A királykisasszony kiszabadítása a sárkány fogságából
Témakör: síkbeli dinamika

Élt egyszer, réges-régen, egy város határában lévő magas hegyen egy sárkány. Félelmetes bestia volt, megkövetelte, hogy a városból minden évben egy lányt vigyenek fel neki, akinek szörnyű kínok között kellett szenvednie a sárkány fogságában és végül elpusztulnia.

Sorra áldozták fel a városbeli lányokat. Senki nem tudta legyőzni a rettenetes sárkányt, pedig nagyon sokan megpróbálták. Végül nem maradt más lány a városban, csak a király lánya. Ő következett. Ekkor a sárkány azt mondta a királynak:

> Megmentheti a lányodat valaki, aki megfelel a következő kérdésre:
>
> > Van két egyforma méretű (átmérő: D), egyforma súlyú (G) és ugyanolyan színűre befestett golyó. Az egyik aranyból készült, a másik pedig rézből. Melyik az aranygolyó a kettő közül?

A golyókat nem lehet elvinni haza vagy laboratóriumba, ott a hegyen kell megválaszolni a kérdést. Egyetlen megengedett segédeszköz: a Kinematika és Dinamika című tárgyban foglalt ismeretanyag, valamint papír, ceruza és radír. (Számítóeszköz sem kell, mert numerikus számolásra sincsen szükség. Radír azért kell, hogy tiszta, áttekinthető legyen a munka. **A tiszta, áttekinthetően íródó kidolgozás növeli a feladatmegoldás hatékonyságát.** A zárthelyiken is jobb lenne ceruzával írni, és a hibákat, tévutakat áthuzigálás és felülírogatás helyett kiradírozással javítani.)

Megoldás:

Mivel a réz fajsúlya kisebb, mint az aranyé, az aranyból készült golyó belseje üreges kell legyen. (Az üreg gömb alakú, átmérője *d*, és középpontja egybeesik a külső gömb középpontjával.)
Azt kell tehát eldönteni, hogy a két gömb közül melyik az üreges.

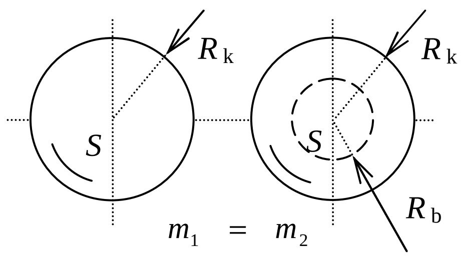
Azt kell először meggondolni, hogy mi az a mechanikai tulajdonság, ami a két azonos tömegű és azonos külső átmérőjű golyó esetén különbözik.
A fizikai testek dinamikai viselkedése függ az anyaguktól és az alakjuktól (tömeg és tehetetlenségi nyomaték). Ugyanolyan tömegű, de más tömegeloszlású testek tehetetlenségi nyomatéka különböző. Azt kell tehát kihasználni, hogy a két, látszólag egyforma golyó tehetetlenségi nyomatéka különböző.

A feladat megoldásához

1. **először** meg kell határozni mindkét test tehetetlenségi nyomatékát egy súlyponti tengelyre, hogy össze lehessen hasonlítani őket – nem elég táblázatból kiírni! (A királykisasszony kiszabadításához elegendő lenne, és a mérnöki gyakorlatban is elegendő lesz, de **a tanulási folyamat során legalább egyszer el kell végezni egy ilyen integrálást**…☺)

2. **Utána** le kell őket gurítani egy érdes lejtőről (csúszásmentesen), azonos helyről indítva, (a „*lejtőn való legurítás*”-nak megfelel a dinamikai tételek felírása: a dinamika alaptétele, vagy a munkatétel, vagy a teljesítménytétel),

3. **végül** megfigyelni, hogy melyik ér le hamarabb. (A „*megfigyelni, hogy melyik ér le hamarabb*” azt jelenti, hogy a golyók dinamikai tételekből meghatározott gyorsulásállapotának vagy a sebességállapotának összehasonlításából következtetünk arra, hogy melyik ér le hamarabb a lejtő aljára.)



$m_1 = m_2$

$D_1 = D_2$

$\rho_1 < \rho_2$

Egy R sugarú homogén, tömör gömb térfogata:

$$V = \frac{4}{3} \cdot R^3 \cdot \pi$$

Tehetetlenségi nyomatéka a súlypontján átmenő bármely tengelyre:

$$\theta_s = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$$

1.

