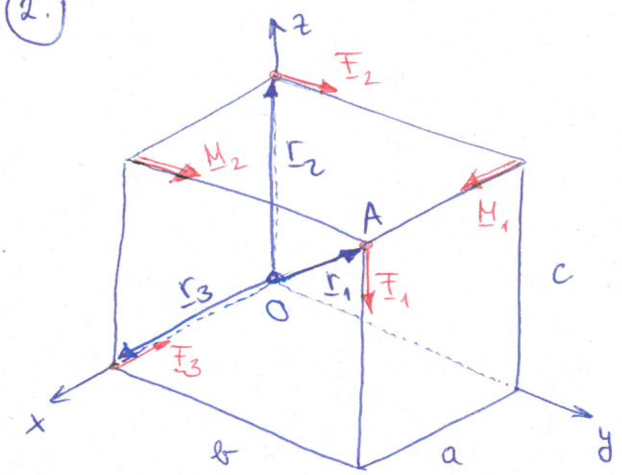


$$\underline{M}_O = \underline{r}_{OP} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 20 & 40 & 60 \\ 10 & 50 & 70 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -200 \\ -800 \\ 600 \end{bmatrix} [Nmm]$$

$$\underline{r}_{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 40 \\ 60 \end{bmatrix}$$

UGYANAZ!!!

2.



$a = 2m$

$b = 3m$

$c = 4m$

$F_1 = 25N$

$F_2 = 70N$

$F_3 = 60N$

$M_1 = 90Nm$

$M_2 = 110Nm$

Feladatok:

a, redukált O pontra?

Erővektorok: $\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} [N]$ $\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} [N]$ $\underline{F}_3 = \begin{bmatrix} -F_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [N]$

Nyomatékvektorok: $\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [Nm]$ $\underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 110 \\ 0 \end{bmatrix} [Nm]$

Támadáspontok: $\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} [m]$ $\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} [m]$ $\underline{r}_3 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$

Eredő erő:

$$\boxed{\underline{F} = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i}$$

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 70 \\ -25 \end{bmatrix} [N]$$

c) $\underline{F} \cdot \underline{M}_O = \underline{F} \cdot \underline{M}_A$?

$$\underline{F} \cdot \underline{M}_O = (-60)\cdot(-265) + 70 \cdot 160 + (-25)\cdot 0 = 27\,100 \; (N^2 m) \; !$$

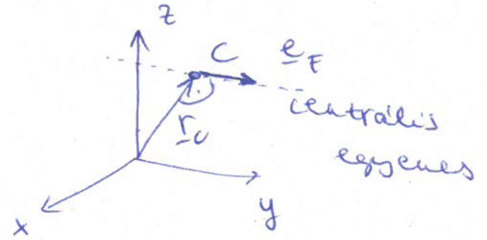
$$\underline{F} \cdot \underline{M}_A = (-60)\cdot 90 + 70 \cdot 350 + (-25)\cdot(-320) = 27\,100 \; N^2 m$$

✓

d) centrális egyenes egyenlete?

Centrális egyenes C pontjának helyvektora (C: az a pont, ami a legközelebb van O-hoz):

$$\boxed{\underline{r}_C = \frac{\underline{F} \times \underline{M}_O}{\underline{F}^2}}$$



, $\underline{F} \parallel \underline{M}_C$

erő és redukált nyomaték párhuzamosak

$$\underline{F}^2 = \underline{F} \cdot \underline{F} = (-60)^2 + 70^2 + (-25)^2 = 9125 \; N^2$$

$$\underline{F} \times \underline{M}_O = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -60 & 70 & -25 \\ -265 & 160 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 6625 \\ 8950 \end{bmatrix} [N^2 m]$$

$$\underline{r}_C = \begin{bmatrix} 0{,}4384 \\ 0{,}7260 \\ 0{,}9808 \end{bmatrix} [m]$$

Centrális egyenes iránnyvektora (egység hosszú):

$$\underline{e}_F = \frac{\underline{F}}{|\underline{F}|} = \begin{bmatrix} -0{,}6281 \\ 0{,}7328 \\ -0{,}2617 \end{bmatrix}$$

Centrális egyenes egyenlete:

$$\underline{r}(\lambda) = \underline{r}_C + \lambda \cdot \underline{e}_F = \begin{bmatrix} 0{,}4384 \\ 0{,}7260 \\ 0{,}9808 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -0{,}6281 \\ 0{,}7328 \\ -0{,}2617 \end{bmatrix} \; [m]$$

