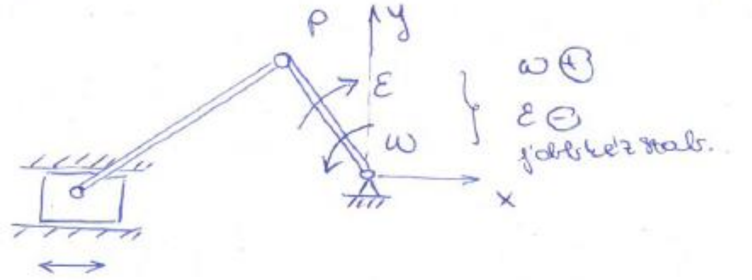
DINAMIKA – 1. gyakorlat

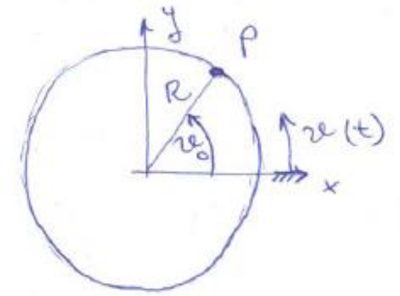
Anyagi pont mozgása, foronómiai görbék

1.) Anyagi pont mozgása körpályán (P pont mozgását vizsgáljuk)

Mechanikai modell:



P pont pályagörbéje: körpályán mozog



Adatok: $t_0 = 0\,s$ $\qquad \vartheta(t_0) = \vartheta_0 = 30^\circ$

$t_1 = 7\,s$ $\qquad \dot{\vartheta}(t_0) = \omega(t_0) = \omega_0 = 10\,\frac{rad}{s}$

$\ddot{\vartheta}(t) = \varepsilon(t) = -2\,\frac{rad}{s^2} = \varepsilon$ (állandó szöggyorsulás)

$R = 0{,}5\,m$

Feladatok:

1.) A t_1 időpontban milyen szöghelyzetben lesz a P pont?

2.) A t_1 időpontban milyen irányú a P pont mozgása?

3.) Rajzolja meg az $a_t(t)$, $v(t)$ és $s(t)$ foronómiai görbéket és az $a_n(t)$ függvényt!

Megoldás:

1.) Állandó szöggyorsulás! $\ddot{\varphi}(t) = \varepsilon$ - áll.

Szögseb.: $\dot{\omega}(t) = \varepsilon \qquad \Big/ \int_{t_0}^{t} \dots d\tau$

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\omega}(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \varepsilon\, d\tau \; \underbrace{\left(= \varepsilon \int_{t_0}^{t} 1\, d\tau \right)}_{\text{konstans } \varepsilon \text{ esetén}}$$

$$\omega(t) - \underbrace{\omega(t_0)}_{\omega_0} = \varepsilon(t - \underbrace{t_0}_{\text{általában } 0}) \Longrightarrow \boxed{\omega(t) = \varepsilon \cdot (t - t_0) + \omega_0}$$

Szöghelyzet: (síkban) $\dot{\varphi}(t) = \omega(t) \qquad \Big/ \int_{t_0}^{t} \dots d\tau$

$$\int_{t_0}^{t} \dot{\varphi}(\tau)\, d\tau = \varphi(t) - \underbrace{\varphi(t_0)}_{\varphi_0}$$

$$\int_{t_0}^{t} \omega(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} \left[\varepsilon \cdot (\tau - t_0) + \omega_0\right] d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0)$$

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot (t - t_0)^2 + \omega_0 (t - t_0) + \varphi_0}$$

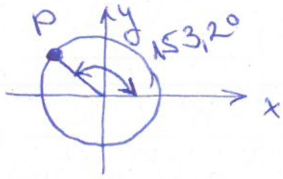
Esetünkben $t_0 = 0$, tehát:

$$\omega(t) = \varepsilon \cdot t + \omega_0$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

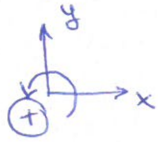
$t_1 = 7\,s$ -nál:

$$\varphi(t_1) = \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 7^2 + 10 \cdot 7 + \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{30^\circ} = 3{,}42 \cdot \underbrace{2\pi \text{ rad}}_{1 \text{ kör}} = \underbrace{3 \cdot 360^\circ}_{\text{3 teljes kört megy}} + 153{,}2^\circ$$



2, Mozgás iránya : szögsebesség előjele mutatja!

$$\omega(t_1) = \varepsilon \cdot t_1 + \omega_0 = -2 \cdot 7 + 10 = -4 \ \frac{rad}{s}$$



$\ominus$ Tehát visszafelé mozog!

