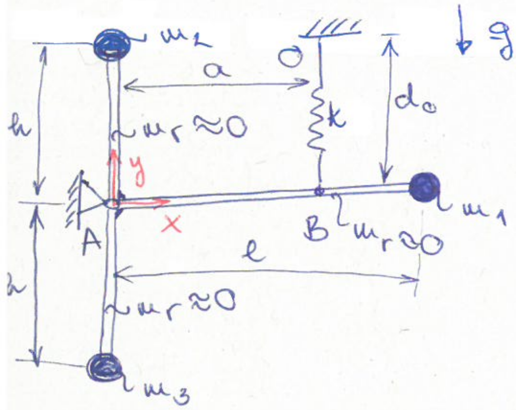
Rezgéstan – 3. gyakorlat

Nehézségi erő hatása, rugók előfeszítése, linearizálás



d_0: a rugó egyensúlyi helyzetben mért hossza

Adatok:

$m_1 = 2\,kg$	$h = 0{,}5\,m$
$m_2 = 4\,kg$	$l = 1\,m$
$m_3 = 3\,kg$	$a = 0{,}6\,m$
$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$	$k = 10000\,\frac{N}{m}$

Feladatok:

1) Linearizált mozgásegyenlet

2) $\omega_n = ?$ $T_n = ?$ $f_n = ?$

3) Mozgástörvény, ha $t = 0$-ban m_1 sebessége $v_0 = 1\,\frac{m}{s}$ $(\downarrow)$, kitérése $y_0 = -1\,cm$!

4) Rugóerő maximuma?

Megoldás:

1.) Linearizált mozgásegyenlet:

~ kis amplitúdójú rezgések az egyensúlyi helyzet körül

~ egyensúlyi helyzet: l hosszúságú rúd vízszintes

Koordináta választás: úgy választjuk, hogy a lehető legegyszerűbb legyen a számolás!

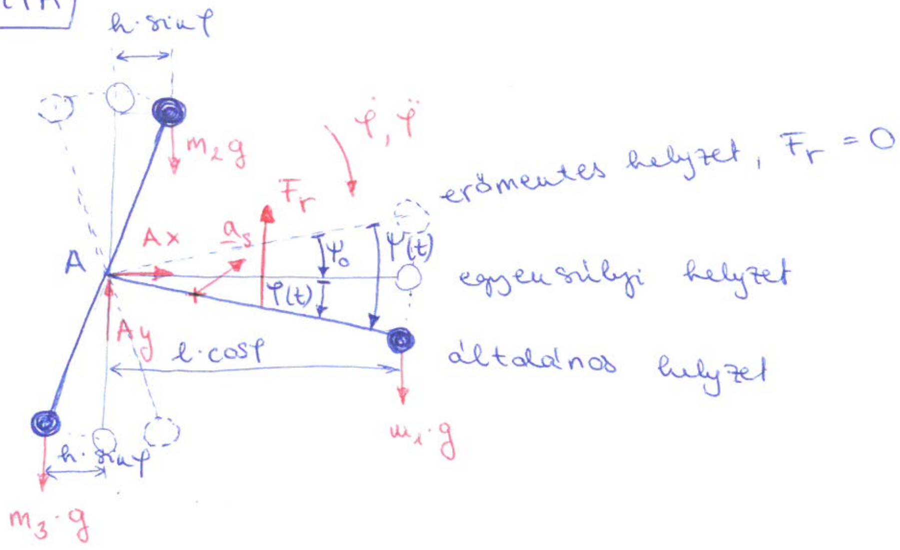
Két eset:

a) rugó erőmentes helyzetétől mért koordináta (több rugó: nem biztos, hogy mindegyik ugyanabban a helyzetben van erőmentesen) → ψ

b) statikus egyensúlyi helyzet → φ

Alapelv: mivel a rendszer az egyensúlyi helyzet körül végez lengéseket és linearizálni is itt tudunk könnyen, innen célszerű ezt felvenni az ált. koordinátát

$\boxed{\text{SZTÁ}}$



$\Psi(t) = \Psi_0 + \varphi(t)$

Ψ_0: statikus deformáció

($\ddot\varphi = \ddot\Psi$, mert Ψ_0 konstans)

$\dot\varphi = \dot\Psi$

Általános koordináta: $\boxed{\varphi}$

Dinamika alapt. "A" pontra ("A" tartósan álló pont): $\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{M}_A$

Elég a z vetületi egyenlet!

