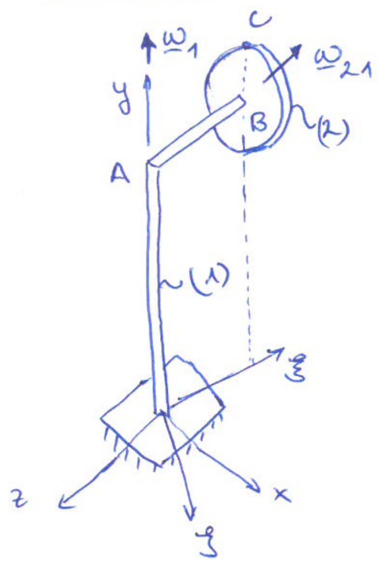
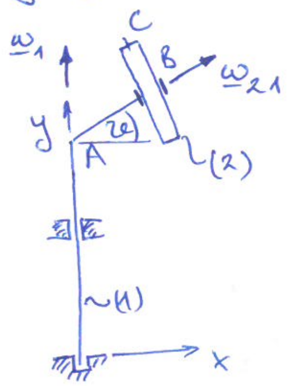
# DINAMIKA – 2. gyakorlat

Merev test kinematikája

① Robotkar




z tengely felőli nézet: t = 0-nál!




Adatok: $\underline{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$ = állandó

$|\underline{\omega}_{21}| = 2\ rad/s$ = állandó (2-es test 1-eshez viszonyított szögsebessége)

$\underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$ $\underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0,3 \\ 0 \end{bmatrix} [m]$ (t = 0-nál)

Kérdések: 1.) $\underline{v}_C = ?$ (t = 0-nál)

2.) $\underline{a}_C = ?$ (t = 0-nál)

---

Megoldás:

1.) "A" és "B" pont ugyanazon a merev testen vannak:

$$\underline{v}_B = \underbrace{\underline{v}_A}_{\underline{0}} + \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{AB}$$

$$\underline{v}_B = \underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,8 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

"B" és "C" pont ugyanazon a merev testen vannak:

$$\underline{v}_C = \underset{\checkmark}{\underline{v}_B} + \underset{?}{\underline{\omega}_2} \times \underset{\checkmark}{\underline{r}_{BC}}$$

$\underline{\omega}_2$: 2-es test szögsebessége. Ezt úgy kapjuk meg, hogy az 1-es test ω-jához hozzáadjuk a relatív szögsebességet.

$$\underline{\omega}_2 = \underset{\checkmark}{\underline{\omega}_1} + \underset{?}{\underline{\omega}_{21}}$$

$$\underline{\omega}_{21} = \underbrace{|\underline{\omega}_{21}|}_{\text{nagyság}} \cdot \underbrace{\underline{e}_{AB}}_{\text{irány}} = \omega_{21} \cdot \frac{\underline{r}_{AB}}{|\underline{r}_{AB}|} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

↳ egységvektor!

$$\longrightarrow \quad \underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 2,2 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Tehát $\underline{v}_C$:

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,6 \\ 2,2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0,4 \\ 0,3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,3 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

2.) Először B pont gyorsulása kell, utána C ponté:

$$\underline{a}_B = \underbrace{\underline{a}_A}_{\underline{0}\text{, mert álló pont}} + \overset{?}{\underline{\varepsilon}_1} \times \overset{\checkmark}{\underline{r}_{AB}} + \overset{\checkmark}{\underline{\omega}_1} \times (\overset{\checkmark}{\underline{\omega}_1} \times \overset{\checkmark}{\underline{r}_{AB}})$$

