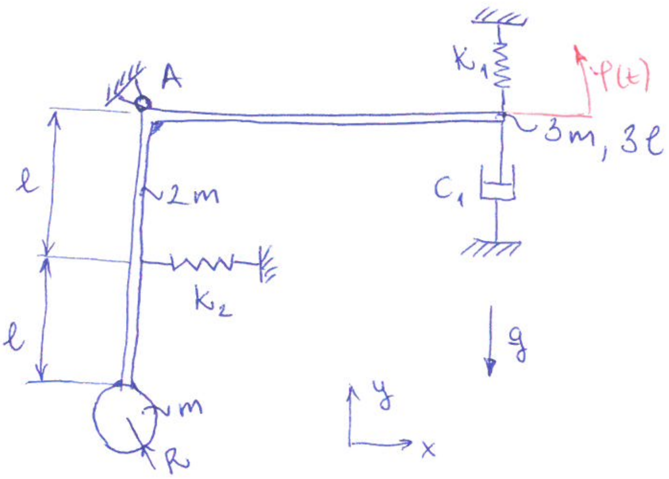
REZGÉSTAN – 5. gyakorlat

Csillapított 1DoF L alakú
rezgő kar

Feladat



Adatok:

$\ell = 0{,}2\ m$

$R = 0{,}1\ m$

$m = 0{,}12\ kg$

$k_1 = 300\ N/m$

$k_2 = 10\ N/m$

$c_1 = 2\ Ns/m$

$\varphi_0 = 0{,}01\ rad$

$\varphi = 0$-nál k_2 rugó terheletlen

Kérdések:

1.) Mozgásegyenlet + paraméterek

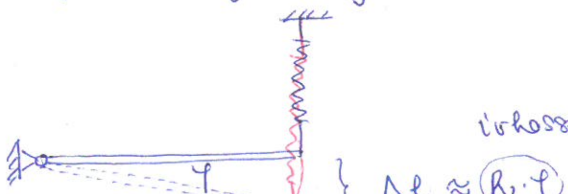
2.) $c_{1,cr}$, kritikus csillapítás

3.) Max rugóerő k_1 merevségű rugóban $(\varphi(0) = \varphi_0,\ \dot\varphi(0) = 0)$

Megoldás

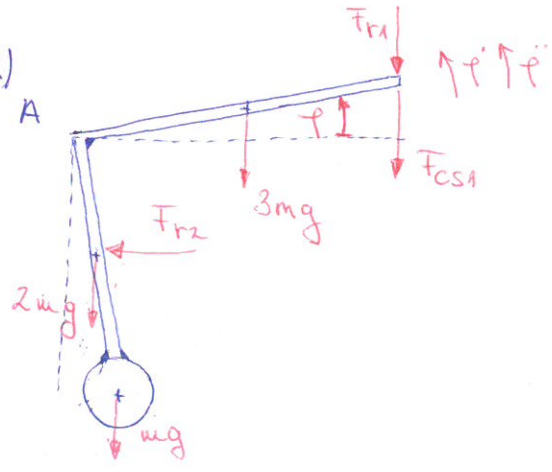
Megjegyzések: ~ vízszintes rúdnál lévő gravitációs erő nem befolyásolja a sajátfrekit (3. gyakorlat anyaga)

~ rugók deformációja közelíthető az ívhosszal (egyensúlyi helyzettől mérve)



SZTÁ

(hiányos!)



Newton II. törvénye (álló pontra, A-ra): $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$ + linearizálás

$$\Theta_A \cdot \ddot{\varphi} = -F_{r1}\cdot 3l\underbrace{\cos\varphi}_{1} - F_{r2}\, l\underbrace{\cos\varphi}_{1} - F_{cs1}\cdot 3l\underbrace{\cos\varphi}_{1} - 3mg\cdot\frac{3l}{2}\underbrace{\cos\varphi}_{1} - 2mgl\underbrace{\sin\varphi}_{\varphi} - mg(2l+R)\underbrace{\sin\varphi}_{\varphi}$$

Csillapító és rugóerők:

$F_{cs1} \approx c_1\cdot 3l\dot{\varphi}$ (nincs olyan, hogy statikus csillapítás! szögsebesség nem függ az általános koord. 0 helyzetétől!)

