Merev test kinetika, síkmozgás
Hajtott kerék mozgása

$m = 2\,[\mathrm{kg}]$ a kerék tömege

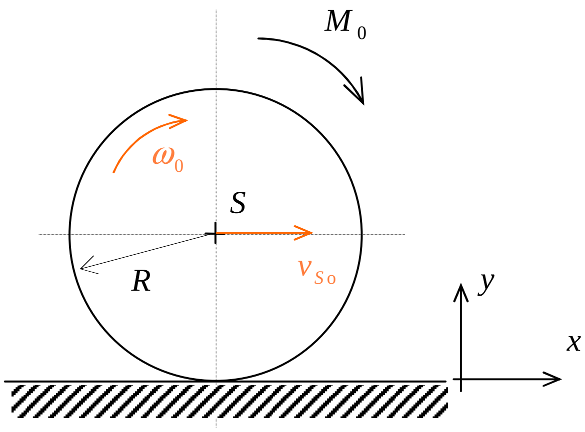
$R = 0{,}1\,[\mathrm{m}]$ a kerék sugara

$M_0 = 1\,[\mathrm{Nm}]$ nyomaték

$\mu = 0{,}1$ mozgásbeli súrlódási tényező

$\mu_0 = 0{,}2$ nyugvásbeli súrlódási tényező

$\omega_0 = 2\,[\mathrm{rad/s}]$ szögsebesség



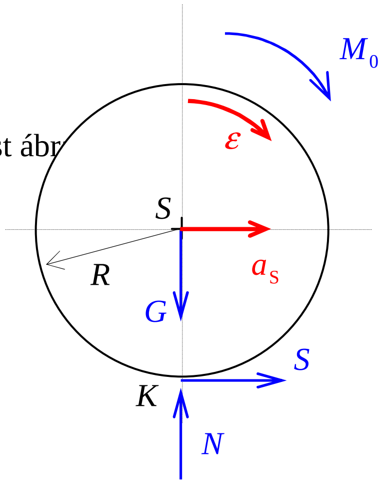
A vázolt homogén tömegeloszlású kerék ω_0 szögsebességgel gördül vízszintes, érdes talajon. A $t_0 = 0\,[\mathrm{s}]$ időpontban M_0 nyomaték kezd működni a kerékre.

1. Határozzuk meg, hogy a kerék megcsúszik-e. Számítsuk ki a gyorsulásállapotát megadó mennyiségeket, valamint a talajról a kerékre átadódó kényszererőt abban a pillanatban, amikor az M_0 nyomaték elkezd működni a kerékre.
2. Számítsuk ki a kerék mozgási energiáját a $t_1 = 2\,[\mathrm{s}]$ időpillanatban.
3. A $t_1 = 2\,[\mathrm{s}]$ időpillanatban megszűnik az M_0 nyomaték, utána a kerék szabadon mozog tovább az érdes, vízszintes síkon. Határozzuk meg, hogy fog-e gördülni a kerék. Ha igen, mikor és hol (mekkora távolságot tesz meg a súlypont a gördülésig).
4. Határozzuk meg, hogy hogyan mozog a kerék tovább, és milyen erők hatnak rá a gördülés újbóli beállta után.

Megoldás:

1. Megcsúszik-e a kerék?

A szabadtest ábr



Feltételezzük, hogy a kerék nem csúszik meg, hanem gördül.

Ha gördül, akkor a *K* kontaktpontban van a *P* sebességpólus. (*P* = *K*)

A dinamika alaptétele a szabadtest ábrával összhangban:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & m\cdot a_S = S \\ (2) & 0 = -G + N \\ (3) & \theta_s\cdot\varepsilon = M_0 - S\cdot R \quad \text{vagy} \quad \theta_p\cdot\varepsilon = M_0 \end{array}\right\}$$ három egyenlet, négy ismeretlen: $a_S,\ \varepsilon,\ N,\ S$

Kiegészítő egyenlet: gördülés esetén a súlypont gyorsulása és a kerék szöggyorsulása közötti összefüggés: (a ***gördülés kinematikai feltételéből***)

(4) $a_S = R\cdot\varepsilon$

A négy egyenletből álló egyenletrendszerben négy ismeretlen van: $a_S,\ \varepsilon,\ N,\ S$
Az egyenletrendszerből kifejezzük a kényszererő két komponensét, és ellenőrizzük, hogy teljesül-e a ***gördülés dinamikai feltétele***:

$$\frac{S}{N} \le \mu_0\ ?$$

Ha teljesül, akkor a fenti egyenletrendszerből kiszámítható $a_S,\ \varepsilon,\ N,\ S$ értékek a feladat megoldását adják, és a kerék mozgása gördülés.
Példánkban $\frac{S}{N} = \frac{2\cdot M_0}{3\cdot R\cdot m\cdot g} = 0{,}34\ >\ 0{,}2 = \mu_0$, nem teljesül a gördülés dinamikai feltétele.

