DINAMIKA – 8. gyakorlat

Relatív dinamika

Elmélet: Anyagi pont dinamikája

$\boxed{\dot{\underline{I}} = \underline{F}}$ (Dinamika alaptétele Newton II. törvénye)

$\xrightarrow{\underline{r}_A \times}$ $\dot{\underline{\Pi}}_A = \underline{M}_A$

$\xrightarrow{\underline{v} \cdot}$ $\dot{T} = P$ (teljesítménytétel)

$P = \underline{F} \cdot \underline{v}$

$\xrightarrow{\int \dots dt}$

impulzustétel: $\underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\, dt$

perdülettétel: $\underline{\Pi}_{A1} - \underline{\Pi}_{A0} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{M}_A\, dt$

munkatétel: $T_1 - T_0 = \int_{t_0}^{t_1} P \cdot dt = W_{01}$

(potenciálos erők: $\underline{F} = -\operatorname{grad} U$

$W_{01} = U_0 - U_1$)

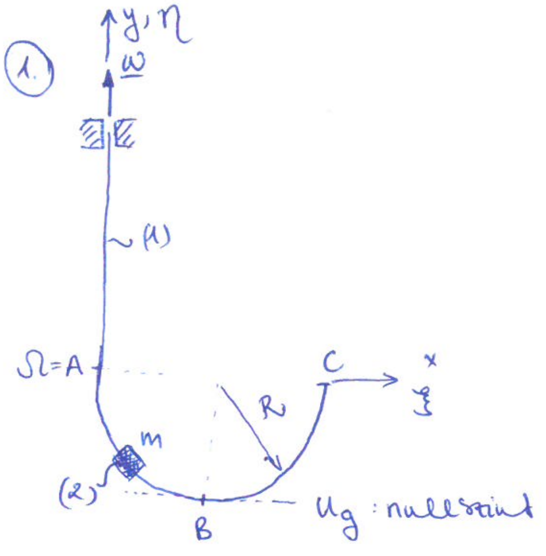
Relatív dinamika: $\dot{\underline{I}}_{rel} = \underline{F}_{rel} = m \cdot \underline{a}_{rel} = m \cdot \underline{\ddot{\rho}}$

$\underline{F}_{rel} = \underline{F} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor}$

$\underline{F} = \underline{K} + \underline{G}$ (kényszer + gravitáció)

$\underline{F}_{száll} = -m \cdot \underline{a}_{száll}$

$\underline{F}_{cor} = -m \cdot \underline{a}_{cor}$



Forgó rámpa, rajta csúszik le az m tömegű test. "A" pontból indul (itt $v=0$ t_0-nál)

<u>Adatok:</u>
$\mu = 0$
$m = 0{,}2$ kg
$R = 0{,}1$ m
$\omega = 6{,}14$ rad/s $= \omega_{10}$ = áll.

<u>Kérdések:</u>

1.) Mekkora a csúszdára ható kényszererő a B pontban?

2.) $v_C = ?$ (m sebessége a C pontban)

Megoldás:

1.) m tömegű test éppen a B pontban van

Dinamika alaptétele relatívan:

$$\dot{\underline{I}}_{rel} = m\cdot\underline{a} = \underline{F}_{rel} = \underline{F} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor} \quad , \quad \underline{F} = \underline{K} + \underline{G}$$

$$\hookrightarrow \underline{K} = \underline{K}_b + \underline{K}_n + \underbrace{\underline{K}_t}_{\underline{0}}$$

erre van elmozdulás, kényszer tehát nincs

Szállító erő:

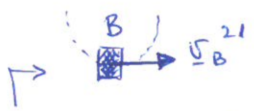
$$\underline{F}_{száll} = -m\cdot\underline{a}_{száll} = -m\cdot\underbrace{\underline{a}_B^{10}}$$

