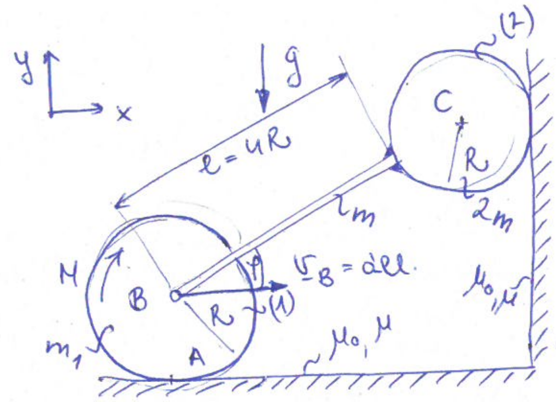
DINAMIKA - 11. gyakorlat

Síkbeli vizsgafeladat

Feladat: összpont: 35
idő: 60 perc

Függőleges síkban mozog. (1)-es test gördül. $\underline{v}_B$ = állandó, M időben változó. μ_0, μ: nyugvásbeli és csúszásbeli súrlódási együttható. B csukló ideális.



$m_1 = 6\,kg$ $\qquad \varphi = 30°$

$m = 3\,kg$ $\qquad \mu_0 = 1$

$R = 0{,}3\,m$ $\qquad \mu = 0{,}1$

$v_B = 0{,}3\,\frac{m}{s}$ $\qquad g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

---

1. Kérdés: (10pont) (1) és (2) gyorsulásállapota a súlypontjukhoz rendelt mennyiségekkel, (2) test seb. pólus, gyorsuláspólus!

Megoldás: (1)-es gyors. állapota: $\underline{a}_B, \underline{\omega}_1, \underline{\varepsilon}_1$

(2)-es gyors. á-a: $\underline{a}_{S2}, \underline{\omega}_2, \underline{\varepsilon}_2$ (S_2 pontot ki kell számolni!)

B pont rajta van (1) és (2) testeken!

Amit tudunk: $\underline{v}_A = \underline{0}$; $\underline{a}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{v}_B = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{a}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{mert } \underline{v}_B = \text{áll.})$$

$$\underline{v}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{a}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ a_C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_B = \text{áll.} \rightarrow \underline{\omega}_1 = \text{áll.} \rightarrow \underline{\varepsilon}_1 = \underline{0}$$

$$\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix}$$

A és B pont rajta van (1)-n:

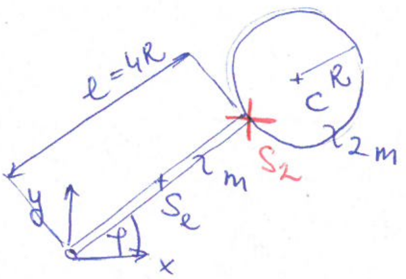
$$\underline{v}_B = \underbrace{\underline{v}_A}_{\underline{0}} + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_1 R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1 = -\frac{v_B}{R} = -1 \ \frac{rad}{s} \Longrightarrow \underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$

(1)-es test gyorsulásállapota (súlyponttal):

$$\boxed{\underline{a}_B = \underline{0} \ ; \ \underline{\varepsilon}_1 = \underline{0}; \ \underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}}$$

(2)-es test súlypontja: S_2



$$\underline{r}_{se} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cdot 2R \\ \sin\varphi \cdot 2R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{r}_c = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cdot 5R \\ \sin\varphi \cdot 5R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{r}_{S2} = \frac{m \cdot \underline{r}_{se} + 2m\, \underline{r}_c}{m + 2m}$$

x koord: $$r_{S2,x} = \frac{\cancel{m} \cdot 2R\cos\varphi + 2\cancel{m} \cdot 5R\cos\varphi}{3\cancel{m}} = \frac{12R\cos\varphi}{3} = 4R\cos\varphi$$

y koord: $$r_{S2,y} = 4R\sin\varphi$$

$$\underline{r}_{S2} = \begin{bmatrix} 4R\cos\varphi \\ 4R\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

B és C pont rajta van (2)-n:

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5R\cos\varphi \\ 5R\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_B - \omega_2 5R\sin\varphi \\ \omega_2 5R\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2 = \frac{v_B}{5R\sin\varphi} = 0{,}4 \ \frac{rad}{s}$$

$v_C = \omega_2 5R\cos\varphi$ (nem kell a feladathoz)

$$\underline{a}_C = \underbrace{\underline{a}_B}_{\underline{0}} + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{BC} - \omega_2^2 \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5R\cos\varphi \\ 5R\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_2^2 \begin{bmatrix} 5R\cos\varphi \\ 5R\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 5R\sin\varphi - \omega_2^2 5R\cos\varphi \\ \varepsilon_2 5R\cos\varphi - \omega_2^2 5R\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\varepsilon_2 5R\sin\varphi - \omega_2^2 5R\cos\varphi = 0 \longrightarrow \varepsilon_2 = -\frac{\omega_2^2\cos\varphi}{\sin\varphi} = -0{,}277 \, \frac{rad}{s^2}$$

