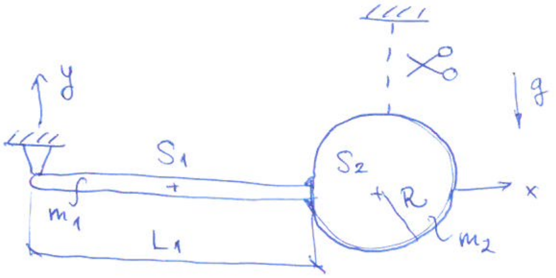
DINAMIKA - 10. gyakorlat

1.)



Adatok:

$m_1 = 4\,kg$

$m_2 = 3\,kg$

$l = 0{,}8\,m$

$R = 0{,}3\,m$

Kérdés:

a, reakcióerő az átvágás pillanatában

b, sebességállapot a függőleges állapotban

Megoldás:

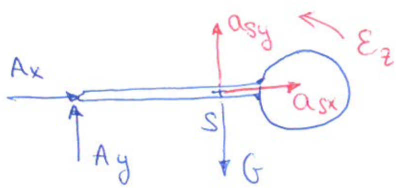
a, Reakcióerő az elvágás pillanatában:

~ Közös súlypont meghatározása

$$\underline{r}_S = \frac{m_1 \underline{r}_{S1} + m_2 \cdot \underline{r}_{S2}}{m_1 + m_2} \quad ; \text{ ahol } \quad \underline{r}_{S1} = \begin{array}{c} r_{S1x} \\ \begin{bmatrix} L_1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underline{r}_{S2} = \begin{array}{c} r_{S2x} \\ \begin{bmatrix} L_1 + R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underline{r}_S = \begin{bmatrix} \dfrac{m_1 \frac{L_1}{2} + m_2 (L_1 + R)}{m_1 + m_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m = \begin{bmatrix} r_{Sx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

~ SZTÁ az elvágás pillanatában: (gyorsulást, ε-t nem tudjuk, pozitívra feltételezzük)



Dinamika alaptétele (súlypontra):

$$\dot{\underline{I}} = \underline{F}$$

$$x: \quad (m_1 + m_2)\, a_{Sx} = A_x \qquad (1)$$

$$y: \quad (m_1 + m_2)\, a_{Sy} = A_y - G \qquad (2)$$

$$z: \quad 0 = 0$$

$$\dot{\underline{D}}_A = \underline{M}_A \quad ; \quad \dot{\underline{D}}_A = \underline{\Pi}_A \quad \text{(mivel A tartósan álló pont)}$$

$$z: \quad \Theta_{Az}\, \varepsilon_z = -r_{Sx} \underbrace{(m_1 + m_2)\, g}_{G} \qquad (3)$$

~ 5 ismeretlen, de csak 3 egyenlet. → kinematika!

$$\underline{a}_S = \underbrace{\underline{a}_A}_{0} + \underbrace{\underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AS}}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{Sx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} - \underbrace{\omega^2}_{=0, \text{ mert még nem indult el}} \cdot \underline{r}_{AS} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_{Sx} \cdot \varepsilon_z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Sx} \\ a_{Sy} \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow (+2) \text{ egyenlet:}$$

$$a_{Sx} = 0 \qquad (4)$$

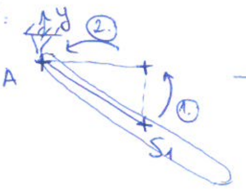
$$a_{Sy} = r_{Sx}\, \varepsilon_z \qquad (5)$$

~ Tehetetlenségi nyomaték (Θ_{Az}) számítása:

(rúd és tárcsa saját súlypontra, utána Steinerrel A pontba)

$$\Theta_{Az} = \underbrace{\frac{1}{12} m_1 L_1^2 + m_1 \left(\frac{L_1}{2}\right)^2}_{\text{rúd}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (L_1+R)^2}_{\text{tárcsa}} = 4,618\ kgm^2$$

Megj.:



① Steiner y irányban

② Steiner x irányban

~ Egyenletrendszer megoldása:

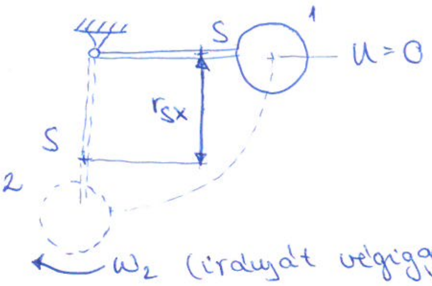
(1) és (4): $A_x = 0$

(3): $\varepsilon_z = -\dfrac{r_{Sx}(m_1+m_2)g}{\Theta_{Az}} = -10,41\ \dfrac{1}{s^2}$

(2) és (5): $A_y = (m_1+m_2)(r_{Sx}\varepsilon_z + g) = 17,67\ N$

$a_{Sy} = -7,287\ \dfrac{m}{s^2}$

b) Sebességállapot függőleges helyzetben



(irányát végiggondolni)

Munkatétel:

$T_2 - T_1 = W_{12} = U_1 - U_2$

$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$ $\quad U_1 = 0$ (választunk nullszintet)

$T_1 = 0$ (most indul, még nincs sebessége, csak gyorsulása)

Nemzérus fv-ek: $T_2 = \frac{1}{2}\Theta_{Az}\omega_2^2$ (álló pontra)

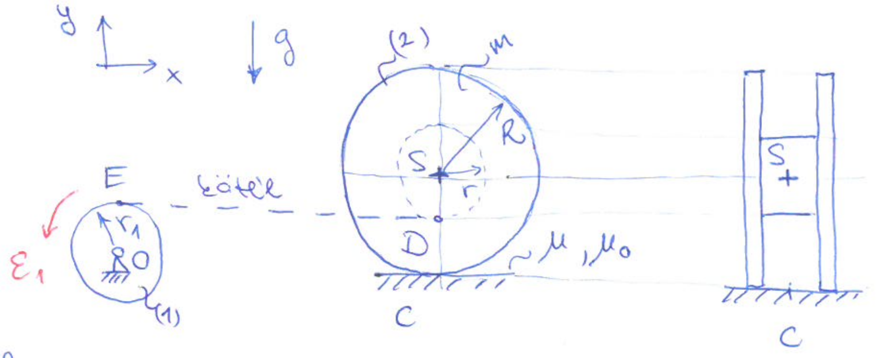
$U_2 = -mgr_{Sx}$ (közös súlypontot nézzük!)

$\Longrightarrow$ $T_2 + U_2 = 0$ $\quad \frac{1}{2}\Theta_{Az}\omega_2^2 - mgr_{Sx} = 0$, $\quad m = m_1 + m_2$

$$|\omega_2| = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)g r_{Sx}}{\frac{1}{2}\Theta_{Az}}} = \underbrace{4,563\ \frac{rad}{s}}_{\text{z tengely körül forgat ⊖ irányban}} \longrightarrow \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\omega_2| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4,563 \end{bmatrix} \frac{rad}{s}$$

Sebességállapot: $\left.\begin{array}{l} \underline{v}_A = \underline{0} \\ \underline{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4,563 \end{bmatrix} \end{array}\right\}$ egy pont seb., $\underline{\omega}$ ✓

(2.)



Még NEM indult el!
$\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$!

Kérdés:
1.) K
2.) C

Adatok:

$R = 450$ mm
$r = 150$ mm
$r_1 = 250$ mm

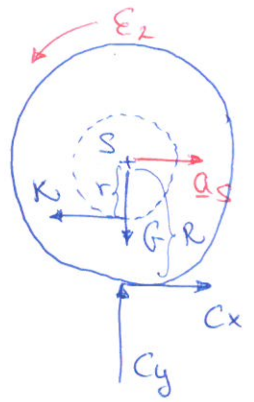
$\varepsilon_1 = 3 \frac{rad}{s}$ = áll.
$m = 70$ kg

$\Theta_S = 4{,}375$ kgm^2
$\mu_0 = 0{,}25$ [1] (tapadási)
$\mu = 0{,}2$ [1] (csúszási)

Fontos!
Nem tudjuk, hogy gördül vagy csúszik!

Megoldás: Nyugalomból indul!

1.) SZTÁ



kötél: csak húzni tud, tolni nem

C_x, C_y: ismeretlenek → (+)-ra feltételeztük

Dinamika alaptétele:

$$\left[\dot{\underline{I}}, \dot{\underline{D}}_S\right]_S = \left[\underline{F}, \underline{M}_S\right]_S$$

(1) x: $m a_S = C_x - K$

(2) y: $0 = C_y - mg$

(3) z: $\Theta_S \cdot \varepsilon_2 = -K \cdot r + C_x \cdot R$

} 5 ismeretlen, 3 egyenlet

Két megoldási irány létezik:

a) Feltesszük, hogy gördül ($\underline{v}_C = \underline{0}$ és $\underline{a}_C \parallel \underline{e}_y$). Végigszámoljuk, hogy $|C_x| < C_y \cdot \mu_0$ teljesül-e.

b) Feltesszük, hogy csúszik ($\underline{v}_C \neq \underline{0}$ és $\underline{a}_C \nparallel \underline{e}_y$). Ilyenkor $|C_x| = C_y \cdot \mu$. Végül ellenőrizzük a gyorsulást.

Most feltételezzük a) esetet!

$$\underline{a}_C = \underline{a}_S + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{SC} - \underbrace{\omega_2^2}_{\text{0, mert még nem indult el}} \underline{r}_{SC}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_S + \varepsilon_2 \cdot R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} a_S = -\varepsilon_2 R \quad (4) \\ a_c = 0 \end{matrix}$$

Így van egy 4. egyenlet, de még mindig kell 1.

D pont gyorsulása ismert a kötél miatt! $\boxed{a_{Ex} = a_{Dx}}$

Kötélirányú gyorsulások megegyeznek!

