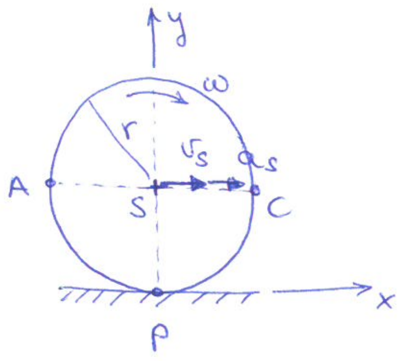
DINAMIKA – 3. gyakorlat

Síkbeli feladatok

(1.) Gördülő korong



Adatok:

$v_S = 1 \frac{m}{s}$

$a_S = 2 \frac{m}{s^2}$

$r = 0{,}5 m$

Feladatok:

Melyik pontban válhatnak le a sárcseppek a korongról először?

$\rightarrow a_{max} = a_Q$

$\underline{r}_{SQ} = ?$

Részfeladatok: ω, ε, $\underline{r}_{SP}$, $\underline{r}_{SG}$, $\underline{a}_P$, $\underline{v}_G$

a_P: sebességpólus gyorsulása

$\underline{v}_G$: gyorsuláspólus sebessége

Megoldás:

$\boxed{\omega = ?}$ Gördülés $\rightarrow$ $\underline{v}_P = \underline{0}$

$\underline{v}_S = \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PS}$

$$\begin{bmatrix} v_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \omega = -\frac{v_S}{r} = -\frac{1}{0{,}5} = -2 \frac{rad}{s}$$

$\rightarrow$ ÁBRÁRA RÁRAJZOLJUK AZ IRÁNYT!

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

$\boxed{\varepsilon = ?}$

$$\underline{a}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ a_P \\ 0 \end{bmatrix}$$ síkbeli gördülés miatt

$$\underline{a}_S = \begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \underline{a}_S = \underline{a}_P + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{PS} - \omega^2 \cdot \underline{r}_{PS} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\varepsilon \\ a_P - \omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_S = \begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = -\frac{a_S}{r} = -\frac{2}{0,5} = -4 \frac{rad}{s^2} \longrightarrow \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

$$a_P = \omega^2 r = \frac{v_S^2}{r} = \frac{1}{0,5} = 2 \frac{m}{s^2}$$

$\boxed{\underline{r}_{SP} = ?}$ Képlet: $\underline{r}_{SP} = \frac{1}{\omega^2} (\underline{\omega} \times \underline{v}_S)$

De most tudjuk, hogy hol a 0 sebességű pont: P

$$\underline{r}_{SP} = \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\underline{r}_{SG} = ?}$ Képlet: $\underline{r}_{SG} = \frac{1}{\varepsilon^2 + \omega^4} (\omega^2 \underline{a}_S + \underline{\varepsilon} \times \underline{a}_A)$ Ez túl bonyolult...

"G" pont gyorsulása 0:

$$\underline{a}_G = \underline{a}_S + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{SG} - \omega^2 \underline{r}_{SG} = \begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{SGx} \\ r_{SGy} \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} r_{SGx} \\ r_{SGy} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_S - r_{SGy} \cdot \varepsilon - \omega^2 r_{SGx} \\ r_{SGx} \cdot \varepsilon - \omega^2 r_{SGy} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{a}_G} \begin{matrix} (1.) \\ (2.) \\ \end{matrix}$$

2 egyenlet, 2 ismeretlen

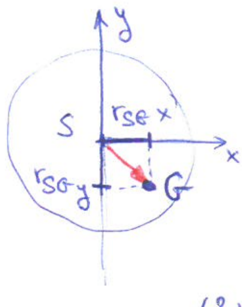
2.-ből: $r_{SGx} = \frac{\omega^2}{\varepsilon} r_{SGy}$

1.-ből: $a_S - r_{SGy} \cdot \varepsilon - \omega^2 \cdot \frac{\omega^2}{\varepsilon} r_{SGy} = 0$

$$r_{SGy} = \frac{a_S \cdot \varepsilon}{\varepsilon^2 + \omega^4} = -0,25\,m$$

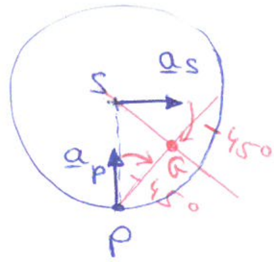
$$r_{SGx} = 0,25\,m$$

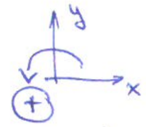
$$\underline{r}_{SG} = \begin{bmatrix} r/2 \\ -r/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Szerkesztéssel:

$$tg\,\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{-4}{2^2} = -1 \longrightarrow \alpha = -45^\circ$$