Mostmár tudjuk, hogy ***hogyan*** mozog a kerék: megcsúszik. Mozgása általános síkmozgás, ***forog és csúszik*** egyszerre.

A kényszererő és a gyorsulásállapot meghatározásához új egyenletrendszert kell felírni.
A dinamika alaptételének fenti három skaláregyenlete most is érvényes[1], de a (4)-es jelű kiegészítő egyenlet nem. Helyette – mivel mostmár tudjuk, hogy a kerék csúszik, vagyis a talajjal érintkező pontjának nem nulla a sebessége, nem nyugvásbeli, hanem mozgásbeli súrlódás van a kontaktpontban a kerék talajjal érintkező pontja és a talaj között – a kényszererőnek a két érintkező

[1] A (3)-as egyenletben csak a súlyponton átmenő tengelyre írható fel a „kinetikai nyomaték = nyomatékösszeg”, hiszen a kontaktpont most nem sebességpólus. Ha gördül a kerék, akkor a kontaktpontban van a sebességpólus, és tetszés szerint felírható az egyenlet akár a súlyponti *s* tengelyre, akár a sebességpóluson átmenő, a mozgás síkjára merőleges *p* tengelyre. Ha nem gördül, akkor csak a súlyponti tengelyre felírt egyenlet használható.

test közös érintősíkjába eső és arra merőleges komponenseire (a súrlódóerőre és a normálerőre) vonatkozó kapcsolatot írjuk fel:

(1) $m \cdot a_S = S$

(2) $0 = -G + N$

(3) $\theta_s \cdot \varepsilon = M_0 - S \cdot R$

(4) $\cancel{a_S = R \cdot \varepsilon}$ helyette: $S = \mu \cdot N$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$N = m \cdot g = 19,62\,[\mathrm{N}]\ \uparrow$$

$$S = \mu \cdot N = 1,962\,[\mathrm{N}] \rightarrow$$

$$a_S = \frac{S}{N} = 0,98\left[\mathrm{m/s^2}\right] \rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{M_0 - S \cdot R}{\theta_s} = 80,4\left[\mathrm{rad/s^2}\right]$$

A kerék mozgásállapota a $t = t_0$ időpillanatban:

Sebességállapot: a nyomaték ráhelyezése előtt gödült: $v_{S0} = R \cdot \omega = 0,1 \cdot 2 = 0,2\,[\mathrm{m/s}]$

A sebesség a nyomaték hatására nem változik meg ugrásszerűen, ezért:

$$\underline{v}_S(t_0) = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad \underline{\omega}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$

A gyorsulásállapot[2] a dinamika alaptételéből:

$$\underline{a}_S = \begin{bmatrix} 0,98 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}\right] \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -80,4 \end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s^2}}\right]$$

A kerékre ható kényszererő: $\underline{K} = \begin{bmatrix} -1,962 \\ 19,62 \\ 0 \end{bmatrix}[\mathrm{N}]$

[2] Nem tudjuk, milyen volt a kerék gyorsulásállapota t_0 előtt, de nem is érdekes, mert a feladatban megfogalmazott kérdések szempontjából közömbös. A mozgást a nyomaték ráhelyezése **után** kezdjük vizsgálni, és a nyomaték ráhelyezése ugrásszerűen megváltoztatja a korábbi gyorsulásállapotot.

2. A mozgási energia értékének kiszámítása a $t=t_1$ időpillanatban

A mozgási energia képlete a test egy tehetetlenségi fősíkjával párhuzamos síkban történő síkmozgás esetén:

$$T=\frac{1}{2}m\cdot v_S^2+\frac{1}{2}\theta_s\cdot\omega^2$$

Alkalmazzuk a kerékre a $t=t_1$ időpillanatban:
ha a súlypont gyorsulása, $\underline{a}_S$ és a kerék szöggyorsulása, $\underline{\varepsilon}$ állandó a $t\in\left[t_0,t_1\right]$ intervallumban, akkor a súlypont sebessége és a szögsebesség a $t=t_1$ időpillanatban az alábbi módon számítható :

$$\underline{v}_S(t_1)=\underline{v}_S(t_0)+\underline{a}_S\cdot(t_1-t_0)$$

$$\underline{v}_S(t_1)=\begin{bmatrix}0,2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0,981\\0\\0\end{bmatrix}\cdot 2=\begin{bmatrix}2,162\\0\\0\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$\underline{\omega}(t_1)=\underline{\omega}(t_0)+\underline{\varepsilon}\cdot(t_1-t_0)$$

$$\underline{\omega}(t_1)=\begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\-80,4\end{bmatrix}\cdot 2=\begin{bmatrix}0\\0\\-162,8\end{bmatrix}\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$

