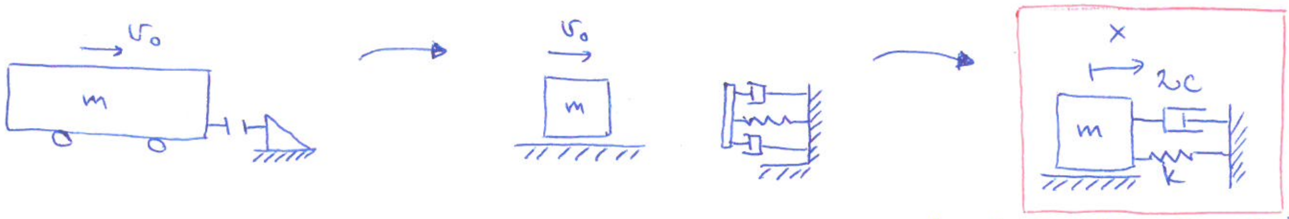
REZGÉSTAN - 4. gyakorlat

Csillapított 1DoF rendszer

Feladat: vonat nekiütközik az ütközőnek.

ÜTKÖZÉS MECHANIKAI MODELLJE



$2c, k$: ütközés utáni egyenértékű merevség és csillapítás

Adatok: $m = 5 \cdot 10^4\ kg$ $\quad v_0 = 1\ m/s$

$k = 10^6\ N/m$ $\quad c = 10^5\ Ns/m$

Kérdés: 1.) Max. rugóerő az ütközés során? $F_{r,max}$

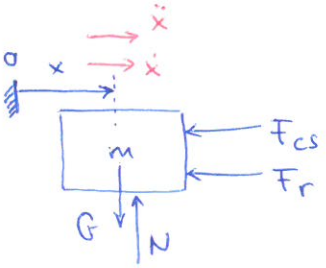
2.) ütközés során elnyelt energia? E_{dissz}

Megoldás:

1.) 1 DoF rendszer, általános koordináta: x

x = 0-nál a rugó nyújtatlan (x = 0 az a pozíció, amikor éppen összeér a vonat és az ütköző.)

SZTÁ



Dinamika alaptétele: $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$

$x: \quad m\ddot{x} = -F_{cs} - F_r$

$(y: \quad 0 = N - G)$

$F_{cs} = 2c\dot{x}$ (csillapító erő)

$F_r = kx$ (rugóerő)

Mozgásegyenlet: $m\ddot{x} + 2c\dot{x} + kx = 0 \qquad /:m$

$$\ddot{x} + \frac{2c}{m}\dot{x} + \boxed{\frac{k}{m}}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \boxed{\omega_n^2}x = 0$$

ζ: csillapítási tényező

ω_n: sajátkörfrekvencia

$$: \quad \frac{\cancel{2}c}{m} = \cancel{2}\zeta\omega_n$$

$$\boxed{} : \quad \frac{k}{m} = \omega_n^2 \longrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4{,}47\ \frac{rad}{s} \longrightarrow \zeta = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{c}{m} = 0{,}45\ (\approx 45\%)$$

Csillapított rendszer sajátkörfrekvenciája: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 4\ \frac{rad}{s}$

Periódusidő: csillapított rendszernél ω_d! $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = 1{,}57\,s$

Csillapított rendszer sajátfrekvenciája: $f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = 0{,}64\ Hz$

Mozgásegyenlet: másodrendű, homogén diffegy. (ODE), $\underline{\zeta < 1}$!

↳ Általános megoldás:

(1) $x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left(C_1\cos(\omega_d t) + C_2\sin(\omega_d t)\right)$

Derivált:

(2) $\dot{x}(t) = -\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\left(C_1\cos(\omega_d t)+C_2\sin(\omega_d t)\right) + \omega_d e^{-\zeta\omega_n t}\left(-C_1\sin(\omega_d t)+C_2\cos(\omega_d t)\right)$

Kezdeti feltételek: $\left.\begin{array}{l} x(t=0)=0 \\ \dot{x}(t=0)=v_0 \end{array}\right\}$

$x(t=0)=0 \longrightarrow x(0) = 1\cdot(C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0) = 0 \longrightarrow \boxed{C_1 = 0}$

$\dot{x}(t=0)=v_0 \longrightarrow \dot{x}(0) = \underbrace{-\zeta\omega_n\cdot 1\cdot(\overset{C_1=0}{C_1}\cdot 1 + C_2\cdot 0)}_{0} + \omega_d\cdot 1(-C_1\cdot 0 + C_2\cdot 1) = v_0$

$\omega_d\cdot C_2 = v_0$

$\boxed{C_2 = \frac{v_0}{\omega_d}} = 0{,}25\,m$

Mozgástörvény: $x(t) = 0{,}25\cdot e^{-2t}\cdot\sin(4\cdot t)$ [m]

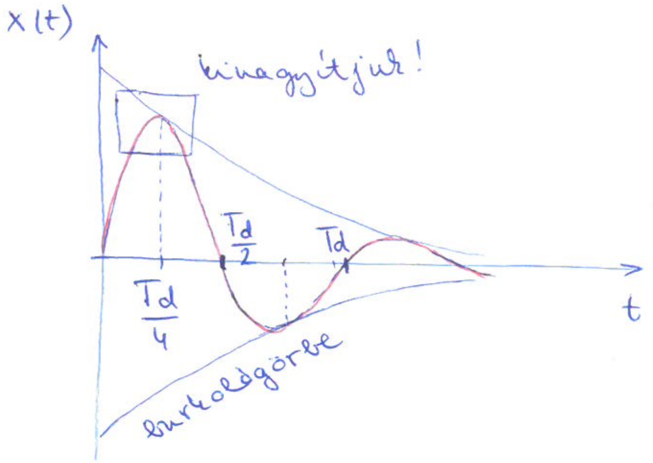
(A vonat nekimegy az ütközőnek. Rugók összenyomódnak egyre jobban. Ahol teljesen össze vannak nyomva: x^*, a legnagyobb pozitív x kitérés. Itt lesz a legnagyobb a rugóerő ($t=t^*$-nál), mert a rugó összenyomódása itt a legnagyobb. Utána a rugók elkezdik visszanyomni a vonatot, elindul $-x$ irányba. Amint a vonat és az ütköző kontaktot veszt, a kiszámolt mozgástörvény érvényét veszti.)