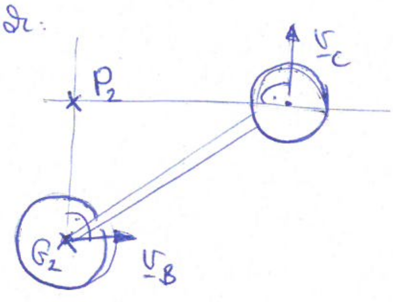
(a_c-t is ki lehetne számolni)

$$\underline{a}_{S2} = \underbrace{\underline{a}_B}_{\underline{0}} + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{BS2} - \omega_2^2 \underline{r}_{BS2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4R\cos\varphi \\ 4R\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_2^2 \begin{bmatrix} 4R\cos\varphi \\ 4R\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}384 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{\underline{a}_{S2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}384 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2} \qquad \underline{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}277 \end{bmatrix} \frac{rad}{s^2} \qquad \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}4 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}}$$

(2)-es test gyorsulásállapota

Pólusok:

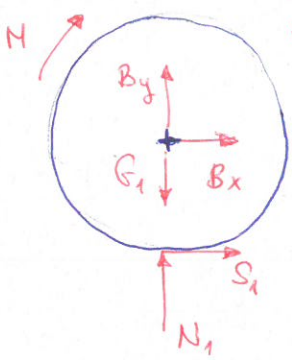


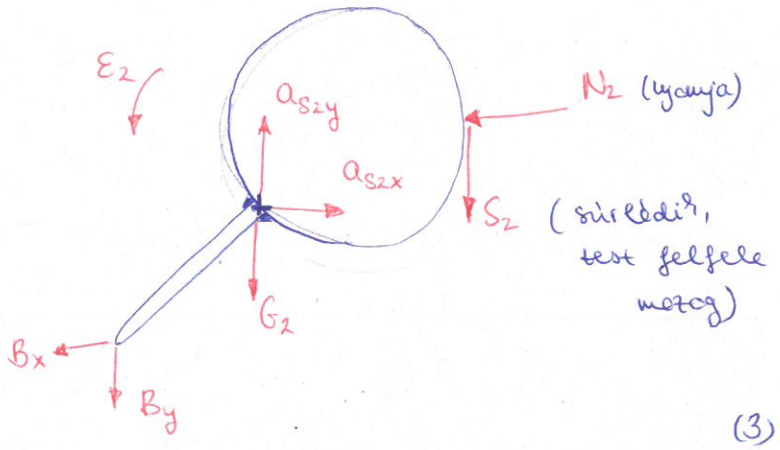
$\underline{v}_B = \text{áll.} \rightarrow \underline{a}_B = \underline{0} \rightarrow B = G_2$

2.) Kérdés: (10pont) (1) és (2) SZTÁ, din. alaptétele paraméteresen

Megoldás: SZTÁ-k:

$\underline{a}_B = \underline{0}$
$\underline{\varepsilon}_1 = \underline{0}$





$[\dot{I};\dot{\Pi}_B]_B = [F; M_B]_B$		$[\dot{I};\dot{\Pi}_{S2}]_{S2} = [F; M_{S2}]_{S2}$
$0 = S_1 + B_x$ (1)	x	$\underbrace{3m\, a_{S2x}}_{0} = -B_x - N_2$ (4)
$0 = N_1 - G_1 + B_y$ (2)	y	$3m\, a_{S2y} = -B_y - G_2 - S_2$ (5) ($G_2 = 3mg$)
$0 = -M + S_1 R$ (3)	z	$\Theta_{S2}\,\varepsilon_2 = -B_x \cdot l\sin\varphi + B_y l\cos\varphi - S_2(R+R\cos\varphi) + N_2 R\sin\varphi$ (6)

3. Kérdés: (7pont) $M = ?$, Igazolja, hogy (1) gördül!

<u>Megoldás:</u>

Ismeretlenek: $S_1, N_1, S_2, N_2, B_x, B_y, M$ (kinematika kész ✓)

7 db ismeretlen, de csak 6 egyenlet!

DE! Tudjuk, hogy (2) test csúszik a függőleges falon:

$|S_2| = \mu \cdot |N_2|$ (7) → így már van 7 egyenlet.