Ellenőrizni kell, hogy $\underline{a}_S$ és $\underline{\varepsilon}$ állandó-e a $t\in\left[t_0,t_1\right]$ intervallumban.
$\underline{a}_S$ és $\underline{\varepsilon}$ akkor állandók, ha a testre ható erőrendszer tagjai állandók. A testre ható erőrendszer tagjai addig állandók, amíg a mozgás jellege nem változik meg. A kerék t_0-kor csúszik és forog. Elkezd-e gördülni t_1 előtt?

Tegyük fel, hogy a kerék a $t=t^*$, $t^*\in\left[t_0,t_1\right]$ időpontban gördülni kezd. Amikor gördülni kezd, akkor teljesül a gördülés kinematikai feltétele: $v_S(t^*)=R\cdot\omega(t^*)$:

$$v_{S0}+a_S\cdot t^*=R\cdot\left(\omega_0+\varepsilon\cdot t^*\right)$$

$$v_{S0}-R\cdot\omega_0=\left(a_S-R\cdot\varepsilon\right)\cdot t^*$$

A fenti egyenletet csak a $t^*=0$ elégíti ki, mert $v_{S0}-R\cdot\omega_0=0$, és $a_S-R\cdot\varepsilon\neq 0$.
Tehát a kerék nem fog gördülni a t_0 időpont után, amíg hat rá az M_0 nyomaték. A mozgási energia kifejezésében szereplő $\underline{v}_S(t_1)$ és $\underline{\omega}(t_1)$ valóban a fent kiszámított.

Ezzel a mozgási energia:

$$T\left(t_1\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2{,}162^2+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0{,}1^2\right)\cdot 162{,}76^2=137{,}13\left[\mathrm{Nm}\right]$$

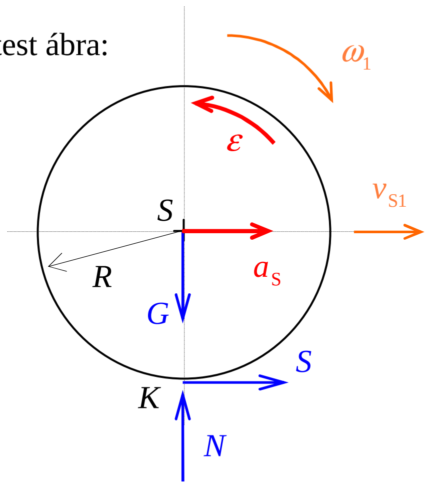
3. A kerék mozgásának vizsgálata az M_0 nyomaték megszűnése után

A $t_1 = 2[\mathrm{s}]$ időpillanatban a kerék sebességállapota ugyanaz, mint a nyomaték megszűnése előtt:

$$\underline{v}_S(t_1) = \begin{bmatrix} 2{,}162 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad \underline{\omega}(t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -162{,}8 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$

Gyorsulásállapota t_1-kor ugrásszerűen megváltozik, mert a rá ható erőrendszer ugrásszerűen megváltozik t_1-kor. A dinamika alaptételéből lehet meghatározni a súlypont gyorsulását és a kerék szöggyorsulását a nyomaték megszűnése után:

Szabadtest ábra:



A dinamika alaptételének skaláregyenletei:

(1) $m \cdot a_S = S$

(2) $0 = -G + N$

(3) $\theta_s \cdot \varepsilon = S \cdot R$

A kiegészítő egyenlet: tudjuk, hogy nem gördül, mert $v_{S1} \neq R \cdot \omega_1$

(4) $S = \mu \cdot N$

Megjegyzés:

ha a kerék csúszik, akkor a szabadtest ábrában a súrlódóerő irányát úgy kell felvenni, hogy az ellentétes értelmű legyen a kerék talajjal érintkező pontjának a sebességével.

$$\underline{v}_K = \underline{v}_S + \underline{\omega} \times \underline{r}_{SK}$$

$$\underline{v}_K = \begin{bmatrix} 2{,}162 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -162{,}76 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14{,}114 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right] \qquad v_K \leftarrow \qquad \Rightarrow S \rightarrow$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$N = m \cdot g$$

$$S = \mu \cdot m \cdot g$$

$$a_S = \frac{S}{m} = 0{,}981 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \qquad \underline{a}_S = \begin{bmatrix} 0{,}981 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 19{,}62 \end{bmatrix} \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$\varepsilon = \frac{S \cdot R}{\theta_s} = 19{,}62 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

A kerék t_1 után ezzel a súlypontgyorsulással és szöggyorsulással mozog, a súlyerő és a talajról átadódó kényszererő hatására. $\underline{a}_S$ és $\underline{\varepsilon}$ állandó marad, amíg nem kezd gördülni a kerék.