$\boxed{\underline{a}_P = ?}$

$$\underline{a}_P = \underline{a}_S + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{SP} - \omega^2 \cdot \underline{r}_{SP} = \begin{bmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ +\varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_S - r\cdot\varepsilon \\ r\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 0{,}5\cdot 4 \\ r\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(de már az ε számolásánál is kijött)

$\boxed{\underline{v}_G = ?}$

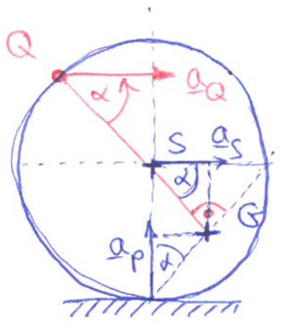
$$\underline{v}_G = \underbrace{\underline{v}_P}_{\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PG} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r/2 \\ -r/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +r\cdot\omega/2 \\ -r\cdot\omega/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

Sárcsepp leválás helye:

~ ott, ahol a legnagyobb a gyorsulás

~ tehát a gyorsuláspólustól legtávolabb eső helyen, $\boxed{Q}$ pontban

~ α szöget felmérjük a piros egyenestől $\oplus$ irányban → $\underline{a}_Q$ iránya

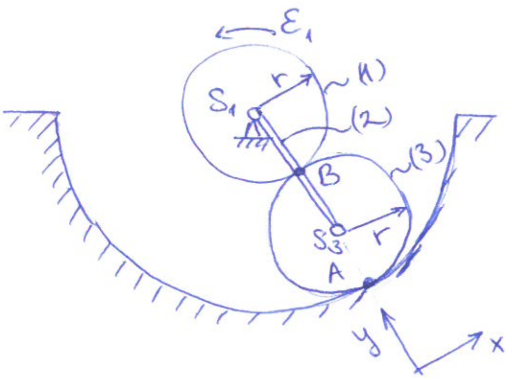


$$\underline{a}_Q = \underline{a}_S + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{SQ} - \omega^2 \cdot \underline{r}_{SQ} = \dots$$

$\underline{r}_{SQ} = ?$

HF kiszámolni $\underline{a}_Q$-t!

(2.) Hajtómű



(B pont: (1) és (3) érintkezése)

Adatok:

$r = 0{,}1\ m$

$\omega_1 = 10\ \frac{rad}{s}$

$\varepsilon_1 = 5\ \frac{rad}{s^2}$

Feladat:

a, Sebességállapot

- ω_3, $\underline{v}_{S3}$
- ω_2
- seb. eloszlás AB-n

b) gyorsulásállapot

- $\underline{a}_{S3}$
- $\underline{a}_A$, $\underline{a}_{B1}$, $\underline{a}_{B3}$
- ε_3

Megoldás:

a, Sebességállapot

Ami tudi: $\underline{v}_A = \underline{0}$ (gördül)

$\underline{v}_{S1} = \underline{0}$ (álló pont)

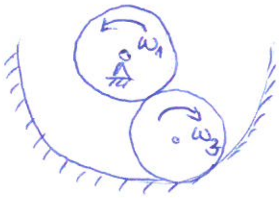
$\underline{v}_{B1} = \underline{v}_{B3}$

"B" pont az (1)-es testen:

$$\underline{v}_{B1} = \underbrace{\underline{v}_{S1}}_{\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{S1B1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \cdot r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

"B" pont a (3)-as testen:

$$\underline{v}_{B3} = \underbrace{\underline{v}_{\cancel{S3}\,A}}_{\underline{0}} + \underline{\omega}_3 \times \underline{r}_{AB3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2r\omega_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{v}_{B1} = \overset{=\omega_1 \cdot r}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}_{\omega_3 = -\omega_1 \cdot \frac{1}{2} = -5\ \frac{rad}{s}} \left[\frac{m}{s}\right]$$



