HÁZI FELADAT
Merev test kinetika, síkmozgás
Hulahopp karika – MEGOLDÁSI SEGÉDLET

1. és 3.

Hogyan mozog a karika közvetlenül a földet érés után? Gördül vagy nem gördül?
Ennek eldöntéséhez ki kell számítani a talajjal érintkező pont (K kontaktpont) sebességét a t_0 pillanatban:

$$\underline{v}_K(t_0) = \underline{v}_S(t_0) + \underline{\omega}(t_0) \times \underline{r}_{SK}$$

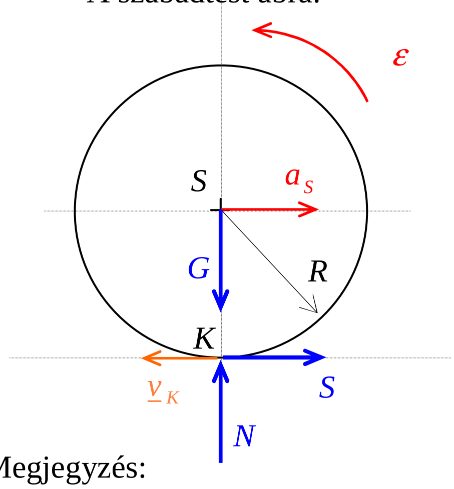
$$\underline{v}_K(t_0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0,4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$\underline{v}_K(t_0) \neq \underline{0} \;\Rightarrow\; K \neq P$, vagyis a kontaktpont nem sebességpólus.

Nem teljesül a gördülés kinematikai feltétele, tehát a karika nem gördül a t_0 pillanatban, mozgása általános síkmozgás. (Csúszik és forog.)

A t_0 utáni mozgás leírásához meg kell határozni a gyorsulásállapotot.

A szabadtest ábra:



A dinamika alaptétele:

$(1) \quad m \cdot a_S = S$

$(2) \quad 0 = N - G$

$(3) \quad \theta_s \cdot \varepsilon = S \cdot R$

A kiegészítő egyenlet:

$(4) \quad S = \mu \cdot N$ mert csúszik

Megjegyzés:

az S súrlódóerő a K pont sebességének értelmével ellentétes értelmű. Ezt figyelembe vettük a szabadtest ábra megrajzolásakor. S értelme az (1)-es jelű egyenlet szerint meghatározza a_S értelmét, és a (3)-es jelű egyenlet szerint az ε értelmét. Ennek megfelelően rajzoltuk a szabadtest ábrába a súlypont a_S gyorsulását és a test ε szöggyorsulását.

Az egyenletrendszer megoldása:

$$N = m \cdot g = 1 \cdot 9,81 = 9,81\,[\mathrm{N}]$$

$$S = \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g = 0,3 \cdot 9,81 = 2,943\,[\mathrm{N}]$$

$$a_S = \frac{S}{m} = \frac{\mu \cdot m \cdot g}{m} = \mu \cdot g = 2,943 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$\varepsilon = \frac{S \cdot R}{\theta_s} = \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot R}{m \cdot R^2} = \frac{\mu \cdot g}{R} = \frac{0,3 \cdot 9,81}{0,4} = 7,3575 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

a_S és ε állandók, ameddig a kontakterő állandó. A kontakterő addig állandó, ameddig nem változik meg a mozgás jellege. A mozgás jellege akkor változik meg, amikor a karika gördülni kezd. A karika akkor kezd gördülni, amikor a kontaktpont sebessége nullává válik.
A kontaktpont sebességének változása a talajt érés után:

$$\underline{v}_K(t) = \underline{v}_S(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_{SK}$$

$$\underline{v}_K(t) = \begin{bmatrix} v_S(t_0) + a_S \cdot t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t_0) + \varepsilon \cdot t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_K(t) = \begin{bmatrix} -2 + 2,943 \cdot t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 + 7,36 \cdot t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0,4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2,943 \cdot t + 0,4 \cdot (-8 + 7,36 \cdot t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_K(t = t_g) = \underline{0}$$