(1)-es testen:

$$\underline{a}_D = \underline{a}_E = \underbrace{\underline{a}_O}_{\underline{0}} + \underline{\varepsilon}_1 \times \underline{r}_{OE} - \underbrace{\omega_1^2}_{0,\text{ még nem indult el}} \underline{r}_{OE} = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 r_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)-es testen:

$$\underline{a}_D = \underline{a}_S + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{SD} - \underbrace{\omega_2^2 \underline{r}_{SD}}_{0} = \begin{bmatrix} a_S + \varepsilon_2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{a}_D = \underline{a}_D \rightarrow \quad -\varepsilon_1 r_1 = a_S + \varepsilon_2 r \rightarrow \quad a_S = -\varepsilon_2 r - \varepsilon_1 r_1 \qquad (5)$

Van elég egyenletünk! Oldjuk meg őket!

(4) és (5) $\rightarrow$

$$-\varepsilon_2 R = -\varepsilon_2 r - \varepsilon_1 r_1 \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1 r_1}{R-r} = 2{,}5\ \frac{\text{rad}}{s^2} \qquad (6)$$

(1)-be behelyettesítjük (4)-et és (6)-ot.

$$m a_S = -m \varepsilon_2 R = -m \frac{\varepsilon_1 r_1}{R-r} \cdot R = -K + C_x \qquad (*)$$

(3)-ba (6)-ot:

$$\Theta_S \cdot \frac{\varepsilon_1 r_1}{R-r} = -Kr + C_x R \qquad (**)$$

$$-R(*) + (**) \rightarrow (mR^2 + \Theta_S)\frac{r_1}{R-r}\varepsilon_1 = K(R-r) \rightarrow K = 154{,}5833\ N$$

2.) (*)-ból C_x számolható. $C_x = 75{,}8333\,N$

(2)-ből C_y: $C_y = mg = 686{,}7\,N$

$\frac{C_x}{C_y} = 0{,}11 < \mu_0 \rightarrow$ tényleg gördül! (Mindig ellenőrizni kell a gördülést!)

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} -154{,}583 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} N \qquad \underline{C} = \begin{bmatrix} 75{,}83 \\ 686{,}7 \\ 0 \end{bmatrix} N$$

Most legyen $\varepsilon_1 = 10\ \frac{rad}{s^2}$.

Feltesszük, hogy gördül.

A következő eredményeket kapjuk:

$\varepsilon_2 = 8{,}33\ \frac{rad}{s^2}$ $\qquad K = 515{,}3N$

$a_S = 3{,}75\ \frac{m}{s}$ $\qquad C_x = 252{,}8N$ $\qquad \frac{C_x}{C_y} = 0{,}366 > \mu_0 \rightarrow$ csúszik!

$C_y = 86{,}7N$

Ha csúszik: $a_S \neq -R\varepsilon_2$, de $C_x = \mu \cdot C_y$!

Szükséges egyenletek:

$$\left.\begin{aligned} m a_S &= -K + C_x \\ 0 &= -mg + C_y \\ \Theta_S \varepsilon_2 &= -Kr + C_x R \\ C_x &= \mu C_y \\ a_S &= a_{Dx} + r\varepsilon_2 \end{aligned}\right\}$$

5 egyenlet, 5 ismeretlen!

$C_y = 686{,}7N$

$C_x = 137{,}34N$

$\varepsilon_2 = 2{,}51\ \frac{rad}{s^2}$

$K = 338{,}7N$

Elméleti összefoglaló:

Dinamika alaptétele: $\left[\dot{\underline{I}},\ \underline{D}_\square\right]_\square = \left[\underline{F},\ \underline{M}_\square\right]_\square$ $\qquad \square$: S, súlypont; $\square$: A, tartósan álló pont

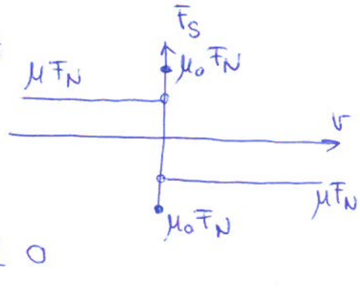
$\underline{D}_\square = \dot{\underline{\Pi}}_\square$ (kinetikai nyomaték)

$$\underline{D}_{S,A} = \underline{\underline{\Theta}}_{S,A} \cdot \underline{\varepsilon} + \underbrace{\underline{\omega} \times (\underbrace{\underline{\underline{\Theta}}_{S,A}\ \underline{\omega}}_{\underline{\Pi}_S})}_{\text{síkban } 0} \longrightarrow \Theta_{Sz} \cdot \varepsilon_z = D_S$$

Gördülés feltétele:

Kinematikai: $\underline{v}_K = \underline{0}$, ahol K a kontaktpont

Kinetikai: $\frac{|F_S|}{|N|} \leq \mu_0$



Csúszás esetén: $\underline{v}_K \neq \underline{0}$, $|F_S| = \mu |N|$, $\underline{F}_S \cdot \underline{v}_K < 0$