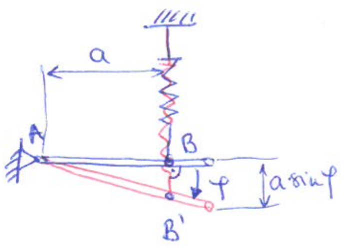
($\underline{F} = m\cdot\underline{a}_S$ -ből a csapágyerőket ki lehetne számolni, ha kellenének.)

$$\dot\Pi_{Az} = M_{Az} \longrightarrow \tilde\Theta_A\cdot\ddot\varphi = +m_1 g l\cos\varphi + m_2 g h\sin\varphi - m_3 g h\sin\varphi - \underbrace{M_r(\varphi)}_{\text{rugó nyomatéka}}$$

→ Megj.: ~ $\ddot\varphi$-t úgy vettük fel ⊕-ra: ↓

~ $m_1\cdot g$ nyomatéka is ilyen irányú → $m_1\cdot g$ nyomatéka ⊕

$M_r(\varphi)$ meghatározása: függ $M_r(\varphi)$ a nyújtatlan hossztól! → DE! Meg lehet mutatni, hogy csak φ^4-ben van benne.



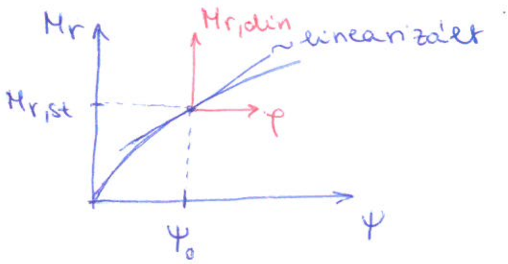
$\varphi = 0$: rugónak statikus deformációja van csak

Ha a rugó hosszú: B pont vízszintes elmozdulása ≈ 0, ha φ-vel (φ is kicsi) elfordul a szerkezet.

Rugó megnyúlása: $\Delta l = a\cdot\underbrace{\sin\varphi}_{\approx\varphi} \approx a\cdot\varphi$

$$F_r(\varphi) \approx \underbrace{F_{r,st}}_{\text{statikus}} + \underbrace{\overbrace{ka\varphi}^{\Delta l}}_{\text{dinamikus}} \xrightarrow{\cdot a} M_r(\varphi) \approx \underbrace{M_{r,st}}_{F_{r,st}\cdot a} + ka^2\varphi$$

("a" az erőkar, mert a B pont vízszintes elmozdulását elhanyagoltuk)



Ezzel a mozgásegyenlet:

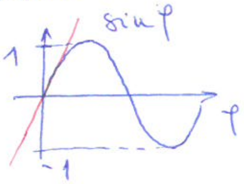
$$\Theta_A \ddot{\varphi} = m_1 g l \cos\varphi + m_2 g h \sin\varphi - m_3 g h \sin\varphi - (M_{r,st} + k a^2 \varphi)$$

Linearizálás:

$\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ $\varphi = 0$ körüli Taylor sora:

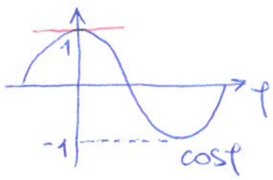
(RADIÁNBAN!)

$$\sin\varphi = \varphi \cancel{- \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!}} + \dots$$



$\sin\varphi \approx \varphi$

$$\cos\varphi = 1 \cancel{- \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!}} + \dots$$



$\cos\varphi \approx 1$

$\varphi \approx 0 \rightarrow \varphi^2, \varphi^3$ stb.