Erőrendszer redukáltja a C pontba:

$$\underline{M}_C = \underline{M}_O + \underline{r}_{CO} \times \underline{F} = \underline{M}_O - \underline{r}_{OC} \times \underline{F} = \begin{bmatrix} -178{,}192 \\ 207{,}890 \\ -74{,}247 \end{bmatrix} [Nm]$$

$(\underline{M}_C \times \underline{F} = \underline{0} \rightarrow \underline{M}_C \parallel \underline{F})$

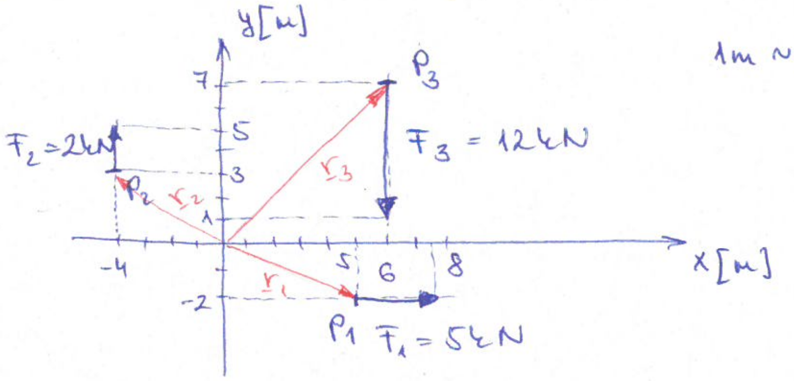
e) egyensúlyhoz mi kell? $\underline{F}^*$? $\underline{M}_0^*$?

Egyensúly: testre ható erők és nyomatékok összege zérus.

→ O-ba redukált vektorkettős −1-szerese kell!

$$[\underline{F}^*;\ \underline{M}_0^*]_0 = [-\underline{F};\ -\underline{M}_0]_0 \qquad \underline{F}^* = \begin{bmatrix} 60 \\ -70 \\ 25 \end{bmatrix} [N] \qquad \underline{M}_0^* = \begin{bmatrix} 265 \\ -160 \\ 0 \end{bmatrix} [Nm]$$

③ $\underline{F}_e$ + hatásvonala számítással?



1m ~ 2kN

Megoldás:

A koncentrált erők helyvektorai (ábráról leolvasva)

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_{OP_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} [m] \qquad \underline{r}_2 = \underline{r}_{OP_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} [m] \qquad \underline{r}_3 = \underline{r}_{OP_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$$

Koncentrált erők vektorai:

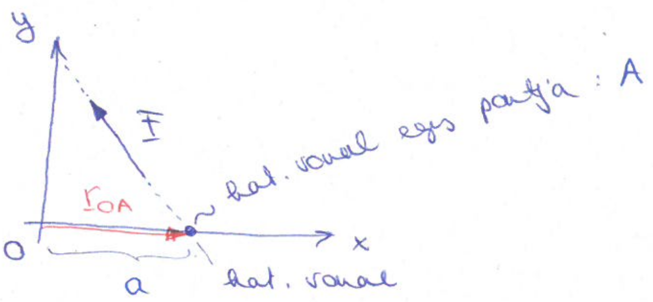
$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [kN] \qquad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} [kN] \qquad \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} [kN]$$

Redukált O pontra:

$$\underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} [N]$$

$$\underline{M}_0 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 + \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 + \underline{r}_3 \times \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} [kNm]$$

$\underline{F}$ hatásvonala:



$\underline{F}$ nyomatéka O-ra = teljes erőrendszer nyomatéka O-ra

$$\underline{r}_{OA} \times \underline{F} = \underline{M}_0$$

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -78 \end{bmatrix} \rightarrow a = \frac{-78}{-8} = 9{,}75 \text{ m}$$

Hatásvonal egyenlete:

$$\underline{r}(\lambda) = \underline{r}_{OA} + \lambda \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} 9{,}75 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Síkbeli</u> erőrendszer:

- ~ $\underline{M}$ ⊥ síkra (ebben a feladatban z irányú, minden erő z körül forgat)
- ~ erő · erőkar (erőkar: ⊥ az erőre!)
- ~ nyomaték előjele: jobbkéz szabály!

$$M_0 = +5 \cdot 2 - 4 \cdot 4 - 12 \cdot 6 = -78 \text{ kNm}$$

↳ tehát nem feltétlenül kell $\underline{r} \times \underline{F}$ szorzással számolni a nyomatékot