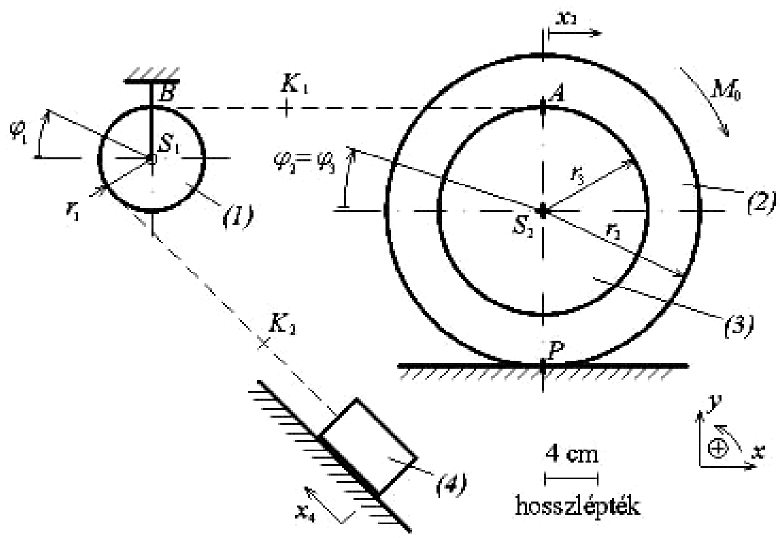
Mechanikai rendszer, síkmozgás – megoldási segédlet
teljesítménytétel

1.



2.

Általános koordináta a *(4)*-es tömeg elmozdulása, azaz $q := x_4$.

A teljesítménytétel:

$$\dot{T} = P$$

A helyzetet leíró paraméterek: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, x_2, x_4$, melyek nem függetlenek, egymás közti kapcsolatukat leíró kényszeregyenletek a következők:

1. $\varphi_2 = \varphi_3$ – a *(2)*-es és *(3)*-as korongok egy merev testet alkotnak

2. $x_4 = r_1 \cdot \varphi_1$ – mert a hasáb annyit mozdul el, amennyi kötél feltekeredik az *(1)*-es tárcsára

3. $r_1 \cdot \varphi_1 = (r_2 + r_3) \cdot \varphi_{23}$ – mivel $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$:

$$\mathbf{v}_{S_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{S_1B} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}_{23} \times \mathbf{r}_{PA}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi}_{23} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_2 + r_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r_1 \cdot \dot{\varphi}_1 = (r_2 + r_3) \cdot \dot{\varphi}_{23}$ ezt integrálva kapjuk $r_1 \cdot \varphi_1 = (r_2 + r_3) \cdot \varphi_{23}$

4. $r_2 \cdot \varphi_{23} = x_2$ – a gördülő forgástest súlypontjának elmozdulása és a szögelfordulása nem függetlenek, $r_2 \cdot \omega_{23} = v_S$ integrálásából.

A mozgási energia felírása:

$$T = T_1 + T_{23} + T_4$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \Theta_{S1} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot (\Theta_{P2} + \Theta_{P3}) \cdot \omega_{23}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot v_4^2$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{q}}{r_1} \qquad \omega_{23} = \dot{\varphi}_{23} = \frac{\dot{q}}{r_2 + r_3} \qquad v_4 = \dot{x}_4 = \dot{q}$$

$$\Theta_{S1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2 \qquad \Theta_{P2} = \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot r_2^2 \qquad \Theta_{P3} = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot r_3^2 + m_3 \cdot r_2^2$$

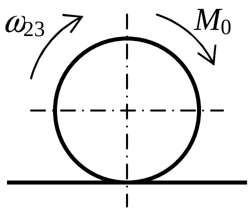
ezeket behelyettesítve és $T = \frac{1}{2} \cdot m_{ált} \cdot \dot{q}^2$ alakra rendezve kapjuk:

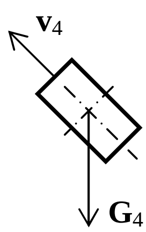
$$T = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_1 + \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{r_2^2}{(r_2 + r_3)^2} + m_3 \cdot \frac{\frac{1}{2} r_3^2 + r_2^2}{(r_2 + r_3)^2} + m_4 \right) \cdot \dot{q}^2$$

$$\underline{\underline{m_{ált}}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 + \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{r_2^2}{(r_2 + r_3)^2} + m_3 \cdot \frac{\frac{1}{2} r_3^2 + r_2^2}{(r_2 + r_3)^2} + m_4 = 1 + 8{,}64 + 3{,}52 + 15 = \underline{\underline{28{,}16 \ [\text{kg}]}}$$