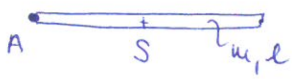
$F_{r1} \approx F_{r1,st} + k_1 3l\varphi$

$F_{r2} \approx k_2 l\varphi$ (ez a rugó $\varphi = 0$-nál terheletlen)

Tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_A = \frac{1}{3}\cdot 3m\cdot(3l)^2 + \frac{1}{3}\,2m(2l)^2 + \frac{1}{2}mR^2 + m(2l+R)^2 = 0{,}0866\,kgm^2$$

Megj.:



Rúd végpontjára, A pontra:

$$\Theta_A = \underbrace{\frac{1}{12}m\cdot l^2}_{\text{saját sp.-ra}} + \underbrace{m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2}_{\text{Steiner}} = \frac{1}{12}ml^2 + m\cdot\frac{l^2}{4} = \frac{1}{3}ml^2$$

Erőket behelyettesítjük:

$$\Theta_A\ddot{\varphi} = -(F_{r1,st} + k_1 3\varphi\cdot l)\cdot 3l - k_2 l\varphi\cdot l - c_1 3l\dot{\varphi}\cdot 3l - 3mg\frac{3l}{2} - 2mgl\varphi - mg(2l+R)\varphi$$

Konstans tagok kiejtik egymást, ha a mozgás nélküli, egyensúlyi helyzetbeli pozíciót nézzük: $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$

$$0 = -F_{r1,st}3l - 3mg\frac{3l}{2} \longrightarrow F_{r1,st} = -\frac{3}{2}mg = -1{,}7658N$$

Mozgásegyenlet így:

$$\Theta_A\ddot{\varphi} + 9l^2c_1\dot{\varphi} + (9l^2k_1 + l^2k_2 + 4mgl + mgR)\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{9l^2c_1}{\Theta_A}}_{2\zeta\omega_n}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{9l^2k_1 + l^2k_2 + 4mgl + mgR}{\Theta_A}}_{\omega_n^2}\varphi = 0$$

Csillapítatlan rendszer sajátkörfrekvencia:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{9\ell^2 k_1 + \ell^2 k_2 + 4mg\ell + mgR}{\Theta_A}} = 35{,}55\ \frac{rad}{s}$$

Relatív csillapítási tényező:

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_n}\,\frac{9\ell^2 c_1}{\Theta_A} = 0{,}117 \longrightarrow 11{,}7\%$$

Többi paraméter:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = 35{,}31\ \frac{rad}{s}$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = 0{,}1779\,s$$

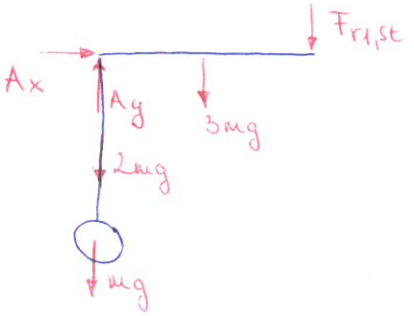
$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 5{,}62\,s$$

2.) Kritikus csillapítás: $\boxed{\zeta_{cr} = 1} \longrightarrow c_{1,cr} = ?$

Mozgásegyenletből: $2\zeta_{cr}\,\omega_n = \frac{9\ell^2 c_{1,cr}}{\Theta_A} \longrightarrow c_{1,cr} = \frac{2\zeta_{cr}\,\omega_n\,\Theta_A}{9\ell^2} = 17{,}10\ \frac{Ns}{m}$

3.) $F_{r1}(t) = F_{r1,st} + k_1\, 3\ell\, \varphi(t)$

$F_{r1,st}$ az egyensúlyhelyzetbeli SZTÁ-ból is kijön:



~ $\varphi = 0$ -nál (és $\dot\varphi$ is 0) k_2 rugó nincs megnyúlva $\rightarrow F_{r2} = 0$

~ $\dot\varphi = 0$ miatt $F_{cs1} = 0$

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow -3mg\frac{3\ell}{2} - F_{r1,st}\cdot 3\ell = 0$$

$$F_{r1,st} = -3mg\cdot\frac{1}{2}$$

Tehát $F_{r1,st}$ valódi iránya: $\uparrow$

Tehát a rugó meg van nyúlva, nem pedig összenyomódva!

