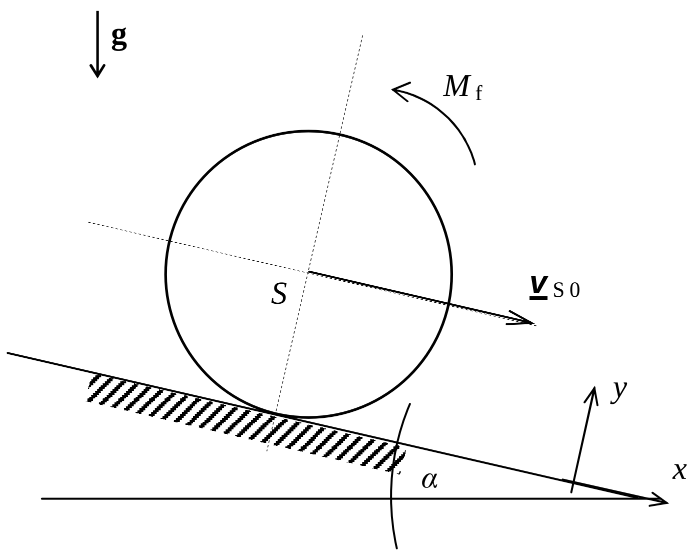
Merev test kinetika, síkmozgás
Lejtőn mozgó jármű kerekének fékezése

Egy jármű lejtős úton halad lefelé. A kerekek gördülnek. A vizsgált kerék (tömege m, sugara R, homogén) súlypontjának sebessége t_0-kor $\underline{v}_{S\,0}$. A kocsiszekrény súlyából a kerékre jutó terhelés F_t (függőlegesen).

A vázolt kereket a t_0 időpillanatban M_f állandó nagyságú nyomaték kezdi fékezni.
A kerék és a talaj érintkezésénél a mozgásbeli súrlódási tényező μ, a nyugvásbeli súrlódási tényező pedig μ_0.

α = 12 [°]
m = 15 [kg
R = 0,3 [m]
$v_{S\,0}$ = 15 [m/s]
F_t = 0,5 [kN]
M_f = 60 [Nm]
μ = 0,2
μ_0 = 0,32

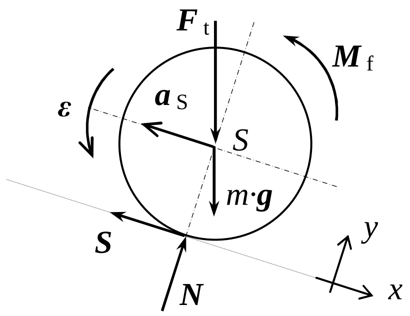


1. Állapítsuk meg, hogy a kerék megcsúszik-e a fékezés hatására.
2. Mekkora lehet a fékező nyomaték legnagyobb értéke, ha el akarjuk kerülni a kerék megcsúszását?
3. M_f = 60 [Nm] nagyságú fékező nyomaték esetén mennyi idő múlva áll meg a kerék?
4. Mennyi mechanikai energia kellett a kerék teljes lefékezéséhez? (a veszteségektől eltekintünk.)

Megoldás:

1.

Szabadtest ábra:



A dinamika alaptétele a szabadtest ábra alapján, a ***gördülés feltételezésével***:

$$m \cdot a_S = S - (F_t + m \cdot g) \cdot \sin\alpha \qquad (1)$$

$$0 = N - (F_t + m \cdot g) \cdot \cos\alpha \qquad (2)$$

$$\theta_p \cdot \varepsilon = M_f - (F_t + m \cdot g) \cdot R \cdot \sin\alpha \qquad (3)$$

Kiegészítő egyenlet:
Nem tudni, hogy gördül-e vagy csúszik: ***feltételezzük, hogy gördül***. Ekkor a kontaktpontban van a sebességpólus.
A gördülés kinematikai feltételéből:

$$a_S = R \cdot \varepsilon \qquad (4)$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$(3) \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{M_f - (F_t + m \cdot g) \cdot R \cdot \sin\alpha}{\theta_p} = \frac{60 - (500 + 15 \cdot 9{,}81) \cdot 0{,}3 \cdot \sin 12^\circ}{2{,}025} = 9{,}69 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$(4) \quad \rightarrow \quad a_S = R \cdot \varepsilon = 0{,}3 \cdot 9{,}69 = 2{,}9 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad S = m \cdot a_S + (F_t + m \cdot g) \cdot \sin\alpha = 178{,}2 \,[\mathrm{N}]$$

$$(2) \quad \rightarrow \quad N = (F_t + m \cdot g) \cdot \cos\alpha = 633 \,[\mathrm{N}]$$

Ellenőrzés: teljesül-e ***a gördülés dinamikai feltétele***? $S \le \mu_0 \cdot N$?
$178{,}2 < 202{,}56$ teljesül, a kerék valóban gördül, a megoldás a fenti.

2.

A gördülés és a megcsúszás határán: $S = \mu_0 \cdot N$. Az előbbi négy egyenletből álló egyenletrendszer kiegészül ezzel. Az öt egyenletből álló egyenletrendszerben öt ismeretlen van: a_S, ε, S, N és $M_{f\,\max}$.