"még jobban" ≈ 0

Linearizált mozgásegyenlet:

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = m_1 g l \cdot 1 + m_2 g h \varphi - m_3 g h \varphi - M_{r,st} - k a^2 \varphi$$

$M_{r,st}$ értékét nem tudjuk! Viszont az egyensúlyi helyzetben:

$\varphi = 0$

$\left.\begin{array}{l}\dot{\varphi} = 0 \\ \ddot{\varphi} = 0\end{array}\right\}$ nem mozog

Mozgásegyenlet:

$$0 = m_1 g l - M_{r,st} \longrightarrow M_{r,st} = m_1 g l \rightarrow F_{r,st} = \frac{M_{r,st}}{a} = \frac{m_1 g l}{a}$$

(statika feladat, $\sum M_A = 0$)

$M_{r,st}$ -t visszahelyettesítjük:

$$\Theta_A \ddot{\varphi} = \cancel{m_1 g l} + m_2 g h \varphi - m_3 g h \varphi - \cancel{m_1 g l} - k a^2 \varphi$$

$$\boxed{\Theta_A \ddot{\varphi} + (k a^2 + m_3 g h - m_2 g h)\varphi = 0}$$ linearizált mozgásegyenlet

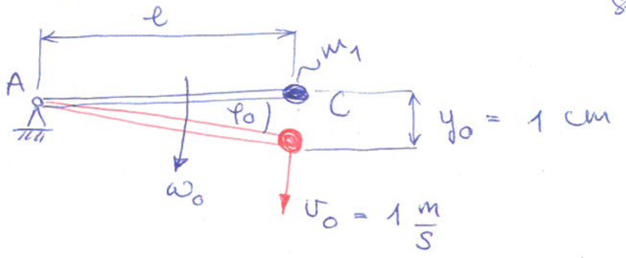
2.) $\Theta_A = m_1 l^2 + m_2 h^2 + m_3 h^2 = 3{,}75\ \mathrm{kg\,m^2}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k a^2 + m_3 g h - m_2 g h}{\Theta_A}} = 30{,}96\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 4{,}93\ \mathrm{Hz}$$

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0{,}203\ \mathrm{s}$$

3.) Megadott kezdeti feltételek: m_1 tömegpontra (C pont), át kell számolni az általános koord.-ra!



$$\varphi_0 \approx \frac{y_0}{l} = 0{,}01 \text{ rad}$$ ⊕ a felvett φ irány miatt

$$\omega_0 \approx \frac{v_0}{l} = 1 \frac{\text{rad}}{s}$$

Általános megoldás:

$$\varphi(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)$$

$$\dot\varphi(t) = -C_1 \omega_n \sin(\omega_n t) + C_2 \omega_n \cos(\omega_n t)$$

C_1 és C_2 számolása a kezdeti feltételekből:

$$\varphi(t=0) = \varphi_0 \longrightarrow C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = \varphi_0$$

$$\dot\varphi(t=0) = \omega_0 \longrightarrow -C_1 \omega_n \cdot 0 + C_2 \omega_n \cdot 1 = \omega_0$$

$$C_1 = \varphi_0 = 0{,}01 \text{ rad}$$

$$C_2 = \frac{\omega_0}{\omega_n} = 0{,}033 \text{ rad}$$

Mozgástörvény:

$$\varphi(t) = 0{,}01 \cos(30{,}96 \cdot t) + 0{,}033 \sin(30{,}96 t) \quad [\text{rad}]$$

4.) Rugóerő:

$$F_r(t) = \underbrace{F_{r,st}}_{\text{konstans}} + \underbrace{k a \varphi(t)}_{\text{változik}}$$ → kell a maximuma, φ_{max}-nál

$$F_{r,max} = F_{r,st} + k a \varphi_{max}$$

Mozgásegyenlet:

$$\varphi(t) = \Phi \cos(\omega_n t + \delta) = \Phi \cos(\omega_n t) \cdot \cos\delta - \Phi \sin(\omega_n t) \cdot \sin\delta$$

$\cos(\omega_n t)$: $C_1 = \Phi \cos\delta$

$\sin(\omega_n t)$: $C_2 = -\Phi \sin\delta$

$$\Phi = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = 0{,}0338 \text{ rad}$$

$$\delta = -\operatorname{atan}\left(\frac{C_2}{C_1}\right) = -1{,}277 \text{ rad}$$

$$\varphi_{max} = \Phi$$

$$F_{r,max} = m_1 g \frac{l}{a} + k a \Phi = 235{,}56 \text{ N}$$