A súlypont sebességének és a kerék szögsebeségének a változása t_1 után:

$$\underline{v}_S(t) = \underline{v}_S(t_1) + \underline{a}_S \cdot (t - t_1) \qquad \underline{\omega}(t) = \underline{\omega}(t_1) + \underline{\varepsilon} \cdot (t - t_1)$$

$$\underline{v}_S(t) = \begin{bmatrix} 2,162 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,981 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (t - t_1) \qquad \underline{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 19,62 \end{bmatrix} \cdot (t - t_1)$$

A kerék gördülni fog, ha van olyan $t_g > t_1$, amikor teljesül a gördülés kinematikai feltétele, vagyis a talajjal érintkező pontban van a sebességpólus:

$$\underline{v}_P(t_g) = \underline{0} = \underline{v}_S(t_g) + \underline{\omega}(t_g) \times \underline{r}_{SP}$$

$$\underline{0} = \underline{v}_S(t_1) + \underline{a}_S \cdot (t_g - t_1) + \left(\underline{\omega}(t_1) + \underline{\varepsilon} \cdot (t_g - t_1)\right) \times \underline{r}_{SP}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,162 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,981 \cdot (t_g - t_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -162,76 + 19,62 \cdot (t_g - t_1) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -0,1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

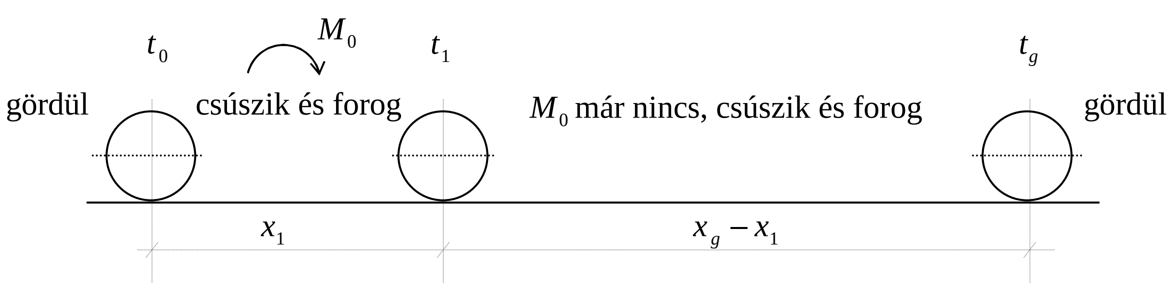
$$0 = 2,162 + 0,981 \cdot (t_g - 2) - 16,276 + 1,962 \cdot (t_g - 2) \qquad \rightarrow \qquad t_g = 6,796 [\mathrm{s}]$$

A súlypont helyzete a $t \in [t_0, t_1]$ intervallum végén:

$$\underline{x}_S(t_1) = \underline{v}_S(t_0) \cdot (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \underline{a}_S \cdot (t_1 - t_0)^2 = \left(0,2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0,981 \cdot (2 - 0)^2\right) \cdot \underline{i} = 2,362 \cdot \underline{i} \ [\mathrm{m}]$$

A súlypont helyzete a $t \in [t_1, t_g]$ intervallum végén:

$$\underline{x}_S(t_g) = \underline{v}_S(t_1) \cdot (t_g - t_1) + \frac{1}{2} \cdot \underline{a}_S \cdot (t_g - t_1)^2 = \left(2,162 \cdot 4,796 + \frac{1}{2} \cdot 0,981 \cdot 4,796^2\right) \cdot \underline{i} = 24,013 \cdot \underline{i} \ [\mathrm{m}]$$