A dinamika alaptétele: (1) $m \cdot a_S = S - (F_t + m \cdot g) \cdot \sin\alpha$
(2) $0 = N - (F_t + m \cdot g) \cdot \cos\alpha$
(3) $\theta_p \cdot \varepsilon = M_{f\,\max} - (F_t + m \cdot g) \cdot R \cdot \sin\alpha$
A kerék gördül: (4) $a_S = R \cdot \varepsilon$
A megcsúszás határán: (5) $S = \mu_0 \cdot N$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$(2) \quad \rightarrow \quad N = (F_t + m \cdot g) \cdot \cos\alpha = 633\,[\mathrm{N}]$$

$$(5) \quad \rightarrow \quad S = \mu_0 \cdot N = 202{,}56\,[\mathrm{N}]$$

$$(1) \quad \rightarrow \quad a_S = \frac{S}{m} - \left(\frac{F_t}{m} + g\right) \cdot \sin\alpha = 4{,}534 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$(4) \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{a_S}{R} = 15{,}11 \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

$$(3) \quad \rightarrow \quad M_{f\,\max} = \theta_p \cdot \varepsilon + (F_t + m \cdot g) \cdot R \cdot \sin\alpha = \underline{\underline{70{,}96\,[\mathrm{Nm}]}}$$

3.

A kerék akkor áll meg, amikor a súlypont sebessége (és ezzel együtt a kerék szögsebessége) nulla.
A súlypont sebességének változása:

$$v_S(t) = v_{S0} - a_S \cdot t = 15 - 2{,}9 \cdot t$$

$$v_S(t_1) = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{15}{2{,}9} = \underline{\underline{5{,}17\,[\mathrm{s}]}}$$

(vagy: $\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon \cdot t = v_{S0} / R - \varepsilon \cdot t = 50 - 9{,}69 \cdot t$

$$\omega(t_1) = 0 \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{50}{9{,}69} = \underline{\underline{5{,}16\,[\mathrm{s}]}}$$

4.

A mechanikai munka definíciója alapján:

$$W^{f\acute{e}k} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{M}_f \cdot \underline{\omega}(t)\,dt = -M_f \cdot \int_{t_0}^{t_1} (\omega_0 - \varepsilon \cdot t)\,dt = -M_f \cdot \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{v_{S0}}{R} - \frac{a_S}{R} \cdot t\right) dt = -\frac{M_f}{R} \cdot \int_{t_0}^{t_1} (v_{S0} - a_S \cdot t)\,dt$$

$$W^{f\acute{e}k} = -\frac{60}{0{,}3} \cdot \left[15 \cdot t - 2{,}9 \cdot \frac{t^2}{2}\right]_0^{5{,}17} = -7758{,}62\,[\mathrm{Nm}]$$

Másképp: munkatétellel:

$$T_1 - T_0 = W_{01}$$

$$W_{01} = W^{f\acute{e}k} + W^{s\acute{u}ly} + W^{F_t} \quad \rightarrow \quad W^{f\acute{e}k} = -T_0 - W^{s\acute{u}ly} - W^{F_t}$$

$$T_1 = 0$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{S0}^2 + \frac{1}{2} \cdot \theta_s \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{S0}^2 + \frac{1}{2} \cdot \theta_s \cdot \frac{v_{S0}^2}{R^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(m + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{R^2}{R^2}\right) \cdot v_{S0}^2$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot m \cdot v_{S0}^2 = 2531{,}25\,[\mathrm{Nm}]$$

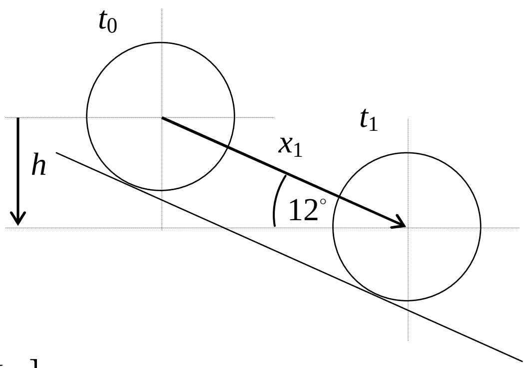
A tengelyterhelés és a súlyerő összeadható, állandó irányú és nagyságú erő potenciálos:
(a tengelyterhelés szerepe olyan, mintha a súly lenne ennyivel nagyobb)

$$x(t) = v_{S0} \cdot t - a_S \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$x_1 = v_{S0} \cdot t_1 - a_S \cdot \frac{t_1^2}{2} = 15 \cdot 5{,}17 - 2{,}9 \cdot \frac{5{,}17^2}{2} = 38{,}79\,[\mathrm{m}]$$

$$h = x_1 \cdot \sin 12^\circ = 8{,}06\,[\mathrm{m}]$$

Segédábra a potenciálfüggvény felírásához:



$$W^{súly} + W^{F_t} = W^{súly+F_t} = -(U_1 - U_0)$$

$$U_0 = 0$$

$$U_1 = -(m \cdot g + F_t) \cdot h = -(15 \cdot 9{,}81 + 500) \cdot 8{,}06 = -5219{,}61\,[\mathrm{Nm}]$$

$$W^{súly+F_t} = 5219{,}61\,[\mathrm{Nm}]$$

$$W^{fék} = -2531{,}25 - 5219{,}61 = \underline{\underline{-7750{,}86\,[\mathrm{Nm}]}}$$