A tömör golyó tehetetlenségi nyomatéka a súlyponton átmenő bármely tengelyre: $\theta_{s1} = \boxed{\frac{2}{5} \cdot m \cdot R_\text{k}^2}$

Az üregesé: $\theta_{s2} = \frac{2}{5}\left(m_\text{k} R_\text{k}^2 - m_\text{b} R_\text{b}^2\right) = \frac{2}{5}\rho_2 \frac{4}{3}\pi\left(R_\text{k}^3 R_\text{k}^2 - R_\text{b}^3 R_\text{b}^2\right) = \frac{8}{15}\rho_2 \cdot \pi\left(R_\text{k}^5 - R_\text{b}^5\right)$,

illetve az $m = m_\text{k} - m_\text{b} = \rho_2 \frac{4}{3}\pi\left(R_\text{k}^3 - R_\text{b}^3\right)$ tömeggel kifejezve:

$$\theta_{s2} = \frac{2}{5}\rho_2 \frac{4}{3}\pi\left(R_\text{k}^5 - R_\text{b}^5\right) = \frac{2}{5}\left(\rho_2 \frac{4}{3}\pi\left(R_\text{k}^3 - R_\text{b}^3\right)\right)\frac{R_\text{k}^5 - R_\text{b}^5}{R_\text{k}^3 - R_\text{b}^3} = \boxed{\frac{2}{5} m \frac{R_\text{k}^5 - R_\text{b}^5}{R_\text{k}^3 - R_\text{b}^3}}$$

Összehasonlítás:

$$\theta_{s1} \;<?>\; \theta_{s2}$$

$$\cancel{\frac{2}{5}} m \cdot R_\text{k}^2 \;<?>\; \cancel{\frac{2}{5}} m \frac{R_\text{k}^5 - R_\text{b}^5}{R_\text{k}^3 - R_\text{b}^3}$$

$$\cancel{R_\text{k}^5} - R_\text{b}^3 \cdot R_\text{k}^2 \;<?>\; \cancel{R_\text{k}^5} - R_\text{b}^5$$

$$R_\text{b}^5 - R_\text{b}^3 \cdot R_\text{k}^2 \;<?>\; 0$$

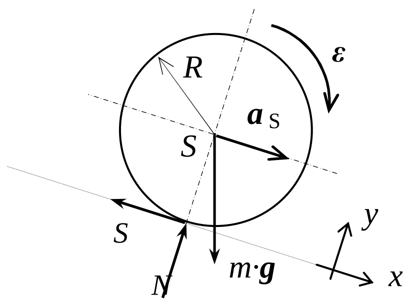
$$R_\text{b}^3 \cdot \underbrace{\left(R_\text{b}^2 - R_\text{k}^2\right)}_{\text{negatív}} \;<?>\; 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\theta_{s1} < \theta_{s2}}}$$

A tömör golyó tehetetlenségi nyomatéka kisebb, mint az ugyanolyan tömegű üregesé.

ELSŐ LEHETŐSÉG: A DINAMIKA ALAPTÉTELÉNEK ALKALMAZÁSA

2.

A dinamika alaptétele az elindulás pillanatában:



Gördülve indul álló helyzetből:
a kontaktpontban van a sebességpólus

$$\theta_p \cdot \varepsilon = m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot R$$

$$\varepsilon = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot R}{\theta_p}$$

a gördülés kinematikai feltételéből:

$$a_S = R \cdot \varepsilon$$

$$a_S = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot R^2}{\theta_p} = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot R^2}{\theta_s + m \cdot R^2}$$

3.

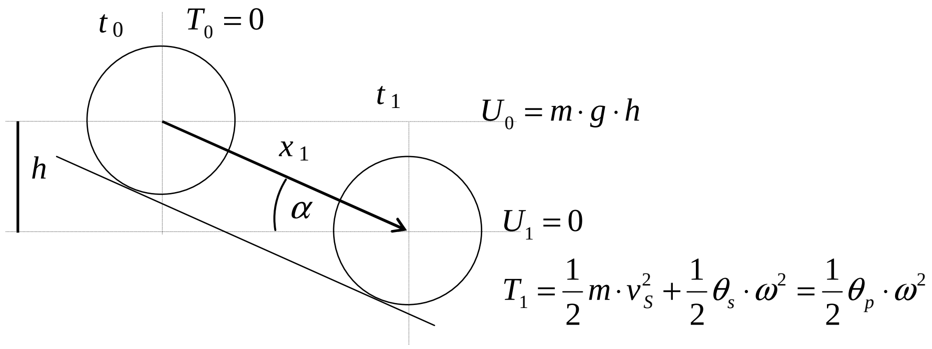
A lejtő hossza = a súlypont által megtett távolság: $x_S = \frac{a_S}{2} \cdot t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 \cdot x_S}{a_S}}$ idő alatt ér a lejtő aljára. A súlypont gyorsulásának kifejezésében minden paraméter ugyanaz a két golyóra, kivéve a nevezőben szereplő tehetetlenségi nyomaték. Amelyik golyónak nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka, annak kisebb a gyorsulása. Amelyiknek kisebb a gyorsulása, az hosszabb idő alatt ér le a lejtő aljára, mert a súlypontgyorsulás az idő kifejezésében a nevezőben szerepel. Az üreges golyónak (arany) nagyobb a tehetetlenségi nyomatéka, ezért az ér le később (lassabban) a lejtő aljára.