B pont sebessége az 1-es testen

$$\underline{a}_B^{10} = \underbrace{\underline{a}_A^{10}}_{\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_{10}}_{\underline{0}}\times\underline{r}_{AB} + \underbrace{\underline{\omega}_{10}}_{\begin{bmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{bmatrix}}\times(\underline{\omega}_{10}\times\underbrace{\underline{r}_{AB}}_{\begin{bmatrix}R\\ -R\\ 0\end{bmatrix}}) = \begin{bmatrix}-R\omega^2\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \longrightarrow \underline{F}_{száll} = -m\cdot\begin{bmatrix}-R\omega^2\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}mR\omega^2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Coriolis erő:

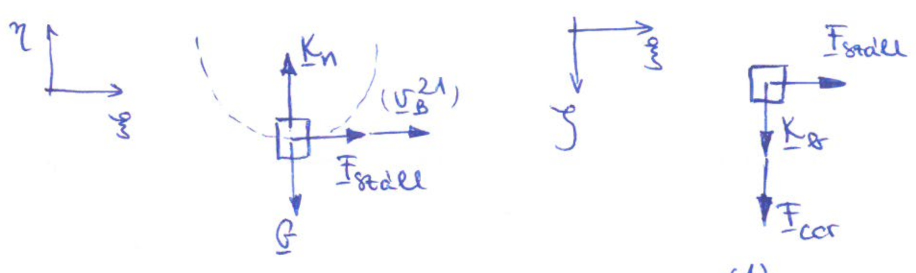
$$\underline{F}_{cor} = -m\,\underline{a}_{cor} = -m\cdot\underline{a}_B^{cor}$$



$$\underline{a}_B^{cor} = 2\,\underline{\omega}_{10}\times\underline{\beta} = 2\cdot\underline{\omega}_{10}\times\underline{v}_B^{21} = 2\begin{bmatrix}0\\ \omega\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\beta\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -2\beta\omega\end{bmatrix} \longrightarrow \underline{F}_{cor} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 2m\beta\omega\end{bmatrix}$$

β: B pontnál m tömegű test sebessége a rámpához képest (ez mindig tangenciális)

SZTA:



$\boxed{M}$: ξ: tangenciális
η: normális
ζ: binormális irány

SZTA'-ra egyenletek:

ismeretlenek: 5 db

$\dot{\underline{I}}_{rel} = \underline{F}_{rel} \longrightarrow$ tangenciális ξ: $m \cdot \alpha_t = m \cdot R \cdot \omega^2$ (1)

normális η: $m \cdot \alpha_n = K_n - mg$ (2)

binormális ζ: $0 = K_\zeta + 2m\omega\beta$ (3)

Vektorosan:

$$m \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_t \\ \alpha_n \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\alpha}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ K_n \\ K_\zeta \end{bmatrix}}_{\underline{K}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{G}} + \underbrace{\begin{bmatrix} mR\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{F}_{száll}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2m\omega\beta \end{bmatrix}}_{\underline{F}_{cor}}$$

5 ismeretlen, de csak 3 egyenlet → ⊕2 kinematikából!

$$\alpha_n = \frac{\beta^2}{R} \qquad (4)$$

Utolsó: relatív munkatétel → t_0-nál A pont

t_1-nél B pont

$$T_{1rel} - T_{0rel} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}_{rel} \cdot \underline{\beta}\, dt$$

$$\frac{1}{2} m \beta_B^2 - \underbrace{\frac{1}{2} m \beta_A^2}_{0} = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\underline{F} \cdot \underline{\beta}}_{\text{I.}} + \underbrace{\underline{F}_{száll} \cdot \underline{\beta}}_{\text{II.}} + \underbrace{\underline{F}_{cor} \cdot \underline{\beta}}_{\text{III.}}\, dt$$

Jobb oldal: (tagonként integráljuk)

I. $\underline{F} \cdot \underline{\beta} = (\underline{K} + \underline{G}) \cdot \underline{\beta} = \underbrace{\underline{K} \cdot \underline{\beta}}_{0} + \underline{G}\,\underline{\beta} = \underline{G} \cdot \underline{\beta}$