$$0 = -2 + 2,943 \cdot t + 0,4 \cdot (-8 + 7,36 \cdot t) \quad \rightarrow \quad t_g = 0,883\,[\mathrm{s}] \quad \text{ekkor kezd gördülni}$$

$$x(t) = v_S(t_0) \cdot t + a_S \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$x(t_g) = v_S(t_0) \cdot t_g + a_S \cdot \frac{t_g^2}{2} = -2 \cdot 0,883 + 2,943 \cdot \frac{0,883^2}{2} = -0,618\,[\mathrm{m}]$$

ezen a helyen kezd gördülni

Mivel a talajt érés pillanatában a súlypont sebességének és a szögsebességnek az értelme ellentétes, (balra mozog a súlypont és jobbra forog a kerék: ilyen irányokkal nem lehetséges gördülés), a karikának vagy forgásirányt, vagy haladási irányt kell váltania, mielőtt elkezd gördülni.

A forgás iránya akkor fordul meg, amikor a szögsebesség nullává válik. A szögsebesség változása a földet érés után:

$$\underline{\omega}(t) = \underline{\omega}(t_0) + \underline{\varepsilon} \cdot t$$

$$\underline{\omega}(t = t_f) = \underline{0}$$

$$-8 + 7,36 \cdot t_f = 0 \quad \rightarrow \quad t_f = 1,087\,[\mathrm{s}] \quad \text{forgásirányváltás}$$

Hasonlóan, a súlypont mozgásának iránya akkor fordul meg, amikor a súlypont sebessége nullává válik. A súlypont sebességének változása a földet érés után:

$$\underline{v}_S(t) = \underline{v}_S(t_0) + \underline{a}_S \cdot t$$

$$\underline{v}_S(t = t_h) = \underline{0}$$

$$-2 + 2,943 \cdot t_h = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = 0,679\,[\mathrm{s}] \quad \text{a súlypont mozgásának irányváltása}$$

$$x(t) = v_S(t_0) \cdot t + a_S \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$x(t_h) = v_S(t_0) \cdot t_h + a_S \cdot \frac{t_h^2}{2} = -2 \cdot 0,679 + 2,943 \cdot \frac{0,679^2}{2} = -0,679\,[\mathrm{m}]$$

ezen a helyen fordul meg a súlypont mozgásának iránya

Forgásirányt nem vált, mert előbb elkezd gördülni: $t_g < t_f$.

2.

Gördülés:

$$\underline{v}_K = \underline{0} = \underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_{SK}$$

$$\underline{v}_S = \underline{\omega} \times \underline{r}_{KS}$$

$$\underline{v}_S(t_0) + \underline{a}_S \cdot t = \left(\underline{\omega}(t_0) + \underline{\varepsilon} \cdot t\right) \times \underline{r}_{KS}$$

$$\begin{bmatrix} -v_{S0} + a_S \cdot t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_0 + \varepsilon \cdot t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-v_{S0} + a_S \cdot t = \left(\omega_0 - \varepsilon \cdot t\right) \cdot R \quad \rightarrow \quad t_g = \frac{R \cdot \omega_0 + v_{S0}}{R \cdot \varepsilon + a_S} = \frac{R \cdot \omega_0 + v_{S0}}{R \cdot \frac{\mu \cdot g}{R} + \mu \cdot g} = \frac{R \cdot \omega_0 + v_{S0}}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

A súlypont mozgásának irányváltása: (haladási irányváltás)

$$\underline{v}_S(t) = \underline{v}_S(t_0) + \underline{a}_S \cdot t = \underline{0}$$

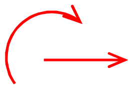
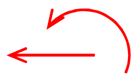
$$-v_{S0} + a_S \cdot t = 0 \quad \rightarrow \quad t_h = \frac{v_{S0}}{a_S} = \frac{v_{S0}}{\mu \cdot g}$$

A karika forgásának irányváltása: (forgásirányváltás)

$$\underline{\omega}(t) = \underline{\omega}(t_0) + \underline{\varepsilon} \cdot t = \underline{0}$$

$$\omega(t) = -\omega_0 + \varepsilon \cdot t = 0 \quad \rightarrow \quad t_f = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{\omega_0 \cdot R}{\mu \cdot g}$$

A gördülés kinematikai feltétele a súlypont sebességének és a karika szögsebességének egymáshoz képesti ***irányát*** is megszabja:

vagy jobbra,  vagy balra  mutat mindkettő.

