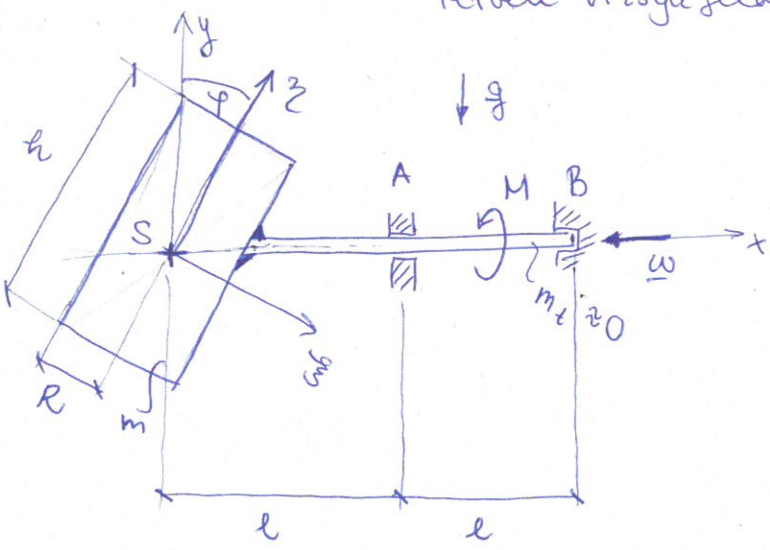
DINAMIKA – 14. gyakorlat

Térbeli vizsgafeladat



Adatok:

$m = 4\ kg$

$l = 0{,}25\ m$

$R = 0{,}1\ m$

$h = 0{,}3\ m$

$\omega = 10\ rad/s$

$M = 2\ Nm$

$\varphi = 30°$

$g = 9{,}81\ m/s^2$

~ tengely + hozzá mereven kapcsolódó henger

~ A, B csapágy: csak erők ébrednek

~ ω és M ismert

Kérdések:

1.) $\underline{\underline{\Pi}}_{S(\xi,\eta,\zeta)} = ?$ (S-ba hengeresítést csak, mert $m_t \approx 0$) $\boxed{7p}$

2.) SZTA? (henger + tengely) $\boxed{3p}$

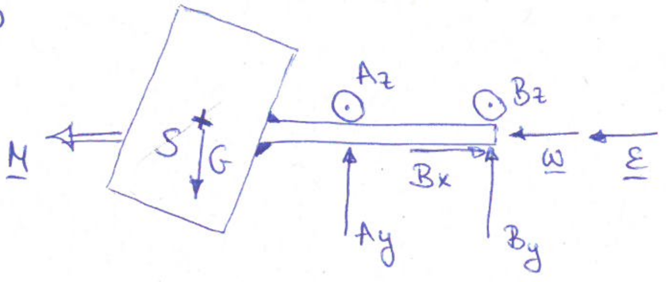
3.) din. alapt. vektorokbeli egyenletei (x, y, z)-ben? $\boxed{12p}$

4.) $\underline{\varepsilon} = ?$ $\underline{A} = ?$ $\underline{B} = ?$ $\boxed{3p}$

Megoldás:

$\underline{a}_S = 0$

2.)



Fontos!

~ $\underline{\varepsilon}$ irányát tudjuk, mert $\underline{M}$ gyorsítja, tehát olyan az iránya, mint $\underline{M}$-nek

~ $\underline{a}_S = 0$, mert S rajta van a forgástengelyen

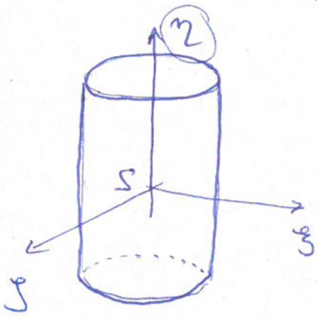
1.) $\underline{\Pi}_S = \underbrace{\underline{\underline{\Theta}}_S \cdot \underline{\omega}}$

~ csak AZONOS koord. rsz-ben felírt dolgokat szorozhatunk össze!!!

~ $\underline{\underline{\Theta}}_S$: (ξ, η, ζ) koord. rsz-ben "könnyű" felírni

~ $\underline{\omega}$-t is fel kell írni (ξ, η, ζ)-ban!

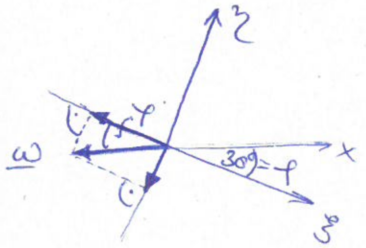
~ $m_t \approx 0 \rightarrow$ csak a hengernek van Θ-ja!



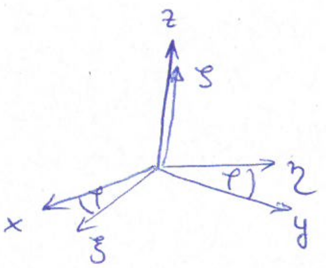
$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\underline{\Theta}}_S} = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_1 \end{bmatrix}$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2 = 0{,}04 \text{ kgm}^2$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} m R^2 = 0{,}02 \text{ kgm}^2$$



$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\omega}} = \begin{bmatrix} -\omega \cos\varphi \\ -\omega \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\Pi}_S} = \underline{\underline{\Theta}}_S \cdot \underline{\omega} = \begin{bmatrix} -\Theta_1 \omega \cos\varphi \\ -\Theta_2 \omega \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}346 \\ -0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{kgm}^2$$

3.) S: tartósan álló pont! (rajta van a forgástengelyen)

$$\left[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{\Pi}}_S\right]_S = \left[\underline{F}, \underline{M}_S\right]_S$$ (x,y,z)-ben írjuk fel!