0, mert $\underline{K} \perp \underline{\beta}$ (SZTA')

$$\int_{t_0}^{t_1} \underline{G} \cdot \underline{\beta}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \begin{bmatrix} \underbrace{-\frac{dU_g}{d\xi}}_{=0} \\ -\frac{dU_g}{d\eta} \\ \underbrace{-\frac{dU_g}{\zeta}}_{=0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{d\xi}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} dt = \int_{\cancel{t_0}\, r_A}^{\cancel{t_1}\, r_B} - \frac{dU_g}{\cancel{d\eta}} \cdot \frac{\cancel{d\eta}}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = - \int_{r_A}^{r_B} dU_g =$$

$$= U_g(r_A) - U_g(r_B) = mgR - 0 = mgR$$

II. Szállítóerő munkája:

Szállítóerő is potenciálos, potenciálfüggvénye: $U_{sz} = -\frac{1}{2} m \xi^2 \omega^2$

$$-\nabla U_{sz} = -\operatorname{grad} U_{sz} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial U_{sz}}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial U_{sz}}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial U_{sz}}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \xi \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \underline{F}_{száll} \cdot \beta = \underbrace{U_{sz}(r_A)}_{\substack{0 \\ (\xi = 0)}} - U_{sz}(r_B) = +\frac{1}{2} m \omega^2 R^2$$

III. Coriolis erő munkája:

$$\underline{F}_C \cdot \beta = 0 \quad , \text{ mert } \quad \underline{F}_C = -m a_{cor} = -m\, 2 \underline{\omega}_{10} \times \beta$$

$$\underline{F}_C \perp \beta$$

Ezzel a munkatétel relatívra:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m \beta_B^2 - \frac{1}{2} m \beta_A^2}_{\substack{0 \\ \text{A-ból indul}}} = mgR + \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 \qquad (5)$$

Ismeretlenek számolása:

$$(1) \rightarrow \quad \alpha_t = R\omega^2 = 3{,}77 \ \frac{m}{s^2}$$

$$(5)+(2)+(4) \longrightarrow \quad K_n = m(\alpha_n + g) = m\left(\frac{\beta_B^2}{R} + g\right) = m\left(\frac{2gR + \omega^2 R^2}{R} + g\right) = m(3g + \omega^2 R) = 6{,}64\,N$$

$$(3) \rightarrow \quad K_{\varphi} = 2 m \omega \beta_B = 2 m \omega \sqrt{2gR + \omega^2 R^2} = 3{,}76\,N$$

Kényszererő B-nél:

$$\underline{K}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6{,}64 \\ 3{,}76 \end{bmatrix} N \quad , \ |\underline{K}_B| = \sqrt{K_n^2 + K_{\varphi}^2} = 7{,}63\,N$$

2.) Relatív munkatétel A és C pont között:

$$T_{1rel}-T_{0rel}=\int_{t_0}^{t_1}\underline{F}_{rel}\,\beta_c\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\underbrace{\underline{F}\cdot\beta_c}_{I.}+\underbrace{\underline{F}_{száll}\,\beta_c}_{II.}+\underbrace{\underline{F}_{cor}\,\beta_c}_{III.}\,dt$$

I. $\underline{F}\cdot\beta_c=(\underline{K}+\underline{G})\cdot\beta_c=\underline{G}\cdot\beta_c\longrightarrow\int_{t_0}^{t_1}\underline{G}\,\beta_c\,dt=u_g(r_A)-u_g(r_C)=0$

$\underline{K}\perp\beta_c$

(ugyanolyan magas)

II. $\int_{t_0}^{t_1}\underline{F}_{sz}\cdot\beta_c\,dt=\underbrace{u_{sz}(r_A)}_{0}-u_{sz}(r_C)=\frac{1}{2}m\omega^2(2R)^2=2m\omega^2R^2$