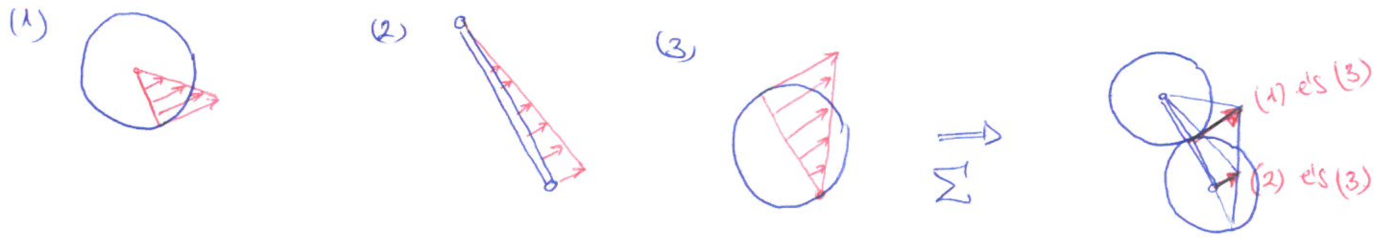
$\underline{v}_{S3} = ?$ $\quad \underline{v}_{S3} = \underbrace{\underline{v}_A}_{\underline{0}} + \underline{\omega}_3 \times \underline{r}_{AS3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_3 \cdot r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \cdot \frac{r}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$

$\omega_2 = ?$ Tudjuk a (2) test 2 pontjának sebességét: $\underline{v}_{S1}, \underline{v}_{S3}$

$$\underline{v}_{S3} = \underbrace{\underline{v}_{S1}}_{\underline{0}} + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{S1S3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r\omega_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_1 \cdot \frac{r}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{v}_{S3}}$$

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \frac{1}{4} = 2{,}5 \ \frac{rad}{s}$$

Sebességeloszlás:



b) <u>Gyorsulásállapot</u>

Amit tudunk: ~ B_1 pont körpályán mozog

$$\underline{a}_{B1} = \begin{bmatrix} r \cdot \varepsilon_1 \\ r \cdot \omega_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(redukciós képlettel rajön)}$$

~ $\underline{a}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{bmatrix}$ (gördülés miatt)

~ S_3 pont körpályán mozog

$$a_{S3y} = \frac{v_{S3}^2}{2r}$$

~ gördülés miatt: $a_{B1x} = a_{B3x}$ (tangenciális gyorsulások megegyeznek)

$$\underline{a}_{S3} = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon}_3 \times \underline{r}_{AS3} - \omega_3^2 \cdot \underline{r}_{AS3} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_3^2 \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r\,\varepsilon_3 \\ a_A - \omega_3^2 r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_{S3} = \begin{bmatrix} a_{S3x} \\ a_{S3y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{S3x} \\ \frac{v_{S3}^2}{2r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{v_{S3}^2}{2r} = a_A - \omega_3^2 \cdot r$$

$$a_A = \frac{v_{S3}^2}{2r} + \omega_3^2 \cdot r = 3{,}75 \, \frac{m}{s^2}$$

$$a_{S3x} = -r \cdot \varepsilon_3 \; ?$$

?

$$\underline{a}_{B3} = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon}_3 \times \underline{r}_{AB3} - \omega_3^2 \cdot \underline{r}_{AB3} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_3^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r\varepsilon_3 \\ a_A - 2\omega_3^2 r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_{B1} = \underbrace{\underline{a}_{S1}}_{\underline{0}} + \underline{\varepsilon}_1 \times \underline{r}_{S1B1} - \omega_1^2 \, \underline{r}_{S1B1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_1^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \varepsilon_1 \\ r \cdot \omega_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tudjuk, hogy $a_{B1x} = a_{B3x} \longrightarrow -2\cancel{r} \cdot \varepsilon_3 = \cancel{r} \cdot \varepsilon_1$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1}{-2} = -2{,}5 \, \frac{rad}{s^2}$$

$$\longrightarrow a_{Sx3} = -r \cdot \varepsilon_3 = +0{,}25 \, \frac{m}{s^2}$$

$$\underline{a}_{B1} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right] \qquad \underline{a}_{B3} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}25 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right] \qquad \underline{a}_{S3} = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 3{,}75 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$G_3 = ?$ Hol van?

$$\underline{a}_{G_3} = \underbrace{\underline{a}_A}_{\begin{bmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{bmatrix}} + \underline{\varepsilon}_3 \times \underline{r}_{AG_3} - \omega_3^2 \cdot \underline{r}_{AG_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{AG3x} \\ r_{AG3y} \\ 0 \end{bmatrix} - \omega_3^2 \begin{bmatrix} r_{AG3x} \\ r_{AG3y} \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{a}_{G3}}$$

2 egyenlet, 2 ismeretlen!

Megoldás: $r_{AG3x} = 0{,}1485 \, m$

$r_{AG3y} = 0{,}0149 \, m$