Mikor és hol váltott irányt a mozgás?

Ahol $\omega = 0$!

$\omega(t^*) = 0 \longrightarrow -2 \cdot t^* + 10 = 0 \longrightarrow t^* = 5\,s$ -nál váltott irányt.

$$\varphi(t^*) = \frac{1}{2}(-2) \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 + \frac{\pi}{6} = 4{,}0622 \cdot 2\pi = \underbrace{4 \cdot 360°}_{4 \text{ teljes kör}} + 22{,}4°$$

3., Foronómiai görbék : $a_t(t)$ tangenciális (pálya) gyorsulás

$v(t)$ pályasebesség

$s(t)$ befutási törvény

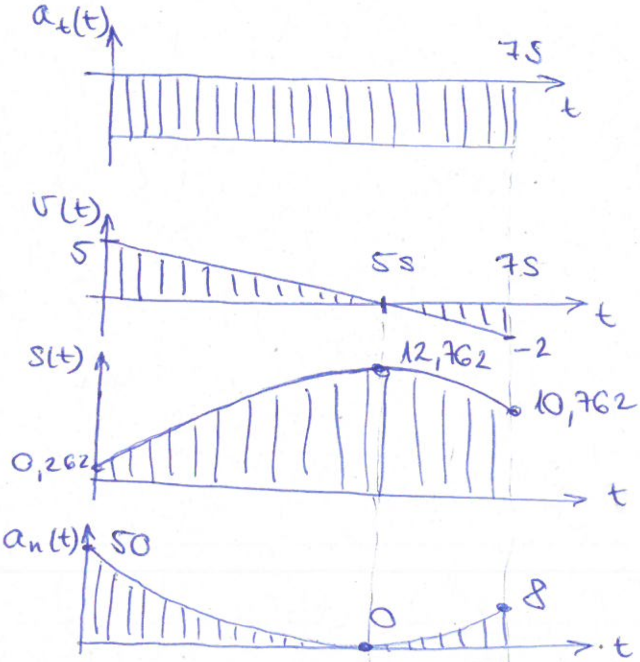
$$\underline{r}_p = R \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \longrightarrow \dot{\underline{r}}_p = R \cdot \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \ddot{\underline{r}}_p = \underbrace{\underbrace{R \cdot \overset{\varepsilon = áll.}{\ddot{\varphi}}}_{\text{nagyság}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}}_{*}}_{a_t} + \underbrace{\underbrace{R \cdot \dot{\varphi}^2}_{\text{nagyság}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}}_{*}}_{a_n}$$

$\ddot{\varphi} = áll. = \varepsilon \rightarrow a_t = R \cdot \varepsilon$

*: egységvektorok, $\perp$-ek egymásra!

○: gyorsulás egyik tagja a sebesség irányába esik → ez lesz a tangenciális gyorsulás, másik a normális



$$a_t(t) = R \cdot \varepsilon = áll. = a_{t0} = -1 \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$\downarrow \int_{t_0}^{t} \dots d\tau$$

$$v(t) = a_{t0} \cdot t + V_0 = -t + 5 \ \left[\frac{m}{s}\right] \ ; \ V_0 = R \cdot \omega_0$$

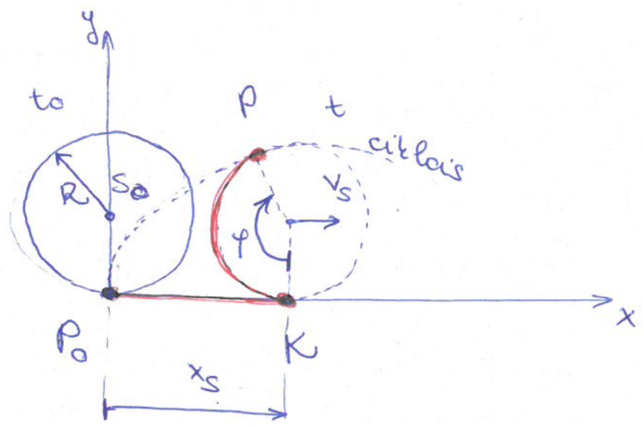
$$\downarrow \int_{t_0}^{t} \dots d\tau$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a_{t0} \frac{t^2}{2} + V_0 t + S_0 \ [m] = -\frac{t^2}{2} + 5t + 0{,}262$$

$$S_0 = R \cdot \varphi_0$$

$$a_n(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{(-t+5)^2}{0{,}5} \ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