A teljesítmény felírása:

Az ideális kényszerből származó kényszererőknek nincs teljesítménye, és azoknak az erőknek, melyek a támadáspontjának a sebessége zérus, azoknak sincs teljesítménye (ilyen pl. az S_1-ben a ***C*** csapreakció). Ezenkívül azoknak az erőknek sincs teljesítménye, melyek támadáspontjának sebessége merőleges az erő hatásvonalára (ilyen pl. a *(23)*-as testre ható súlyerő).





$$P = \mathbf{M}_0 \cdot \boldsymbol{\omega}_{23} + \mathbf{G}_4 \cdot \mathbf{v}_4$$

$$P = M_0 \cdot \frac{\dot{q}}{r_2 + r_3} - m_4 \cdot g \cdot \dot{q} \cdot \sin 45°$$

$$P = \left(\frac{M_0}{r_2 + r_3} - m_4 \cdot g \cdot \sin 45° \right) \cdot \dot{q}$$

$$\underline{\underline{Q}} = \frac{M_0}{r_2 + r_3} - m_4 \cdot g \cdot \sin 45° = \underline{\underline{70{,}95\ [\mathrm{N}]}}$$

A teljesítménytétel: $\dot{T} = P$

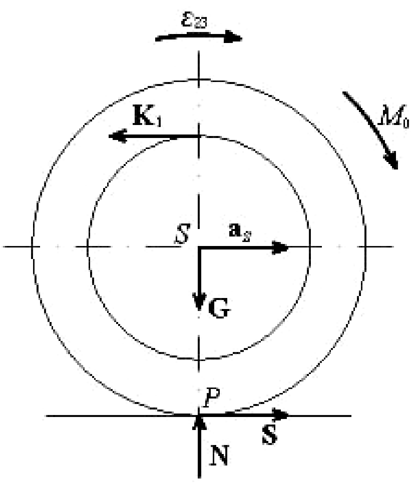
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot m_{ált} \cdot \dot{q} \cdot \ddot{q} = Q \cdot \dot{q}$$

$$\underline{\underline{a_4}} = \ddot{q} = \frac{Q}{m_{ált}} = \underline{\underline{2{,}52\ [\mathrm{m/s^2}]}}$$

$a_4 > 0 \quad \Rightarrow$ a *(4)*-es test fölfelé mozog.

3.
A *(23)*-as testre a dinamika alaptételének II. egyenlete:

Szabadtest ábra:



$$\Theta_{P23} \cdot \varepsilon_{23} = M_0 - K_1 \cdot (r_2 + r_3)$$

Megjegyzés:
A *P*-n átmenő tengelyre célszerű felírni, mert ekkor az ismeretlen kényszererő nem jelenik meg az egyenletben.

$$\varepsilon_{23} = \ddot{\varphi}_{23} = \frac{\ddot{q}}{r_2 + r_3} = 12{,}6\ [\mathrm{rad/s^2}]$$

$$\Theta_{P23} = \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot r_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot r_3^2 + m_3 \cdot r_2^2 = 0{,}486\ [\mathrm{kgm^2}]$$

$$K_1 = \frac{M_0 - \Theta_{P23} \cdot \varepsilon_{23}}{r_2 + r_3} = 144{,}36\ [\mathrm{N}]$$

4.
A (23)-as test szögelfordulását választjuk általános koordinátának, vagyis $q' := \varphi_{23}$.
Most φ_{23}-mal fejezzük ki az összes többi paramétert:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = \frac{r_2 + r_3}{r_1} \cdot \dot{\varphi}_{23}$$

$$v_4 = (r_2 + r_3) \cdot \dot{\varphi}_{23}$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot\Theta_{S1}\cdot\left(\frac{r_2+r_3}{r_1}\right)^2\cdot\dot{\varphi}_{23}{}^2+\frac{1}{2}\cdot\Theta_{P23}\cdot\dot{\varphi}_{23}{}^2+\frac{1}{2}\cdot m_4\cdot(r_2+r_3)^2\cdot\dot{\varphi}_{23}{}^2$$

$$T=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot(r_2+r_3)^2+\Theta_{P23}+m_4\cdot(r_2+r_3)^2\right]\cdot\dot{q}'^2$$

$$m'_{ált}=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot(r_2+r_3)^2+\Theta_{P23}+m_4\cdot(r_2+r_3)^2=0{,}04+0{,}486+0{,}6=1{,}126\ [\mathrm{kgm}^2]$$