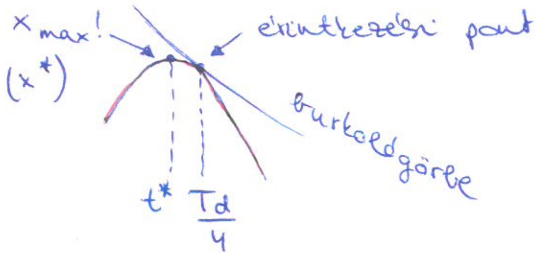
Tehát: $x_{max} = x^*$, $t = t^*$-nál.

$F_r(t) = k\cdot x(t) \longrightarrow F_{r,max} = k x^* = k\,x(t^*)$

$x(0)$-nál a rugó deformációja 0

Felrajzoljuk a mozgástörvényt:





TEHÁT $t^* < \frac{T_d}{4}$!!!

Meg kell találni $x(t)$ szélsőértékét: $\dot{x}(t^*) = 0$

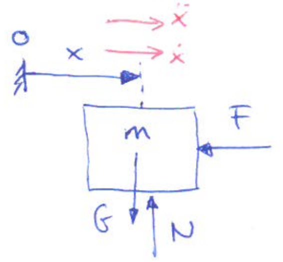
$$\dot{x}(t^*) = -\zeta\omega_n \cancel{e^{-\zeta\omega_n t^*}}\, \cancel{C_2} \sin(\omega_d t^*) + \omega_d \cancel{e^{-\zeta\omega_n t^*}}\, C_2 \cos(\omega_d t^*) = 0$$

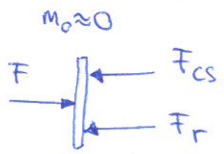
$$\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = \underbrace{\frac{\sin(\omega_d t^*)}{\cos(\omega_d t^*)}}_{\tan(\omega_d t^*)} \rightarrow t^* = \frac{1}{\omega_d}\arctan\frac{\omega_d}{\zeta\omega_n} = 0{,}277\,s < \frac{T_d}{4} \checkmark$$

(lenne több mo. is, mert tan periodikus)

Max. kitérés: $x^* = x(t^*) = 0{,}129\,m \rightarrow F_{r,max} = k \cdot x^* = \underline{\underline{128{,}55\,kN}}$

2.) SZTÁ: vonat és ütköző külön. Minden pillanatban nyomják egymást (húzni nem tudják).





$m\ddot{x} = -F$

$\boxed{F(t) = -m\ddot{x}(t)}$ (1)

$0 = F - F_{cs} - F_r$

$\boxed{F(t) = k\,x(t) + 2c\,\dot{x}(t)}$ (2)

$F(t)$ felírható kétféleképpen: (1) és (2).

Az ütközésnek akkor van vége, amikor $F(t) = 0$ lesz, akkor már nincs kontakt, $F(t)$ előjelet vált, $t = t^{**}$-nál.

(2) -ből számoljuk: $k \cdot x(t^{**}) + 2c\dot{x}(t^{**}) = 0$

$x(t)$ -t kiszámoltuk, $\dot{x}(t)$ -t is.

$$k \cancel{e^{-\zeta\omega_n t^{**}}} \cdot C_2 \sin(\omega_d t^{**}) + 2c \cdot \cancel{e^{-\zeta\omega_n t^{**}}} \left(C_2 \omega_d \cos(\omega_d t^{**}) - C_2 \zeta\omega_n \sin(\omega_d t^{**})\right) = 0$$

$$\rightarrow \tan(\omega_d t^{**}) = \underbrace{\frac{2\omega_d c}{2\omega_n \zeta c - k}}_{y} \longrightarrow t^{**} = \frac{1}{\omega_d} \arctan y = \underbrace{-0{,}2325}_{<0} + \frac{T_d}{2} = \underline{\underline{0{,}553}}$$

tangens T periodikus, és $\oplus$ számot szeretnénk kapni

Sebesség t^{**} -nál:

$v_1 = \dot{x}(t^{**}) = \ldots$ behelyettesítünk $\ldots = -0{,}33\ m/s$ $(\leftarrow)$

Mozgási energia változása $=$ disszipatív erők munkája:

$$W_{disszip} = T(t^{**}) - T(0) = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -22{,}27\ kJ$$

$$E_{disszip} = -W_{disszip} = \underline{\underline{22{,}27\ kJ}}$$

Pontosabb megoldás: t^{**} -nál a rugónak van valamennyi összenyomódása!

$t = 0$ -nál: $E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$

$t = t^{**}$ -nál: $E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k \left(x(t^{**})\right)^2$

$\boxed{\Delta E = E_1 - E_0}$

$\Delta E = E_{disszip}$

$\uparrow$ $\dot{x}(t^{**})$