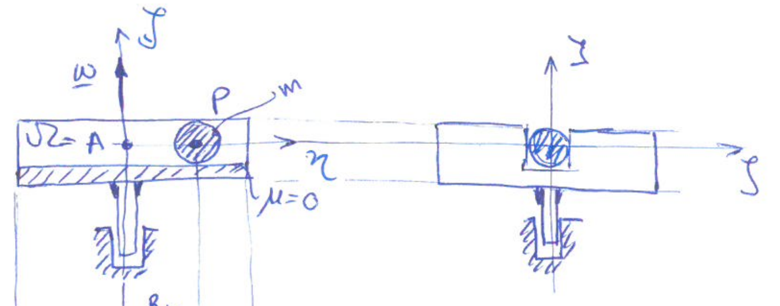
III. $\int_{t_0}^{t_1}\underline{F}_{cor}\,\beta_c\,dt=0$ $\quad(\underline{F}_{cor}\perp\beta_c)$

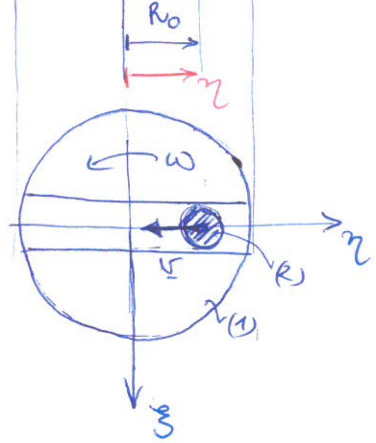
Tehát: $\frac{1}{2}\cancel{m}\,\beta_C^2-\underbrace{\frac{1}{2}m\,\beta_A^2}_{0}=2\cancel{m}\omega^2R^2\longrightarrow\beta_C=2R\omega=1{,}228\ \frac{m}{s}$

$$\underline{v}_C=\beta_C+\underline{v}_{C,száll}=\begin{bmatrix}0\\2R\omega\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\-2R\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2R\omega\\-2R\omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1{,}228\\-1{,}228\end{bmatrix}\frac{m}{s}\qquad v_C=1{,}737\frac{m}{s}$$

$$\underline{v}_C^{10}=\underbrace{\underline{v}_A^{10}}_{\underline{0}}+\underline{\omega}_{10}\times\underline{r}_{AC}=\begin{bmatrix}0\\\omega\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2R\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-2R\omega\end{bmatrix}$$

(2.)





m tömegű anyagi pontot kötéllel húzzák A pont felé. Állandó sebességgel.

Adatok:
$\omega = 0{,}3\ \frac{rad}{s} = \text{áll.}$

$v = 2\ \frac{m}{s} = \text{áll.}$

$m = 50\ kg$

$R_0 = 5\ m$

$R_1 = 2\ m$

Kérdés: 1.) R_0-nál kötélerő? Vezetősínben kényszererő?

2.) Kötélerő munkája R_0 és R_1 helyzetek között?

Megoldás:

1.) Dinamika alaptétele egy általános helyzetben: $\longmapsto \eta$

$$m\underline{a}_{rel} = \underline{F}_{rel} = \underline{F} + \underline{F}_{száll} + \underline{F}_{cor} \quad ; \quad \underline{F} = \underline{K} + \underline{G} + \underline{F}_k$$

↳ kötélerő is van itt!

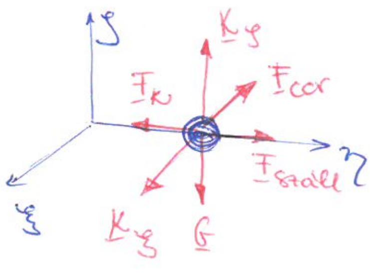
Gyorsulások (és erők:)

$$\underline{a}_{száll} = \underbrace{\underline{a}_A}_{\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AP}}_{\underline{0}} - \omega^2 \underbrace{\underline{r}_{AP}}_{\begin{bmatrix}0\\ \eta\\ 0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0\\ -\omega^2\eta\\ 0\end{bmatrix} \longrightarrow \underline{F}_{száll} = -m\begin{bmatrix}0\\ -\omega^2\eta\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ m\omega^2\eta\\ 0\end{bmatrix}$$