2.) Anyagi pont mozgása ciklois pályán



Adatok: $R = 0{,}3\ m$

$V_S = \text{áll.}$

$V_S = 5\ \frac{m}{s}$

$\varphi_1 = 75^\circ = \frac{5}{12}\pi\ \text{rad}$

Feladatok:

1.) $\underline{v}_P(\varphi) = ?$

2.) $\underline{a}_P(\varphi) = ?$

3.) $\underline{a}_P(0) = ?$, $\underline{v}_P(0) = ?$

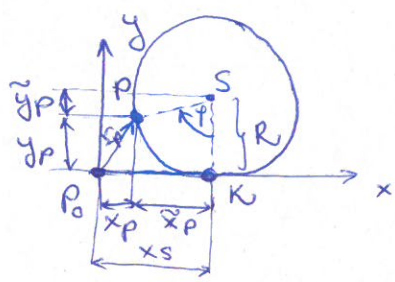
4.) $\underline{a}_P(\varphi_1) = ?$, $\underline{v}_P(\varphi_1) = ?$

5.) $\underline{a}_n(\varphi_1) = ?$, $\underline{a}_t(\varphi_1) = ?$

6.) $\rho_P(\varphi_1) = ?$

Megoldás: A P pont cikloison mozog.

Ciklois egyenlete:

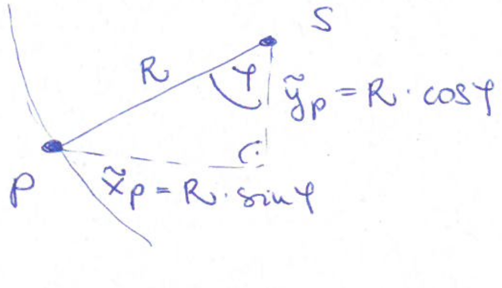


Állandó sebességgel halad: $x_S = v_S \cdot t$

$$\overline{P_0K} = \widehat{PK} \qquad \left.\begin{array}{l} \widehat{PK} = R\cdot\varphi \\ \overline{P_0K} = x_S = v_S\cdot t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} R\varphi = v_S\cdot t \\ \varphi = \frac{v_S}{R}\cdot t \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{x_S = R\cdot\varphi} \qquad \boxed{\dot\varphi = \frac{v_S}{R} \quad (\dot\varphi = \omega)}$$

$$\underline{r}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_S - \tilde{x}_P \\ R - \tilde{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cdot\varphi - R\cdot\sin\varphi \\ R - R\cdot\cos\varphi \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} \varphi - \sin\varphi \\ 1 - \cos\varphi \end{bmatrix}$$



1.) $\underline{v}_P = \frac{d\underline{r}_P(\varphi(t))}{dt} = \frac{d\underline{r}_P}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\underline{r}}_P(t) = R\begin{bmatrix}\dot\varphi - \cos\varphi\cdot\dot\varphi\\ \sin\varphi\cdot\dot\varphi\end{bmatrix} = R\dot\varphi\begin{bmatrix}1-\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$

Előbb levezettük, hogy $\dot\varphi = \frac{v_S}{R} \rightarrow R\cdot\dot\varphi = v_S$

$$\Longrightarrow \underline{v}_P = v_S\cdot\begin{bmatrix}1-\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}$$

2.) $\underline{a}_P = \dot{\underline{v}}_P = \ddot{\underline{r}}_P = R\ddot\varphi\begin{bmatrix}1-\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix} + R\cdot\dot\varphi\begin{bmatrix}\sin\varphi\cdot\dot\varphi\\ \cos\varphi\cdot\dot\varphi\end{bmatrix} =$

$\underbrace{\underline{r}_P = R\cdot\dot\varphi\begin{bmatrix}1-\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}}_{\text{szorzatot kell deriválni}}$

$$= \underbrace{R\ddot\varphi\begin{bmatrix}1-\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{bmatrix}}_{=0,\ \text{mert}\ \ddot\varphi=0\ (v_S=\text{áll.})} + \underbrace{R\dot\varphi^2\begin{bmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}}_{\underbrace{R\cdot\dot\varphi}_{v_S}\cdot\underbrace{\dot\varphi}_{\frac{v_S}{R}}} = \underbrace{\frac{v_S^2}{R}\begin{bmatrix}\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{bmatrix}}_{\text{sugárirány}}$$

3.) $\varphi=0$ -nál: $\underline{v}_P = v_S\cdot\begin{bmatrix}1-\overbrace{\cos 0}^{1}\\ \underbrace{\sin 0}_{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $\Longrightarrow$ gördülés kinematikai feltétele!

