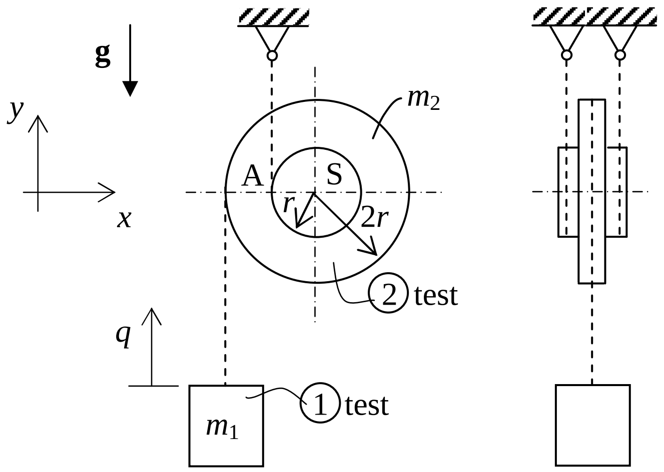
Mechanikai rendszer, síkmozgás
Teljesítménytétel 2.

A vázolt egy szabadsági fokú mechanikai rendszer a függőleges síkban a súlyerő hatására mozog. A kötél tökéletesen hajlékony, tömege elhanyagolható. A kötél a tárcsákon nem csúszik meg.



Adatok:

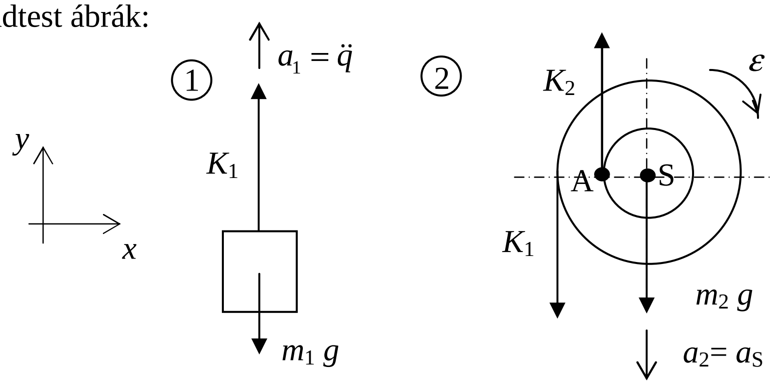
$m_1 = 5$ [kg]
$m_2 = 20$ [kg]
$\Theta_S = 0,3$ [kg/m^2]
$r = 0,1$ [m]

<u>Feladat</u>:

Határozzuk meg az 1. test gyorsulását! $a_1 = \ddot{q} = ?$

Megoldás: (a) – dinamika alaptételével

Szabadtest ábrák:



A dinamikai egyenletek a szabadtest ábrákkal összhangban:

1 test

x:
y: $m_1 a_1 = K_1 - m_1 g$ (1)
z:

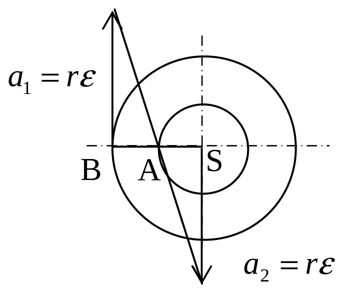
2 test

x:
y: $m_2 a_2 = K_1 + m_2 g - K_2$ (2)
z: $\Theta_a \varepsilon = m_2 g r - K_1 r$, ahol $\Theta_a = \Theta_s + m_2 r^2$ (3)

Megjegyzés: Θ_a az „A” ponton átmenő, Θ_s pedig az „S” súlyponton átmenő *z* irányú tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték,

Kinematikai feltételek: - korong gördül a kötélen: $v_A = 0$, $a_{Ay} = 0$,
- az „S” pont függőleges pályán mozog (a 2. testre csak függőleges erők hatnak): $a_{Sx} = 0$, $a_{Sy} = a_2$.

Kinematikai egyenletek:



$$\mathbf{a}_S = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AS} - \omega^2 \mathbf{r}_{AS},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -a_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\varepsilon\, r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

innen: $a_2 = r\varepsilon$,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} - \omega^2 \mathbf{r}_{AB}, \qquad \begin{bmatrix} a_{Bx} \\ a_{By} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ax} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon\, r \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{innen} \quad a_1 = a_{By} = r\varepsilon .$$

Az (1)-es és (3)-as egyenletekbe behelyettesítve:

$$m_1 a_1 = K_1 - m_1 g \qquad (4) \quad \rightarrow \quad K_1 = m_1 a_1 + m_1 g$$

$$\Theta_s \frac{a_1}{r} + m_2 r^2 \frac{a_1}{r} = m_2 g r - K_1 r \qquad (5)$$

(4)-es egyenletből K_1-et kifejezve és behelyettesítve (5)-be a_1 adódik:

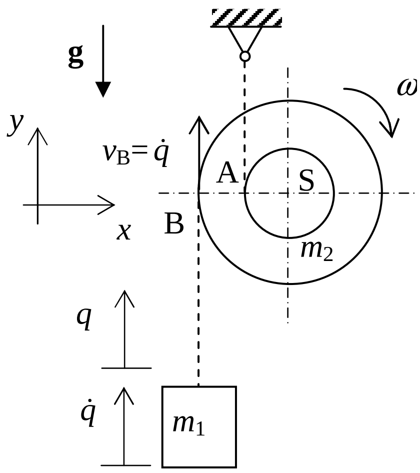
$$\Theta_s \frac{a_1}{r} + m_2 a_1 r = m_2 g r - m_1 a_1 r - m_1 g r \qquad \Big| \cdot r$$

$$\left(\Theta_s + m_2 r^2 + m_1 r^2\right) a_1 = m_2 g r^2 - m_1 g r^2$$

$$\underline{\underline{a_1}} = \frac{(m_2 - m_1) r^2}{\Theta_s + (m_2 + m_1) r^2} g = \underline{\underline{2{,}675 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]}}$$

Megoldás: (b) – teljesítménytétellel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E_{kin} = \dot{E}_{kin} = P$$



A rendszer mozgási energiája

$$E_{kin} = E_{kin1} + E_{kin2}$$

$E_{kin1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^{\,2} = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2$, ahol q az 1. test helyzetét leíró általános koordináta

$E_{kin2} = \frac{1}{2} \Theta_a \omega^2$, mivel $v_A = 0$. Itt ω a 2. test szögsebessége, és $\Theta_a = \Theta_s + m_2 r^2$.

Így: $E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \Theta_a \omega^2$.

Mivel a korong „B” pontjának sebessége egyenlő a kötél pontjainak a sebességével, és így az m_1 tömegű hasábéval is, valamint az „A” pont a korong sebességpólusa, ezért az $\dot{q}$ sebesség és az ω szögsebesség közötti kapcsolat: $\omega = \frac{\dot{q}}{r}$.

A rendszer mozgási energiája:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\left(\Theta_s + m_2 r^2\right)\left(\frac{\dot{q}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{\Theta_s}{r^2} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^2$$

A mozgási energia idő szerinti deriváltja:

$$\dot{E}_{kin} = \frac{1}{2} m_1 (2\dot{q})\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\Theta_s}{r^2}(2\dot{q})\ddot{q} + \frac{1}{2} m_2 (2\dot{q})\ddot{q} = \left(m_1 + m_2 + \frac{\Theta_s}{r^2} \right)\dot{q}\ddot{q}\,.$$

<u>A rendszer egyes elemeire ható külső és belső erők teljesítményének felírása</u>

$P = \sum_i \mathbf{F}_i \mathbf{v}_i$, ahol $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ az $\mathbf{F}_\mathrm{i}$ erő támadáspontjának sebessége.

Az 1. test sebessége:	$\mathbf{v}_1 = \dot{q}\ \mathbf{j}$,
a 2. test súlypontjának sebessége:	$\mathbf{v}_S = v_S\ \mathbf{j} = -\omega r\ \mathbf{j} = -\dot{q}\ \mathbf{j}$,
a 2. test „A” pontjának sebessége:	$\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$,
a 2. test „B” pontjának sebessége:	$\mathbf{v}_B = v_B\ \mathbf{j} = \omega r\ \mathbf{j} = \dot{q}\ \mathbf{j}$.

Az 1. testre ható nehézségi erő:	$m_1\mathbf{g} = -m_1 g\ \mathbf{j}$,	
az 1. testre ható kötélerő:	$K_1\ \mathbf{j}$,	
a 2. testre ható nehézségi erő:	$m_2\mathbf{g} = -m_2 g\ \mathbf{j}$,	
a 2. testre ható kötélerők:	$-K_1\ \mathbf{j},\quad K_2\ \mathbf{j}$	(ld. szabadtest ábrák).

A teljesítmény: $$P = m_1\mathbf{g}\ \mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{g}\ \mathbf{v}_{S2} + K_1\ \mathbf{j}\,\mathbf{v}_1 - K_1\ \mathbf{j}\,\mathbf{v}_B + K_2\ \mathbf{j}\,\mathbf{v}_A$$
$$= -m_1 g\dot{q} + m_2 g\dot{q} + K_1\dot{q} - K_1\dot{q} + K_2 0 = (m_2 - m_1)g\dot{q}$$

Megjegyzés: a belső erők (kötélerők) teljesítménye zérus, mivel:

$$K_1\ \mathbf{j}\,\mathbf{v}_1 - K_1\ \mathbf{j}\,\mathbf{v}_B + K_2\ \mathbf{j}\,\mathbf{v}_A = K_1\dot{q} - K_1\dot{q} + K_2 0 = 0\,.$$

A teljesítménytétel: $\dot{E}_{kin} = P$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{\Theta_s}{r^2} \right)\dot{q}\,\ddot{q} = (m_2 - m_1)g\dot{q}$$

Innen, mivel $\dot{q} \neq 0$: $$\underline{\underline{\ddot{q} = a_1}} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{\Theta_s}{r^2}}\, g = \frac{(m_2 + m_1)r^2}{\Theta_s + (m_2 + m_1)r^2}\, g = \underline{\underline{2{,}675 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \right]}}$$