$\boxed{\dot{\underline{I}} = \underline{F}}$

x: $0 = B_x$ (1)

y: $0 = A_y + B_y - mg$ (2)

z: $0 = A_z + B_z$ (3)

($\underline{a}_S = \underline{0}$, mert S rajta van a forgástengelyen)

$$\boxed{\underline{M}_S} = \underline{M} + \underline{r}_{SA} \times \underline{A} + \underline{r}_{AB} \times \underline{B} = \begin{bmatrix} -M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\ell \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M \\ -A_z \ell - B_z 2\ell \\ A_y \ell + B_y 2\ell \end{bmatrix}$$

$\boxed{\dot{\underline{\Pi}}_S} = \underline{\underline{\Theta}}_S \cdot \underline{\varepsilon} + \underline{\omega} \times \underline{\Pi}_S \longrightarrow$ $\underline{\underline{\Theta}}_S$ (ξ,η,ζ)-ban ✓

$\underline{\omega}$ (ξ,η,ζ)-ban ✓

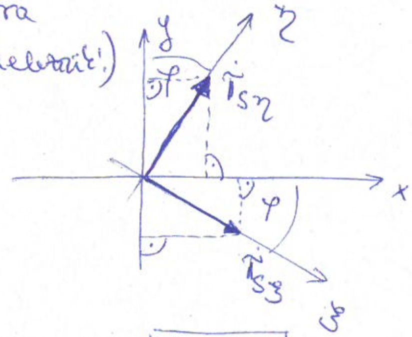
$\underline{\Pi}_S$ (ξ,η,ζ)-ban ✓

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\varepsilon\cos\varphi \\ -\varepsilon\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$ (ω-hoz hasonlóan, ugyanaz az irányuk)

Mostmár számolható $\dot{\underline{\Pi}}_S$:

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\dot{\underline{\Pi}}_S} = \begin{bmatrix} -\Theta_1\varepsilon\cos\varphi \\ -\Theta_2\varepsilon\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} + \begin{bmatrix} -\omega\cos\varphi \\ -\omega\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} \times \begin{bmatrix} -\Theta_1\omega\cos\varphi \\ -\Theta_2\omega\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\Theta_1\varepsilon\cos\varphi \\ -\Theta_2\varepsilon\sin\varphi \\ (\Theta_2-\Theta_1)\omega^2\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}_{(\xi,\eta,\zeta)} = \begin{bmatrix} \dot{\Pi}_{S\xi} \\ \dot{\Pi}_{S\eta} \\ \dot{\Pi}_{S\zeta} \end{bmatrix}$$ (pozitívra feltételezzük!)



$\dot{\underline{\Pi}}_S$-t transzformáljuk (ξ,η,ζ)-ből (x,y,z)-be: $\boxed{z=\zeta}$

$$\boxed{\underset{(x,y,z)}{\dot{\underline{\Pi}}_S}} = \begin{bmatrix} \dot{\Pi}_{S\xi}\cdot\cos\varphi + \dot{\Pi}_{S\eta}\cdot\sin\varphi \\ -\dot{\Pi}_{S\xi}\cdot\sin\varphi + \dot{\Pi}_{S\eta}\cdot\cos\varphi \\ (\Theta_2-\Theta_1)\omega^2\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}$$

z és ζ tengely megegyezik → ζ értékét nem kell transzformálni!

behelyettesítés

Tehát a vetületi egyenletek:

$$\boxed{\dot{\underline{\Pi}}_S = \underline{M}_S}$$

x: $-\Theta_1\varepsilon\cos^2\varphi - \Theta_2\varepsilon\sin^2\varphi = -M$ (4)

y: $(\Theta_1-\Theta_2)\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi = -A_z l - B_z 2l$ (5)

z: $(\Theta_2-\Theta_1)\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = A_y l + B_y 2l$ (6)

4.) ε (4) - ből.

$\oplus$-ként helyettesítjük be

$$\varepsilon = \frac{M}{\Theta_1 \cos^2\varphi + \Theta_2 \sin^2\varphi} = 57{,}14 \ \frac{rad}{s^2} \longrightarrow \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -57{,}14 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2}$$

$\ominus$ mert az irányt az SZTTÁ-nál figyelembe vettük!

(3) - ból: $B_z = -A_z$

$\rightarrow$ (5): $A_z = \dfrac{(\Theta_1 - \Theta_2)\,\varepsilon \sin\varphi \cos\varphi}{l} = 1{,}98 \ N$

$B_z = -1{,}98N$

(2) - ből: $B_y = -A_y + mg$

$\rightarrow$ (6): $A_y = 2mg - \dfrac{(\Theta_2 - \Theta_1)\,\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi}{l} = 81{,}94 \ N$

$B_y = -42{,}70N$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 81{,}94 \\ 1{,}98 \end{bmatrix} N \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -42{,}70 \\ -1{,}98 \end{bmatrix} N$$