A teljesítmény kifejezésében is a $\dot{\varphi}_{23}$-ot emeljük ki:

$$P=M_0\cdot\dot{\varphi}_{23}-m_4\cdot g\cdot(r_2+r_3)\cdot\dot{\varphi}_{23}\cdot\sin 45°$$

$$P=\left(M_0-m_4\cdot g\cdot(r_2+r_3)\cdot\sin 45°\right)\cdot\dot{q}'$$

$$Q'=M_0-m_4\cdot g\cdot(r_2+r_3)\cdot\sin 45°=14{,}19\ [\mathrm{Nm}]$$

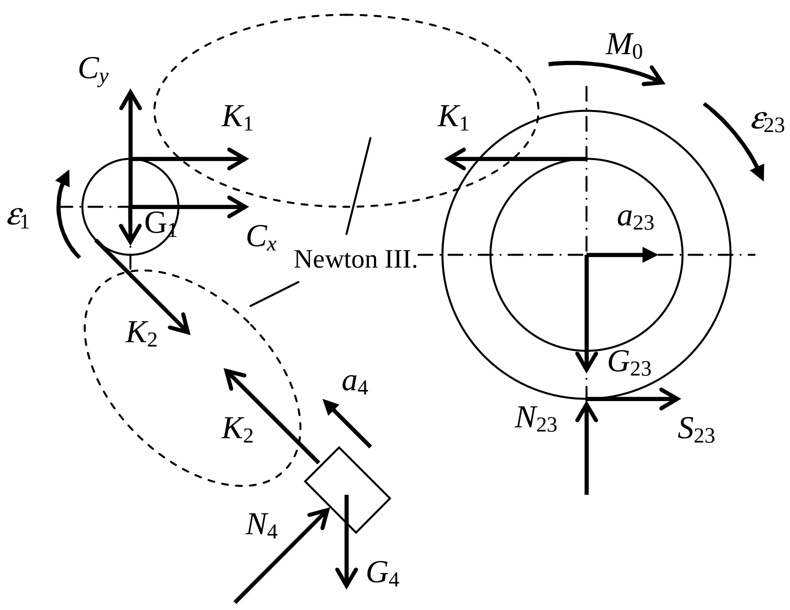
A teljesítménytételből ezúttal az ε_{23}-at a *(23)*-as forgástest szöggyorsulását kapjuk:

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot m'_{ált}\cdot\dot{q}'\cdot\ddot{q}'=Q\cdot\dot{q}'$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_{23}}}=\ddot{q}'=\frac{Q'}{m'_{ált}}=\underline{\underline{12{,}6\ [\mathrm{rad/s^2}]}}$$

5.

Szabadtest ábra:



A dinamika alaptétele *(1)*-re, a szabadtest ábrával összhangban:

I. x: $$0 = K_1 + C_x + K_2 \cdot \cos 45° \qquad (1)$$

y: $$0 = C_y - m_1 \cdot g - K_2 \cdot \sin 45° \qquad (2)$$

II. z: $$\Theta_{S1} \cdot \varepsilon_1 = K_1 \cdot r_1 - K_2 \cdot r_1 \qquad (3)$$

A dinamika alaptétele *(4)*-re, a szabadtest ábrával összhangban:

I. x: $$m_4 \cdot a_4 = K_2 - m_4 \cdot g \cdot \cos 45° \qquad (4)$$

y: $$0 = N_4 - m_4 \cdot g \cdot \sin 45° \qquad (5)$$

II. z: $$0 = 0$$

A dinamika alaptétele *(23)*-ra, a szabadtest ábrával összhangban:

I. x: $$(m_2 + m_3) \cdot a_{23} = -K_1 + S \qquad (6)$$

y: $$0 = -(m_2 + m_3) \cdot g + N_{23} \qquad (7)$$

II. z: $$\Theta_{P23} \cdot \varepsilon_{23} = M_0 - K_1 \cdot (r_2 + r_3) \qquad (8)$$

Ismeretlenek száma 11db: a_4, N_4, ε_1, C_x, C_y, K_1, K_2, a_{23}, ε_{23}, N_{23}, S_{23}.
8 egyenlet a dinamika alaptételéből, ezek mellé kapjuk a kinematikai kényszeregyenletekből az alábbi 3 egyenletet:

$$a_4 = r_1 \cdot \varepsilon_1 \qquad (9)$$

$$r_1 \cdot \varepsilon_1 = (r_2 + r_3) \cdot \varepsilon_{23} \qquad (10)$$

$$r_2 \cdot \varepsilon_{23} = a_{23} \qquad (11)$$

$$(4) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{K_2}} = m_4 \cdot (a_4 + g \cdot \cos 45°) = \underline{\underline{141{,}85 \text{ [N]}}}$$