MÁSODIK LEHETŐSÉG: A MUNKATÉTEL ALKALMAZÁSA

2.

A munkatételt írjuk fel a lejtő tetejétől való elindulás t_0 és a leérkezés t_1 között eltelt időintervallumra: $T_1 - T_0 = W_{01}$

Segédábra a munkatételhez:



A golyóra a súlyerő és a talajról átadódó kényszererő hat. A gördülés miatt a kényszererő támadáspontjának a sebessége nulla, ezért a kényszererő nem végez munkát. A súlyerő potenciálos, munkája a potenciálkülönbséggel számítható:

$W_{01\,\text{súly}} = -(U_1 - U_0)$

ezzel a munkatétel: $T_1 - T_0 = -(U_1 - U_0)$

$\frac{1}{2} \theta_p \cdot \omega^2 - 0 = -(0 - m \cdot g \cdot h)$

$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{\theta_p}}$ a golyó szögsebessége a lejtő aljára éréskor

Mivel ω^2 és θ_p fordítottan arányosak, annak a golyónak lesz nagyobb a szögsebessége a lejtő aljára éréskor, amelyiknek kisebb a tehetetlenségi nyomatéka.

3.

a_S állandó, mert a testre ható erők állandók, ezért

$v_S = a_S \cdot t \quad \rightarrow \quad x_S = \frac{a_S}{2} \cdot t^2 = \frac{v_S}{2} \cdot t$

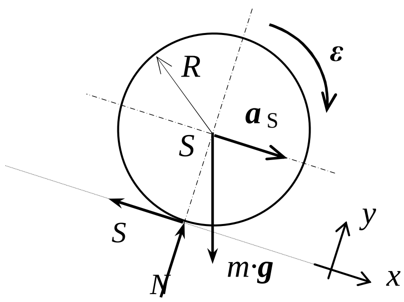
$v_S = R \cdot \omega$

$x_S = \frac{v_S}{2} \cdot t = \frac{R \cdot \omega}{2} \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{2 \cdot x_S}{R \cdot \omega}$

Mivel *t* és ω fordítottan arányosak, az a golyó ér le rövidebb idő alatt a lejtőről, amelyiknek nagyobb a szögsebessége a lejtő aljára éréskor.
Tehát a tömör golyó, vagyis a rézből készült golyó ér le hamarabb, mert a tömörnek kisebb a tehetetlenségi nyomatéka, mint az üregesnek.

HARMADIK LEHETŐSÉG: A TELJESÍTMÉNYTÉTEL ALKALMAZÁSA

2.



$\dot{T} = P$

$T = \frac{1}{2}\theta_p \cdot \omega^2$

P a testre ható összes erő teljesítményét jelenti.
A testre ható erők: a $\underline{G}$ súly és a talajról $\underline{K}$ átadódó kényszererő. Mivel a golyó gördül, a kényszererő támadáspontjában van a sebességpólus, ezért a kényszererő teljesítménye nulla. (Ha nem gördülne, akkor a mozgás nem egyszabadságfokú lenne, nem is lehetne alkalmazni a teljesítménytételt.)

$$P = \underline{G} \cdot \underline{v}_S = \begin{bmatrix} m \cdot g \cdot \sin\alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_S \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = v_S \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$\left(\frac{1}{2}\theta_p \cdot \omega^2\right)^{\bullet} = v_S \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

$$\theta_p \cdot \omega \cdot \varepsilon = v_S \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

a gördülés miatt: $v_S = R \cdot \omega$, ezzel: $\theta_p \cdot \omega \cdot \varepsilon = R \cdot \omega \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha$

$$\varepsilon = \frac{R \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha}{\theta_p}$$

Vagy másképp: a szöggyorsulás helyett a súlypont gyorsulását kifejezve:

$$\ldots\ldots a_S = \frac{R^2 \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha}{\theta_p}$$

3.

Ugyanúgy, mint a dinamika alaptételével történő megoldásnál. (ELSŐ LEHETŐSÉG)