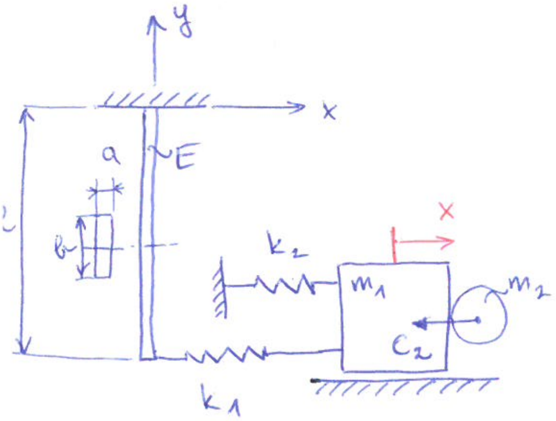
REZGÉSTAN – 2. gyakorlat

Csillapítatlan 1DoF rendszer



Adatok

$a = 0{,}006\ m$ $\quad b = 0{,}025\ m$

$l = 0{,}5\ m$ $\quad E = 210\ GPa$

$m_1 = 5\ kg$ $\quad m_2 = 1\ kg$

$k_1 = 100\ N/m$ $\quad k_2 = 50\ N/m$

$c_1 = 0\ m/s$ $\quad c_2 = 0{,}6\ m/s$

$e = 0{,}5$

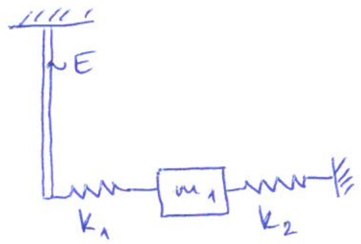
Kérdés: a) Rendszer sajátkörfrekvenciája? (ω_n)

b) Max elmozdulása, sebessége, gyorsulása m_1-nek?

Függvényeket felrajzolni!

Megoldás

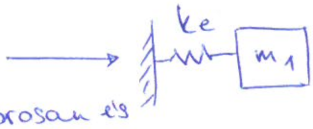
a, Keressünk egy helyettesítő modellt!



① eredeti

A rúd tömege elhanyagolható! Csak a merevsége kell! (k_r)

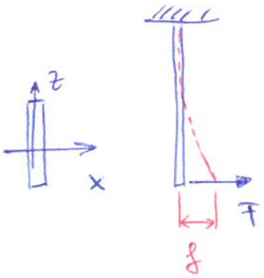
②



Sorosan és párhuzamosan kapcsolt megold → egyenértékű merevség (k_e) ③

Rúd modellezése merevségként / rugóként (① → ②):

Statikai feladat:



k_1 merevségű rugó miatt F_1 erő húzza / tolja a rúd végét. → Lesz elmozdulása a rúd végének vízszintes irányban (f).

$\underset{F}{\text{rugóerő}} = \underset{k_r}{\text{merevség}} \cdot \underset{f}{\text{elmozdulás}}$

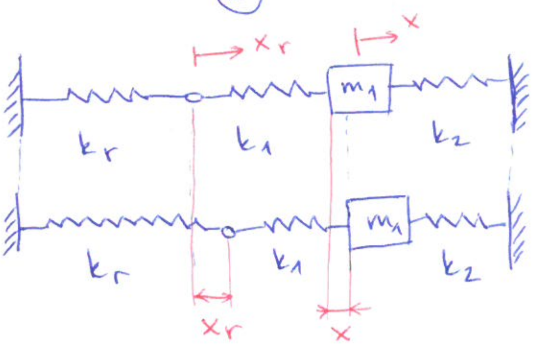
Elmozdulás (f) Castiglianoból jön (HF átnézni).

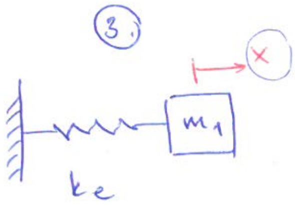
Járulékképlet: $f = \dfrac{F l^3}{3 I_z E}$, ahol $I_z = \dfrac{b a^3}{12} = 4{,}5 \cdot 10^{-10}\ m^4$

Helyettesítő rugó merevsége:

$$F = k_r \cdot f \longrightarrow k_r = \frac{F}{f} = \frac{\cancel{F}}{\frac{\cancel{F}\ell^3}{3I_zE}} = \frac{3I_zE}{\ell^3} = 2160\,\frac{N}{m}$$

~ Egyenértékű modell (2. → 3.): 2. és 3. modell potenciális energiája ugyanaz → rugóerők eredője ugyanaz





1DoF modell, 1 általános koordináta

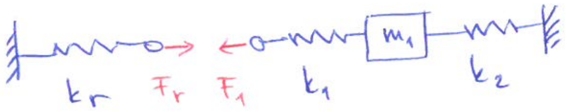
$$U_3 = \frac{1}{2} k_e x^2$$

$$\boxed{U_2 = U_3}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} k_r x_r^2 + \frac{1}{2} k_1 (x - x_r)^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2$$

A 2. esetben két koordinátánk van (x_r, x), de x_r kifejezhető x-szel:

SZTÁ:



$F_r = F_1$ (sorosan kapcsolt rugók)

$$k_r \cdot x_r = k_1 (x - x_r)$$

$$k_r x_r = k_1 x - k_1 x_r$$

$$(k_r + k_1) x_r = k_1 x \longrightarrow \boxed{x_r = \frac{k_1}{k_r + k_1} x}$$

Ezzel U_2:

$$U_2 = \frac{1}{2} k_r \frac{k_1^2}{(k_r + k_1)^2} x^2 + \frac{1}{2} k_1 \overbrace{\left(x - \frac{k_1}{(k_r + k_1)} x\right)^2}^{x^2\left(1 - \frac{k_1}{k_r + k_1}\right)^2} + \frac{1}{2} k_2 x^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(k_r \left(\frac{k_1}{k_1 + k_r}\right)^2 + k_1 \left(\frac{k_r}{k_1 + k_r}\right)^2 + k_2 \right)}_{k_e} x^2$$

$$\boxed{k_e = \frac{k_r k_1^2 + k_1 k_r^2}{(k_1 + k_r)^2} + k_2 = \frac{k_1 \cdot k_r (k_1 + k_r)}{(k_1 + k_r)^{\cancel{2}}} + k_2 = \frac{k_1 \cdot k_r}{k_1 + k_r} + k_2}$$

$$k_e = 145{,}578\,\frac{N}{m}$$

~ 1DoF rendszer mozgásegyenlete:

$$m_1\ddot{x} + k_e x = 0 \rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k_e}{m_1}}_{\omega_n^2} x = 0 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m_1}} = 5{,}39\ \frac{rad}{s}$$

Sajátfrekvencia: $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = 0{,}858\ \frac{1}{s} = 0{,}858\ Hz$

Periódusidő: $T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n} = 1{,}166\ s$

b) ütközés: ebből jön ki a kezdeti feltétel az m_1 lengéséhez.

~ ütközés előtt: $c_{1n} = 0$

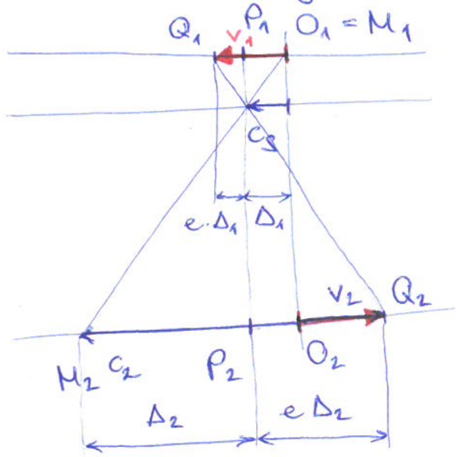
$c_{2n} = -0{,}6\ \frac{m}{s}$

Mindkét test szempontjából centrikus az ütközés!

Közös súlypont sebessége nem változik az ütközés során:

$$c_{sn} = v_{sn} = \frac{m_1 c_{1n} + m_2 c_{2n}}{m_1 + m_2} = -0{,}1\ \frac{m}{s}$$

Maxwell-diagram:



$$v_{1n} = c_{sn} + e\Delta_1 = c_{sn} + e(c_{sn} - c_{1n}) = -0{,}15\ \frac{m}{s}$$

$$v_{2n} = c_{sn} - e\Delta_2 = c_{sn} - e(c_{2n} - c_{sn}) = 0{,}15\ \frac{m}{s}$$

~ Kezdeti feltételek az ütközés utáni sebességekből (csak m_1 adata kell):

$t = 0$: $x(0) = x_0 = 0\ m$

$\dot{x}(0) = v_0 = v_{1n} = -0{,}15\ m/s$

Általános megoldás:

$$x(t) = C_1\cos(\omega_n t) + C_2\sin(\omega_n t)$$

$$\dot{x}(t) = -C_1\omega_n\sin(\omega_n t) + C_2\omega_n\cos(\omega_n t)$$

C_1, C_2 a kezdeti feltételekből jön!

$x(0) = 0 \longrightarrow \quad C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \longrightarrow C_1 = 0$

$\dot{x}(0) = v_0 \longrightarrow \quad -C_1 \omega_n \cdot 0 + C_2 \omega_n \cdot 1 = v_0 \longrightarrow C_2 = \dfrac{v_0}{\omega_n} = -0{,}0278\ m$

~ Mozgástörvény: $x(t) = -0{,}0278 \cdot \sin(5{,}39\,t)$ [m]

Sebesség: $v(t) = \dot{x}(t) = -0{,}15\ \cos(5{,}39\,t)$ [m/s]

Gyorsulás: $a(t) = \ddot{x}(t) = 0{,}809\ \sin(5{,}39\,t)$ [m/s^2]

~ Maximum értékek: sin és cos együtthatói, mert sin és cos -1 és 1 között vesz fel értéket

$x_{max} = |C_2| = 0{,}0278\ m$

$v_{max} = |C_2 \omega_n| = 0{,}15\ m/s$

$a_{max} = |C_2 \omega_n^2| = 0{,}809\ m/s^2$