Mivel talajt érés után a karika súlypontjának mozgásiránya és a forgásiránya ellentétes, nem tud gördülni, amíg ***vagy*** a haladási irány, ***vagy*** a forgásirány meg nem fordul.

Annak feltétele, hogy a tornászlány által eldobott karika visszaguruljon hozzá, az, hogy a karika előbb váltson haladási irányt, mint forgásirányt:

$$t_h < t_f \quad \rightarrow \quad v_{S0} < R \cdot \omega_0 .$$

Megfordulhat-e a karika forgásiránya is, mielőtt elkezd gördülni?

$$t_g < t_f \ ?$$

$$\frac{R \cdot \omega_0 + v_{S0}}{2 \cdot \mu \cdot g} < \frac{\omega_0 \cdot R}{\mu \cdot g} \quad \rightarrow \quad v_{S0} < R \cdot \omega_0$$

Ha $t_h < t_f$, akkor a karika nem fog forgásirányt váltani, mert bekövetkezik a gördülés, mielőtt forgásirányt válthatna. Ugyanis $t_h < t_f$ ugyanazt a feltételt adja a súlypontsebesség és a szögsebesség kapcsolatára, mint $t_g < t_f$. Így valóban visszagurul a karika a tornászlányhoz.

Hasonló gondolatmenettel: ha $t_f < t_h$, vagyis ha forgásirányt vált előbb, akkor a gördülés előbb bekövetkezik, mielőtt haladási irányt is válthatna. Ekkor a karika nem fog visszagurulni a tornászlányhoz, hanem a gördülés beállta után tovább távolodik tőle.

4.

A sebességállapot gördüléskor:

$$\underline{v}_S(t_g) = \underline{v}_S(t_0) + \underline{a}_S \cdot t_g$$

$$v_S(t_g) = -2 + 2{,}943 \cdot 0{,}883 = 0{,}6 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \quad \text{jobbra}$$

$$\underline{\omega}(t_g) = \underline{\omega}(t_0) + \underline{\varepsilon} \cdot t_g$$

$$\omega(t_g) - 8 + 7{,}36 \cdot 0{,}883 = -1{,}5 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] \quad \text{jobbra}$$

5.

A talajt éréstől a gördülés kezdetéig a testre ható erőrendszer és a gyorsulásállapot állandó. A $t \in [t_0, t_g]$ intervallumra a dinamika alaptételének az **1.** pontban felírt egyenletei vonatkoznak. A karikára a $t \in [t_0, t_g]$ intervallumban tehát az ott kiszámított kényszererő hat:

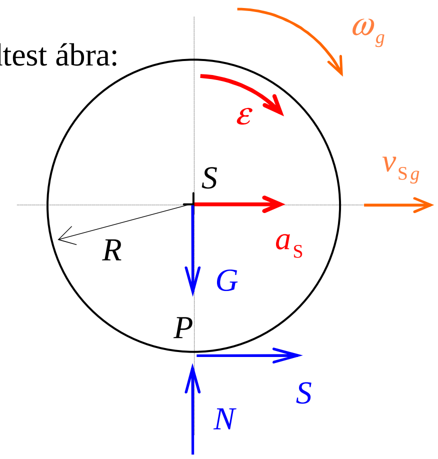
a talajt érés után, a gördülés kezdetéig: $\underline{K} = \begin{bmatrix} 2{,}943 \\ 9{,}81 \end{bmatrix}_{x,y} [\mathrm{N}]$

Gördüléskor, $t > t_g$ esetén a testre csak a súlyerő és a vele egyensúlyt tartó normálerő hat:

a gördülés beállta után: $\underline{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9{,}81 \end{bmatrix}_{x,y} [\mathrm{N}]$

Ugyanis:

Szabadtest ábra:



A dinamika alaptételének skaláregyenletei:

(1) $m \cdot a_S = S$

(2) $0 = -G + N$

(3) $\theta_p \cdot \varepsilon = 0$

A kiegészítő egyenlet: tudjuk, hogy gördül,

mert $v_{Sg} = R \cdot \omega_g$

(4) $a_S = R \cdot \varepsilon$

Az egyenletrendszer megoldása:

(3) $\Rightarrow$ $\varepsilon = 0$, (4) $\Rightarrow$ $a_s = 0$, (1) $\Rightarrow$ $S = 0$ (2) $\Rightarrow$ $N = m \cdot g$

Ez azt jelenti, hogy a magára hagyott, vízszintes síkon gördülő kerékre csak a súlyerő és függőleges kényszererő hat. Nincs súrlódóerő. Mivel $\underline{a}_S = \underline{0}$ és $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$, ezért $\underline{v}_S$ és $\underline{\omega}$ állandók. Vagyis a kerék egyenletesen gurul a végtelenségig a t_g időpontban elért sebességállapotában. **Ez a tapasztalatnak ellentmondó eredmény a merev test modell korlátaira mutat rá.** A kerék és az alátét érintkezése merev test modellel pontszerű, emiatt a sebességpóluson átmenő tengelyre nulla a testre ható erők nyomatéka. Emiatt nincs szöggyorsulás, nincs gyorsulása a súlypontnak és nincs súrlódóerő.

1. Megjegyzés:
Már a szabadtest ábra felrajzolásakor is látszik, hogy $S = 0$, mert akár balra, akár jobbra mutatónak rajzoljuk, az (1)-es és a (4)-es egyenletek ellentmondanak egymásnak.

2. Megjegyzés:
A valósághoz közelebb álló eredményeket kapunk a gördülési ellenállás fogalmának a bevezetésével.

6.

Amikor a karika gördül, akkor nyugvásbeli súrlódás van a karika és a talaj között, mert az érintkezési pontban van a sebességpólus. A kontakterő víszintes komponense a súrlódóerő, a támadáspont sebessége nulla, ezért a súrlódóerő által végzett mechanikai munka nulla.
Ezért a súrlódóerő által végzett mechanikai munkát a talajt érés pillanata és a gördülés kezdete közötti intervallumban számítjuk.

Amikor a karika nem gördül, akkor a kontaktpont sebessége nem nulla, mozgásbeli súrlódás van a karika és a talaj között. A súrlódóerő által végzett mechanikai munka a $\left[t_0,\ t_g\right]$ intervallumban a munka definíciója alapján:

$$W_{súrl} = \int_{t_0}^{t_g} \underline{S} \cdot \underline{v}_K \, dt$$

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} 2,943 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{N}]$$

$$\underline{v}_K(t) = \underline{v}_S(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_{SK}$$

$$\underline{v}_K(t) = \begin{bmatrix} v_S(t_0) + a_S \cdot t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(t_0) + \varepsilon \cdot t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_K(t) = \begin{bmatrix} -2 + 2,943 \cdot t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 + 7,36 \cdot t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0,4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 2,943 \cdot t + 0,4 \cdot (-8 + 7,36 \cdot t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_K(t) = \begin{bmatrix} -5,2+5,886\cdot t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_{súrl} = \int_{t_0}^{t_g} \underline{S}\cdot\underline{v}_K\, dt = \int_{t_0}^{t_g} 2,943\cdot(-5,2+5,886\cdot t)\,dt = \int_{t_0=0}^{t_g=0,883} (-15,3+17,32\cdot t)\,dt = -6,76\,[\mathrm{Nm}]$$

Másképp:

A munkatétel a $[t_0,\ t_g]$ intervallumra:

Csak a súrlódóerő végez munkát, mert a súlyerő és a normálerő merőlegesek a támadáspontjuk sebességére, így a munkájuk nulla.

$$T(t_g)-T(t_0)=W_{súrl}$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot 0,6^2+\frac{1}{2}\cdot\theta_s\cdot 1,5^2\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot m\cdot 2^2+\frac{1}{2}\cdot\theta_s\cdot 8^2\right)=-6,76\,[\mathrm{Nm}]$$