Itt a gyorsulás:

$\underline{a}_P = \frac{v_S^2}{R}\begin{bmatrix}\sin 0\\ \cos 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \frac{v_S^2}{R}\end{bmatrix}$

érintő irányban 0 a gyorsulás! (talajnak simul)

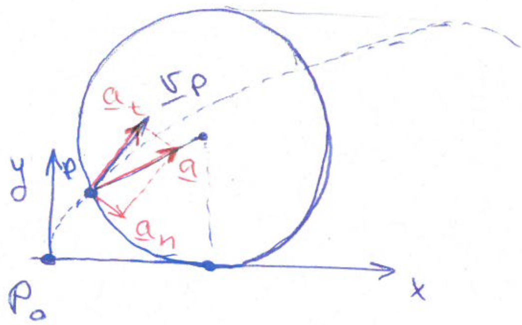
4.) $\underline{v}_P(\varphi_1) = 5\begin{bmatrix}1-\cos 75°\\ \sin 75°\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3,7059\\ 4,8296\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s}\right] = \underline{v}_1$

$v_1 = |\underline{v}_1| = \sqrt{3,7059^2 + 4,8296^2} = 6,0876\ \frac{m}{s}$

$\underline{a}_P(\varphi_1) = \frac{5^2}{0,3}\begin{bmatrix}\sin 75°\\ \cos 75°\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}80,4938\\ 21,5683\end{bmatrix}\left[\frac{m}{s^2}\right] = \underline{a}_1$

$a_1 = |\underline{a}_1| = 83,333\ \frac{m}{s^2}$

5.) Tangenciális gyorsulás: érintő irányú (sebesség irányú)



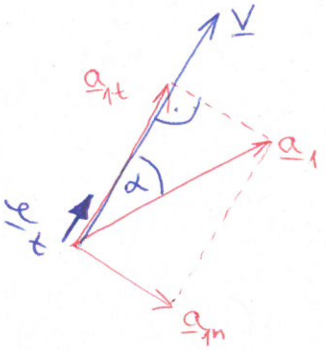
Tangenciális irányt tudjuk!
($\underline{v}$-ből.)

Tangenciális irányú egységvektor:

$$\underline{e}_t = \underbrace{\frac{\underline{v}_P}{|\underline{v}_P|}}_{\frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|}} = \begin{bmatrix} 0,6088 \\ 0,7934 \end{bmatrix} [1]$$

Ennek:

$$\underline{a}_{1t} = a_{1t} \cdot \underline{e}_t = \underbrace{|\underline{a}_1| \cdot \cos\alpha} \cdot \underline{e}_t = (\underline{a}_1 \underline{e}_t) \cdot \underline{e}_t = \begin{bmatrix} 40,2471 \\ 52,4508 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$



Skaláris szorzás:

$$\underline{a}_1 \cdot \underline{e}_t = |\underline{a}_1| \cdot \underbrace{|\underline{e}_t|}_{1} \cdot \cos\alpha$$

$$\underline{a}_{1n} = \underline{a}_1 - \underline{a}_{1t} = \begin{bmatrix} 40,2467 \\ -30,8825 \end{bmatrix} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$a_{1t} = |\underline{a}_{1t}|$

$$a_{1t} = |\underline{a}_{1t}| = 66,1129 \ \frac{m}{s^2}$$

$$a_{1n} = |\underline{a}_{1n}| = 50,7299 \ \frac{m}{s^2}$$

6.) Görbületi sugár:

$$a_{1n} = \frac{v_1^2}{\rho_1} \Rightarrow \rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{1n}} = 0,73 \ m$$

Görbület:

$$K = \frac{1}{\rho} = 1,3689 \ \frac{1}{m}$$