$\underline{a}_{rel} = \underline{\alpha} = \underline{0}$, mert állandó sebességgel húzzák a tárcsához képest.

$$\underline{a}_{cor} = 2\,\underline{\omega}_{10} \times \underline{\beta} = 2 \cdot \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0\\ -v\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\omega v\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \longrightarrow \underline{F}_{cor} = \begin{bmatrix}-m2\omega v\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

SZTÁ:



$$\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}K_\xi\\ 0\\ K_\zeta\end{bmatrix}}_{\underline{K}} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -mg\end{bmatrix}}_{\underline{G}} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ -F_k\\ 0\end{bmatrix}}_{\underline{F}_K} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ m\omega^2\eta\\ 0\end{bmatrix}}_{\underline{F}_{száll}} + \underbrace{\begin{bmatrix}-2m\omega v\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{\underline{F}_{cor}}$$

(S)

3 egyenlet, 3 ismeretlen: ($\eta = R_0$ helyen nézzük)

$$K_\xi = 2m\omega v = 60N$$

$$F_k = m\omega^2 R_0 = 22{,}5N$$

$$K_y = mg = 490{,}5N$$

2.) A kötélerő munkája:

$$\underline{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -m\omega^2\eta \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad v = \frac{d\eta}{dt} \longrightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\eta}{dt} \\ 0 \end{bmatrix}$$

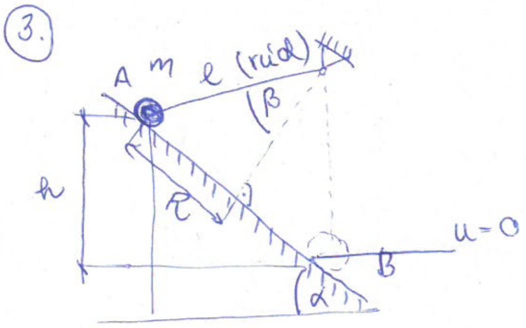
$$W_{01} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}_k \cdot \underline{v} = -\int_{\cancel{t_0}\,R_0}^{\cancel{t_1}\,R_1} m\omega^2\eta \cdot \frac{d\eta}{\cancel{dt}} \cdot \cancel{dt} = -m\omega^2\left[\frac{\eta^2}{2}\right]_{R_0}^{R_1} = -\frac{m\omega^2}{2}\left(R_1^2 - R_0^2\right) = \underline{\underline{47{,}25\,J}}$$

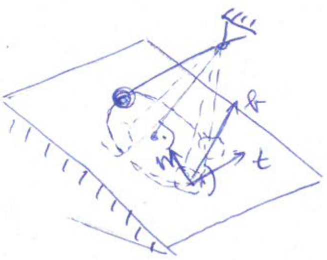
$\boxed{M}$ $\underline{F}_k = -\underline{F}_{száll}$, $\underline{F}_{száll} = -\text{grad}\, U_{száll}$

$$W_{01} = U_0 - U_1 = -\left[\frac{1}{2}m\omega^2\eta^2\right]_{R_0}^{R_1} = -\frac{m\omega^2}{2}\left(R_1^2 - R_0^2\right) \checkmark$$

$$\underset{R_1}{\downarrow} \quad \underset{R_0}{\downarrow}$$

3.





<u>Adott:</u> m, ℓ, α, β ($\mu = 0$, sima)

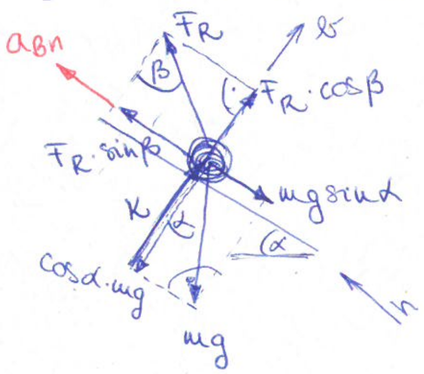
<u>Feladat:</u>

1.) $v_A = ?$ Hogy "m" tömeg ne váljon el a kényszertől a B pontban?