A max. rugóerőhöz kell φ maximuma $\rightarrow$ kell a mozgástörvény.

$$\varphi(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right)$$

$$\dot\varphi(t) = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right) + \omega_d e^{-\zeta\omega_n t}\left(-A\sin(\omega_d t) + B\cos(\omega_d t)\right)$$

Kezdeti feltételek:

$\varphi(0) = \varphi_0 \longrightarrow A \cdot 1 + B \cdot 0 = \varphi_0 \longrightarrow A = \varphi_0$

$\dot\varphi(0) = 0 \longrightarrow -\zeta\omega_n(A \cdot 1 + B \cdot 0) + \omega_d(-A \cdot 0 + B \cdot 1) = 0 \longrightarrow B = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} A = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\varphi_0$

Ahol $\varphi(t)$ maximális, ott lesz F_{r1} is maximális.

$\rightarrow$ $\varphi(t)$ deriváltja itt nulla.

$\dot\varphi(t^*) = 0$

$$-\zeta\omega_n \cancel{e^{-\zeta\omega_n t^*}}\left(A\cos(\omega_d t^*) + B\sin(\omega_d t^*)\right) + \omega_d \cancel{e^{-\zeta\omega_n t^*}}\left(-A\sin(\omega_d t^*) + B\cos(\omega_d t^*)\right) = 0 \Big/ \cos$$

$$-\zeta\omega_n A - \zeta\omega_n B \tan(\omega_d t^*) - A\omega_d \cdot \tan(\omega_d t^*) + \omega_d B = 0$$

$$\tan(\omega_d t^*) = \frac{-\zeta\omega_n A + \omega_d B}{\zeta\omega_n B + A\omega_d} = \frac{-\zeta\omega_n \cdot A + \omega_d \cdot \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \cdot A}{\frac{(\zeta\omega_n)^2 A}{\omega_d} + A \cdot \omega_d} = 0$$

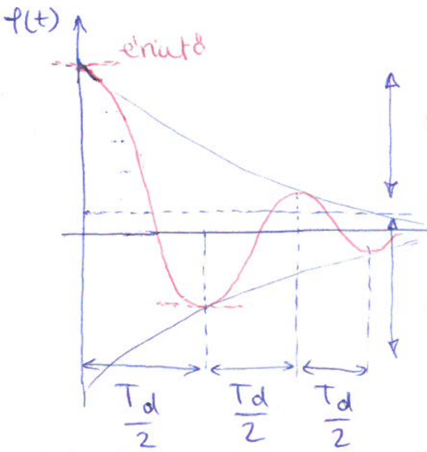
$$B = \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} A$$

$$t^* = \frac{1}{\omega_d} \arctan 0 = \frac{0 + j \cdot \pi}{\omega_d} = 0 + \frac{T_d}{2} \cdot j, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \rightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$$

Kezdeti feltétel: csak szög. Tehát picit kihúztuk az egyensúlyi helyzetből és elengedjük. Nem lökjük meg. $\rightarrow$ Csillapítás miatt $t^* = 0$-nál van $\varphi_{max} = \varphi_0 = 0{,}01$ rad. Viszont ez csak a dinamikus része az erőnek. Statikus def. miatt lehet máshol a max. rugóerő.

Pl. $\varphi(t^* + \frac{T_d}{2}) = \varphi(\frac{T_d}{2}) = -0{,}007$ rad, ez a következő szélsőérték.



nyomva van a rugó $\rightarrow$ nyomóerő

terheletlen állapot

húzva van a rugó $\rightarrow$ húzóerő

$F_{r1}(t^*) = F_{r1,st} + k_1 3\ell\varphi(t^*) = 0{,}034$N

$F_{r1}(t^* + \frac{T_d}{2}) = F_{r1,st} + k_1 3\ell\varphi(t^* + \frac{T_d}{2}) = -3{,}009$N

$|F_{r1,max}| = |F_{r1}(T_d/2)| = \underline{\underline{3009\text{N}}}$