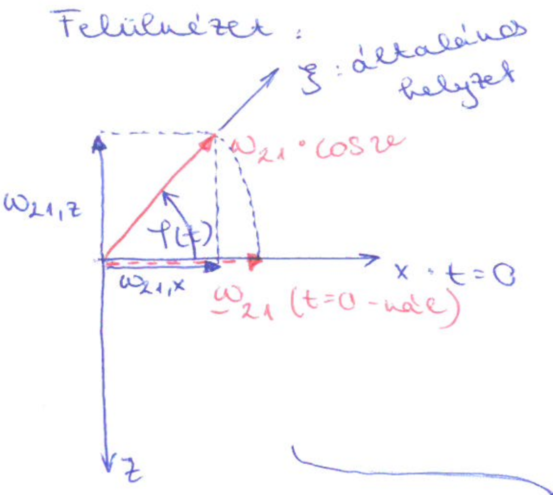
$$\underline{a}_C = \underline{a}_B + \overset{?}{\underline{\varepsilon}_2} \times \overset{\checkmark}{\underline{r}_{BC}} + \overset{\checkmark}{\underline{\omega}_2} \times (\overset{\checkmark}{\underline{\omega}_2} \times \overset{\checkmark}{\underline{r}_{BC}})$$

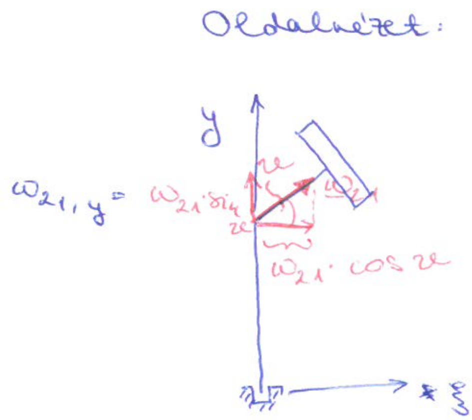
Tehát kell az 1-es és 2-es test szöggyorsulása!

~ $\underline{\varepsilon}_1 = \dot{\underline{\omega}}_1 = \underline{0}$ ($\underline{\omega}_1$-nek nem változik az iránya, és a nagysága sem)

~ $\underline{\varepsilon}_2 = \dot{\underline{\omega}}_2 = \underbrace{\dot{\underline{\omega}}_1}_{\underline{0}} + \underbrace{\dot{\underline{\omega}}_{21}}_{\neq \underline{0}}$, mert az iránya változik! (a nagysága nem)

$\underline{\omega}_1$ forgatja $\underline{\omega}_{21}$-t. $\underline{\omega}_{21}$ hossza nem változik, tehát $\underline{\omega}_2$ y irányú komponense sem. (y a forgástengely.)




$$\underline{\omega}_{21}=\begin{bmatrix}\omega_{21}\cdot\cos\alpha\cdot\cos\varphi(t)\\ \omega_{21}\cdot\sin\alpha\\ -\omega_{21}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\varphi(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_{21,x}\\ \omega_{21,y}\\ \omega_{21,z}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\varphi(t)=\omega_1\cdot t \longrightarrow \dot{\varphi}(t)=\omega_1}$$

$$\dot{\underline{\omega}}_{21}=\omega_{21}\begin{bmatrix}-\cos\alpha\cdot\omega_1\cdot\sin(\omega_1 t)\\ 0\\ -\cos\alpha\cdot\omega_1\cdot\cos(\omega_1 t)\end{bmatrix}$$

Tehát: $\dot{\underline{\omega}}_2=\dot{\underline{\omega}}_{21}=\omega_{21}\cdot\cos\alpha\cdot\omega_1\begin{bmatrix}-\sin(\omega_1 t)\\ 0\\ -\cos(\omega_1 t)\end{bmatrix}$ (Általános, bármely időpontban számolhatjuk. Nekünk t=0 kell!)

t=0-ban: $\dot{\underline{\omega}}_2=\underline{\varepsilon}_2=\underset{\checkmark}{\omega_{21}}\cdot\underset{?}{\cos\alpha}\cdot\underset{\checkmark}{\omega_1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$$\frac{\underline{r}_{AB}}{|\underline{r}_{AB}|}=\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}8\\ 0{,}6\\ 0\end{bmatrix}\longrightarrow \cos\alpha=0{,}8$$

$$\longrightarrow \underline{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\-1{,}6\end{bmatrix}\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