Kell Θ_{S2}: $l = 4R$

$$\Theta_{S2} = \underbrace{\underset{\text{saját sp.}}{\frac{1}{12} m l^2} + \underset{\text{Steiner}}{m\left(\frac{l}{2}\right)^2}}_{\text{rúd}} + \underbrace{\underset{\text{saját sp.}}{\frac{1}{2} 2mR^2} + \underset{\text{Steiner}}{2mR^2}}_{\text{kerék}} = \frac{25}{3} mR^2 = 2{,}25\ [kgm^2]$$

Egyenletek megoldása:

(4) $B_x = -N_2$

(5) $B_y = -\mu N_2 - 3m\, a_{S2y} - 3mg$

(6) $\Theta_{S2} \cdot \varepsilon_2 = N_2 l\sin\varphi - (\mu N_2 + 3mg + 3m\, a_{S2y})\, l\cos\varphi + N_2 R\sin\varphi - \mu N_2 (R + R\cos\varphi)$

$$N_2 = \frac{\Theta_{S2}\,\varepsilon_2 + 3m(g + a_{S2y})\, l\cos\varphi}{(l+R)\sin\varphi - \mu R - \mu(l+R)\cos\varphi} = \underline{\underline{148{,}35\ N}}$$

$B_x = \underline{\underline{-148{,}35\ N}}$ $\qquad B_y = \underline{\underline{-99{,}67\ N}}$

(1) $S_1 = -B_x = \underline{\underline{148{,}35 N}}$

$\frac{|S_1|}{|N_1|} = 0{,}94 < \mu_0 \Rightarrow$ gördül

(2) $N_1 = m_1 g - B_y = \underline{\underline{158{,}53 N}}$

(3) $M = S_1 R = \underline{\underline{44{,}5\ Nm}}$

4. Kérdés: (8 pont)

A (2) jelű test és fal közötti súrlódást elhanyagoljuk. Mennyi mechanikai munkát végez M, amíg a (2) jelű test függőleges helyzetbe ér?

Megoldás:

$T_2 - T_1 = W_{12}$ $\quad$ T_2: függőleges helyzet (t_2)

T_1: kezdeti helyzet

a, $T_1 = \frac{1}{2}\Theta_A \omega_1^2 + \frac{1}{2} 3m v_{S2}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{S2}\omega_2^2$

b, $T_2 = \frac{1}{2}\Theta_A \omega_1^2(t_2) + \frac{1}{2} 3m v_{S2}^2(t_2) + \frac{1}{2}\Theta_{S2}\omega_2^2(t_2)$

a, számolása:

$$\Theta_A = \frac{3}{2} m_1 R^2 = \underset{kgm^2}{0{,}81} \quad \Big(\frac{1}{2} m_1 R^2 + \underset{\text{steiner}}{m_1 R^2}\Big)$$

$$\underline{v}_{S2} = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BS2} = \begin{bmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l\cos\varphi \\ l\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_B - l\omega_2\sin\varphi \\ l\omega_2\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}06 \\ 0{,}416 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$$

$$v_{S2}^2 = 0{,}06^2 + 0{,}416^2 = 0{,}1767 \frac{m^2}{s^2}$$

$T_1 = 1{,}3788\ J$

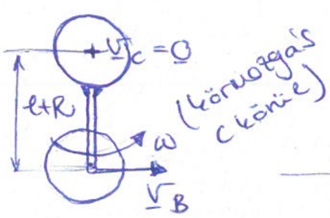
b, számolása:

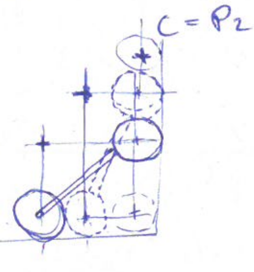
M állandó v_B-t, tehát állandó ω_1-t biztosít.

$\omega_1(t_2) = \omega_1(t_1) = \omega_1$

Függőleges helyzetben: $C = P_2$

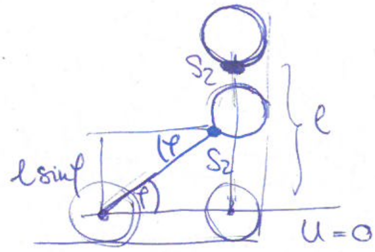
$$\omega_2(t_2) = \frac{v_B}{l+R} = 0{,}2 \frac{rad}{s}$$





$v_{S2}(t) = R\,\omega_2(t_2) = 0{,}06\ \frac{m}{s}$

$T_2 = 0{,}4662\ J$



$$\boxed{T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + W_{12}^M}$$

$T_2 + U_2 = T_1 + U_1 + W_{12}^M$

(Az 1-es állapothoz hozzáadjuk az M nyomaték munkáját, így jutunk el a (2)-es állapotba.)

$U_1 = 3mg\ell\sin\varphi$

$U_2 = 3mg\ell$

$U_1 - U_2 = 3mg\ell\sin\varphi - 3mg\ell$

$W_{12}^M = T_2 - T_1 + 3mg(\ell - \ell\sin\varphi) = \underline{\underline{52{,}06\ J}}$