4. A kerék mozgása a gördülés újbóli beállta után:

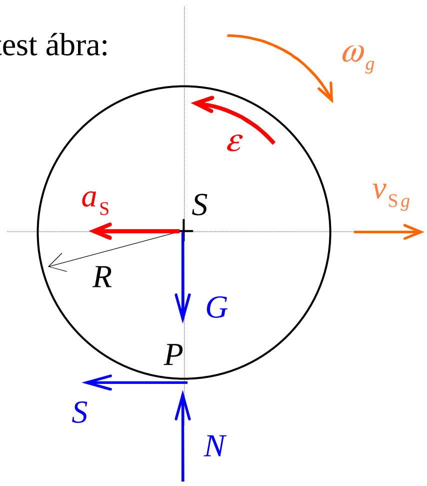
A kerék sebességállapota a $t = t_g$ pillanatban:

$$\underline{v}_S(t_g) = \underline{v}_S(t_1) + \underline{a}_S \cdot (t_g - t_1) \qquad \underline{\omega}(t_g) = \underline{\omega}(t_1) + \underline{\varepsilon} \cdot (t_g - t_1)$$

$$\underline{v}_S(t_g) = \begin{bmatrix} 2{,}162 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}981 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 4{,}796 \qquad \underline{\omega}(t_g) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -162{,}76 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 19{,}62 \end{bmatrix} \cdot 4{,}796$$

$$\underline{v}_S(t_g) = \begin{bmatrix} 6{,}87 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right] \qquad \underline{\omega}(t_g) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -68{,}66 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

Szabadtest ábra:



A dinamika alaptételének skaláregyenletei:

(1) $m \cdot a_S = S$

(2) $0 = -G + N$

(3) $\theta_p \cdot \varepsilon = 0$

A kiegészítő egyenlet: tudjuk, hogy gördül, mert $v_{Sg} = R \cdot \omega_g$

(4) $a_S = R \cdot \varepsilon$

Az egyenletrendszer megoldása:

(3) $\Rightarrow$ $\varepsilon = 0$, (4) $\Rightarrow$ $a_s = 0$, (1) $\Rightarrow$ $S = 0$ (2) $\Rightarrow$ $N = m \cdot g$

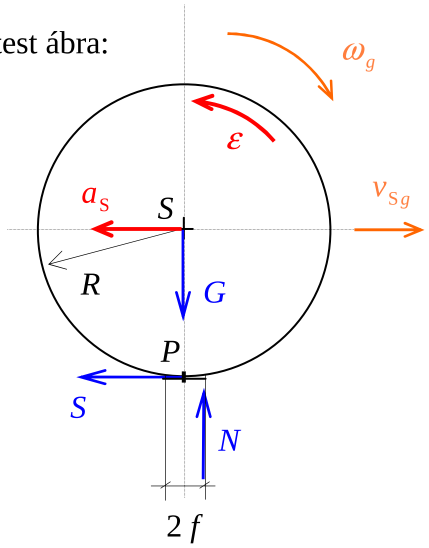
Ez azt jelenti, hogy a magára hagyott, vízszintes síkon gördülő kerékre csak a súlyerő és függőleges kényszererő hat. Nincs súrlódóerő. Mivel $\underline{a}_S = \underline{0}$ és $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$, ezért $\underline{v}_S$ és $\underline{\omega}$ állandók. Vagyis a kerék egyenletesen gurul a végtelenségig a t_g időpontban elért sebességállapotában. **Ez a tapasztalatnak ellentmondó eredmény a merev test modell korlátaira mutat rá.** A kerék és az alátét érintkezése merev test modellel pontszerű, emiatt a sebességpóluson átmenő tengelyre nulla a testre ható erők nyomatéka. Emiatt nincs szöggyorsulás, nincs gyorsulása a súlypontnak és nincs súrlódóerő.

A valóságot jobban közelítő eredményt kapunk a gördülési ellenállás bevezetésével.

Gördülési ellenállás

Az érintkezési hely nem pontszerű, a normálerő támadáspontja kissé eltolódik a kerék mozgási irányába, ami a póluspontton átmenő tengelyre a szögsebességgel ellentétes értelmű nyomatékot ad.

Szabadtest ábra:



A dinamika alaptételének skaláregyenletei:

(1) $m \cdot a_S = S$

(2) $0 = -G + N$

(3) $\theta_p \cdot \varepsilon = N \cdot f$

(f neve: a gördülési ellenállás karja)

a kiegészítő egyenlet:

(4) $a_S = R \cdot \varepsilon$ mert gördül

Az egyenletrendszer megoldása:

$$(3) \rightarrow \varepsilon = \frac{N \cdot f}{\theta_p}$$

$$(4) \rightarrow a_S = R \cdot \frac{N \cdot f}{\theta_p}$$

$$(1) \rightarrow S = m \cdot R \cdot \frac{N \cdot f}{\theta_p}$$

$$(2) \rightarrow N = m \cdot g$$

A kerék meg fog állni:

$$v_S(t) = 0 = v_{Sg} - a_S \cdot t \rightarrow t = \frac{v_{Sg}}{a_S} = \frac{v_{Sg} \cdot \theta_p}{R \cdot m \cdot g \cdot f}$$ idő múlva.