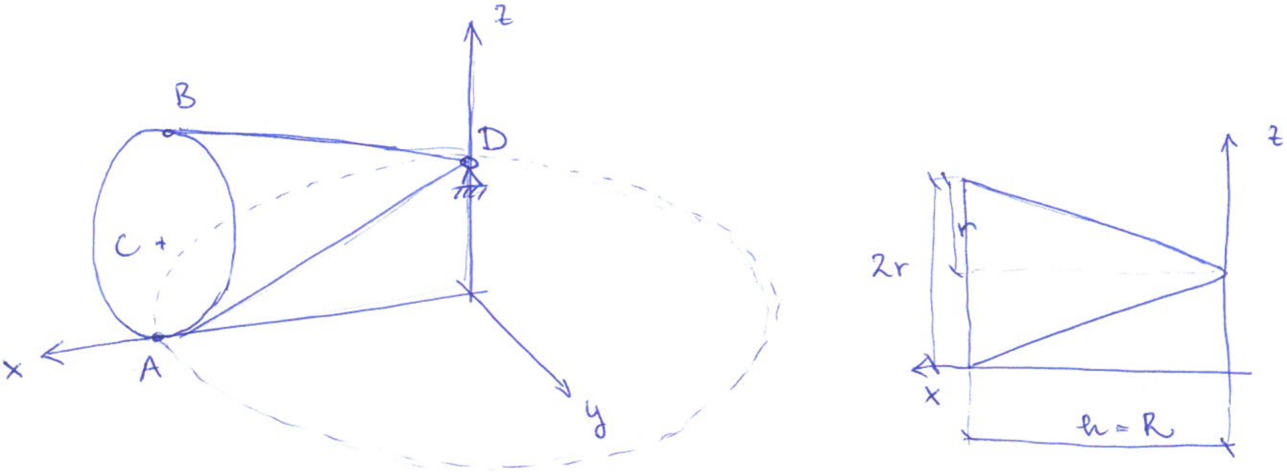
A gyorsulások:

$$\underline{a}_B = \underbrace{\underline{a}_A}_{\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_1}_{\underline{0}} \times \underline{r}_{AB} + \underline{\omega}_1 \times \underbrace{(\underline{\omega}_1 \times \underline{r}_{AB})}_{\text{ezt már számoltuk a sebességnél}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}8 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{tehát körpályán mozog!}} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\underline{a}_C = \underline{a}_B + \underline{\varepsilon}_2 \times \underline{r}_{BC} + \underline{\omega}_2 \times (\underline{\omega}_2 \times \underline{r}_{BC}) = \begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1{,}6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1{,}6 \\ 2{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}7 \\ -1{,}6 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

## (2.) Gördülő kúp




Adatok: $v_C = 10 \frac{m}{s}$

$r = 2m$

$h = R = 4m$

Kérdések: 1.) $\underline{\omega} = ?$ $\underline{\varepsilon} = ?$

2.) $\underline{v}_B = ?$ $\underline{a}_B = ?$

3.) $\underline{a}_A = ?$

(Ez is cikloisan mozog, csak 3D-ben.)

Megoldás

1.) Redukciós képlet: $\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$

Melyik pontokra írjuk fel? → Olyanra, amiről tudunk valamit, pl.:

$\underline{v}_D = \underline{0}$ (csukló)

$\underline{v}_A = \underline{0}$ (gördül)

$\underline{v}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{bmatrix}$ (vízszintes síkban mozog)

~ $\boxed{D-C:}$

$$\underline{v}_C = \underbrace{\underline{v}_D}_{\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{DC} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \cdot \omega_z \\ -h \cdot \omega_y \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{bmatrix}}^{\underline{v}_C}$$

$$\omega_z = \frac{v_C}{h}$$

$$\omega_y = 0$$

~ $\boxed{A-C:}$

$$\underline{v}_C = \underbrace{\underline{v}_A}_{\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AC} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\,\omega_y \\ -r\,\omega_x \\ 0 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ v_C \\ 0 \end{bmatrix}}^{\underline{v}_C}$$

$$\omega_y = 0$$

$$\omega_x = -\frac{v_C}{r}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v_C}{r} \\ 0 \\ \frac{v_C}{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s}\right]$$

( ~ $\boxed{A-D:}$

$$\underbrace{\underline{v}_A}_{} = \underbrace{\underline{v}_D}_{} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{DA}$$

$\underline{0} = \underline{0} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{DA}$ → 2 vektor × szorzata akkor 0, ha párhuzamosak → $\underline{\omega} \parallel \underline{r}_{DA}$ )

De ez az egyenlet már nem kell, enélkül is kijött $\underline{\omega}$.