2.) Kényszererő A pontban

<u>Megoldás:</u>

1.) SZTÁ B pontban: F_R, mg és a_{Bn} → erőket felbontjuk!



Az elválás határhelyzetében: $\boxed{K=0}$

($a_{Bb}=0$ az elválás határhelyzetében)

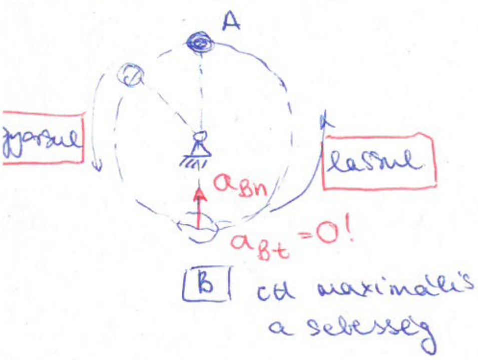
Dinamika alaptétele: $m\underline{a} = \underline{F}$

t: $m \cdot a_{Bt} = 0$

n: $m \cdot a_{Bn} = F_R \sin\beta - mg\sin\alpha$ (1)

b: $\underbrace{0}_{m \cdot a_{Bb}} = \underbrace{K}_{0} + F_R \cos\beta - mg\cos\alpha$ (2)

Csúszó felől nézve:



2 egyenlet, 2 ismeretlen.

$a_{Bn} \to a_{Bn} = \frac{v_B^2}{R} \to v_B \to v_A$ munkatétellel

(3)

Munkatétel: B pont ~ t_1
A pont ~ t_0

($F_R \perp v$, $K \perp v$ } ideális kényszerek) → nincs munkájuk

$$T_1 - T_0 = U_0 - U_1$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_B^2 - \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 = mgh - 0 = \cancel{m}g \underbrace{2\ell\sin\beta\sin\alpha}_{h} \quad (4)$$

Számolás:

(2) → $F_R = mg\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

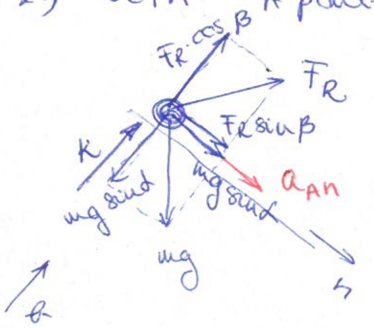
(1) → $a_{Bn} = \frac{F_R\sin\beta - mg\sin\alpha}{m} = \frac{mg\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta - mg\sin\alpha}{m} = g\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta - \sin\alpha\right)$

(3) → $v_B^2 = a_{Bn}\cdot R = a_{Bn}\cdot l\sin\beta = g\left(\cos\alpha\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta} - \sin\alpha\right)\cdot l\cdot\sin\beta$

(4) → $v_A^2 = v_B^2 - 4gl\sin\beta\sin\alpha = g\cdot l\sin\beta\left(\cos\alpha\, tg\beta - \sin\alpha\right) - 4gl\sin\beta\sin\alpha$

$$\underline{\underline{v_A = \sqrt{gl\sin\beta\left(\cos\alpha\, tg\beta - 5\sin\alpha\right)}}}$$

2.) SZTA A pontban:



$\underline{\dot{I}} = \underline{F}$

t: $m a_{At} = 0$ (1)

n: $m a_{An} = F_R\sin\beta + mg\sin\alpha$ (2)

b: $m a_{Ab} = K + F_R\cos\beta - mg\sin\alpha$ (3)

5 ismeretlen, 3 egyenlet.

Kell a kinematika! $a_{An} = \frac{v_A^2}{R}$ (4)

$a_{Ab} = 0$ (5)

(2) -ből: $F_R = \left(m\frac{v_A^2}{R} - mg\sin\alpha\right)\cdot\frac{1}{\sin\beta}$

(3) -ból: K ✓

$$K = \frac{6\sin\alpha}{tg\beta}\,mg$$