[ Másik megoldás: képzeletben odaülünk a D pontra és együtt forgunk a kúppal

$$\left.\begin{aligned}\underline{\omega}_{rel} &= -\frac{v_c}{r}\,\underline{i} \\ \underline{\omega}_{száll} &= \frac{v_c}{h}\cdot\underline{k}\end{aligned}\right\}$$ ugyanazt kapjuk relatív dinamikából ]

$\underline{\varepsilon} = ?$

Redukciós képlet: $\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB})$

Amit tudunk: $\underline{a}_D = \underline{0}$ (mert álló pont)

$\underline{a}_c \parallel \underline{r}_{CD}$, mert a "C" pont körpályán mozog az x-y síkban $\rightarrow$ $\underline{a}_c = \begin{bmatrix} a_{cx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$a_{Ay} = 0$ (gördülés feltétele)

$\sim$ $\boxed{D-C:}$ $\underline{a}_c = \underbrace{\underline{a}_D}_{\underline{0}} + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{DC} + \underline{\omega} \times \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_{DC})}_{\underline{v}_c} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ v_c \\ 0 \end{bmatrix} =$

◯: ismeretlen

behelyettesítünk

$$= \begin{bmatrix} -v_c\,\omega_z \\ h\,\varepsilon_z \\ -h\,\varepsilon_y + v_c\,\omega_x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{cx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{a}_c} \longrightarrow \quad a_{cx} = -\frac{v_c^2}{h}$$

$\varepsilon_z = 0$

$\varepsilon_y = \frac{v_c}{h} \cdot \frac{(-v_c)}{r} = -\frac{v_c^2}{r \cdot h}$

$\sim$ $\boxed{A-C:}$ $\underline{a}_c = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AC} + \underline{\omega} \times \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_{AC})}_{\underline{v}_c} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ 0 \\ a_{Az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ v_c \\ 0 \end{bmatrix} =$

előbb kijött

$$= \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ 0 \\ a_{Az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_y\, r \\ -\varepsilon_x\, r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_c\,\omega_z \\ 0 \\ v_c\,\omega_x \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{cx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{a}_c}$$

$a_{Ax} = a_{cy} - \varepsilon_y r + v_c \omega_z = +\frac{v_c^2}{h} = 25\ \frac{m}{s^2}$

$\varepsilon_x = 0$

$a_{Az} = -v_c\,\omega_x = \frac{v_c^2}{r} = 50\ \frac{m}{s^2}$

$$\longrightarrow \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{rad}{s^2}\right] \qquad \underline{a}_A = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Van $\underline{\varepsilon}$! Azért, mert $\underline{\omega}$ iránya változik. $\omega$ nagysága nem. Ez olyan, mint a sebességnél. Ha változik a seb. iránya, de nagysága nem, van gyorsulás!

Relatív dinamikával: "D pontban ülve"

$$\underline{\varepsilon}_{absz} = \underbrace{\underline{\varepsilon}_{rel}}_{\underline{0}} + \underbrace{\underline{\varepsilon}_{száll}}_{\underline{0}} + \underline{\omega}_{száll} \times \underline{\omega}_{rel} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \omega_z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{v_c^2}{r \cdot h} \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

2.) $$\underline{v}_B = \underbrace{\underline{v}_A}_{\underline{0}} + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2v_c \\ 0 \end{bmatrix}$$

( $v_B = 2 \cdot v_c \rightarrow$ olyan, mintha "A" körül forogna pillanatnyilag)

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} + \underline{\omega} \times \underbrace{(\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB})}_{\underline{v}_B} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ 0 \\ a_{Az} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2v_c \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \ldots\ldots = \begin{bmatrix} -3\frac{v_c^2}{h} \\ 0 \\ -\frac{v_c^2}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -75 \\ 0 \\ -50 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

3.) $\underline{a}_A \rightarrow$ 1.) feladatban kiszámoltuk