Castigliano- és Betti-tételek összefoglalása, kidolgozott példa

Készítette: Dr. Kossa Attila (kossa@mm.bme.hu)
BME, Műszaki Mechanikai Tanszék
Frissítve: 2015. január 28.

Az alakváltozási energiasűrűség számítása egy anyagi pontban[1]:

$$u = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1}$$

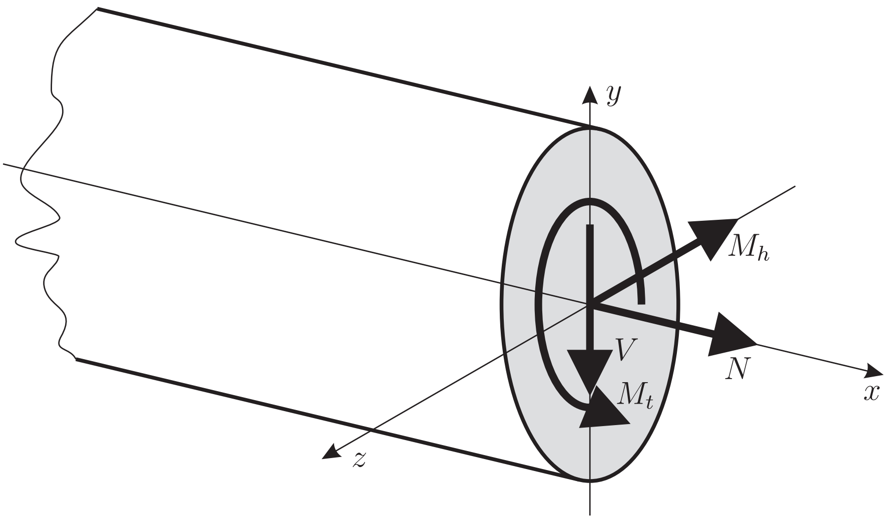
amit ha összegzünk a teljes térfogaton akkor megkapjuk a vizsgált testben felhalmozódó teljes alakváltozási energiát:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \mathrm{d}V. \tag{2}$$

A fenti összefüggést ha közvetlenül szeretnénk alkalmazni egy rúdban felhalmozódó alakváltozási energia számítására, akkor minden egyes pontban fel kellene írnunk az alakváltozási és feszültségi tenzorokat. Ez hosszadalmas és körülményes lenne. A feladatot könnyebben megoldhatjuk ha felhasználjuk a rudakra már korábban levezetett összefüggéseket. Végeredményben arra jutunk, hogy a rúdban felhalmozódó alakváltozási energia megadható az alábbi alakban:

$$\boxed{U = U_N + U_V + U_{M_h} + U_{M_t}}. \tag{3}$$

Vagyis U-t felírhatjuk a normál (N), nyíró (V), hajlító (M_h) és csavaró (M_t) igénybevételek okozta alakváltozási energiák összegeként. A továbbiakban ezeket ismertetjük. Egy adott x koordinátával jellemzett keresztmetszetben működő igénybevételeket az 1. ábra szemlélteti.



1. ábra. A keresztmetszetben működő igénybevételek

[1] A továbbiakban csak a lineárisan rugalmas, izotrop anyagi viselkedést vizsgáljuk.

$\boxed{U_N}$ **A normál igénybevételből adódó alakváltozási energia**

$$U_N = \frac{1}{2}\int\limits_l \frac{N^2}{AE}\mathrm{d}x, \tag{4}$$

ahol N a normáligénybevétel-függvény, A jelöli a keresztmetszet területét, E pedig a rugalmassági modulus. Ezek mind függhetnek a rúd hossza mentén vett koordinátától, emiatt általános esetben nem emelhetőek ki az integráljel elé.

$\boxed{U_V}$ **A nyíró igénybevételből adódó alakváltozási energia**
Ennél a tagnál már a legelején fontos kihangsúlyozni, hogy a tényleges számításoknál a legtöbb esetben ezt a tagot (3)-ban elhanyagoljuk, ugyanis a többi igénybevételből származó alakváltozási energiához képest a nyírásból származó lényegesen kisebb. Számítása az összes közül a legbonyolultabb és legidőigényesebb. Pontos meghatározásával kapott eredmény csak kis mértékben tér el attól, mintha eleve elhanyagoltuk volna, emiatt az egyszerűsítéssel kapott számítás is még elfogadható.

A nyíró igénybevételből származó csúsztatófeszültség-eloszlás függ a keresztmetszet alakjától. Emiatt nem tudunk egy végképletet felírni amit alkalmazhatunk tetszőleges keresztmetszetre. A rúdban felhalmozódó alakváltozási energia:

$$U_V = \frac{1}{2}\int\limits_l \frac{V^2}{I_z^2 G}\left(\int\limits_A \left(\frac{S}{w}\right)^2 \mathrm{d}A\right)\mathrm{d}x, \tag{5}$$

ahol egy adott x koordinátájú keresztmetszetben $S(y)$ jelenti az elhagyott keresztmetszetrész statikai nyomatékát z-re, míg $w(y)$ a keresztmetszet anyagvastagsága[2].

$\boxed{U_{M_h}}$ **A hajlító igénybevételből adódó alakváltozási energia**
Amennyiben csak z körüli hajlítás van[3]:

$$U_{M_h} = \frac{1}{2}\int\limits_l \frac{M_{hz}^2}{I_z E}\mathrm{d}x, \tag{6}$$

ahol I_z a keresztmetszetnek a hajlítás tengelyére számított másodrendű nyomatéka.

$\boxed{U_{M_t}}$ **A csavaró igénybevételből adódó alakváltozási energia**
A csavarásból adódó csúsztatófeszültség-eloszlás meghatározása tetszőleges keresztmetszet esetén olyan összetettebb feladat, melynek részletes tárgyalására a BSc képzés *Szilárdságtan* tárgya nem terjed ki. Emiatt itt most csak a kör és körgyűrű keresztmetszetek esetén érvényes összefüggést írjuk fel:

$$U_{M_t} = \frac{1}{2}\int\limits_l \frac{M_t^2}{I_p G}\mathrm{d}x, \tag{7}$$

ahol I_p a keresztmetszet poláris másodrendű nyomatéka.

A fenti összefüggések kiterjeszthetőek görbe rudakra is az integrálos tagok megfelelő átírásával ($\mathrm{d}x = R\mathrm{d}\varphi$).

[2]Itt most csak egy nyíróerőt vizsgáltunk, de lehetséges, hogy z-irányú is ébred. Ebben az esetben ezzel a taggal is számolni kell.

[3]Ha ébredne az y-tengely körül is hajlítás akkor azt értelemszerűen egy plusz tagként kell kezelni.

Castigliano-tétel alkalmazása

Rúdszerkezetek esetén a *Castigliano*-tétel szerint a rúd egy bizonyos keresztmetszetének elmozdulása - a nyírásból származó alakváltozási energia elhanyagolásával - az alábbi összefüggés szerint számítható[4]:

$$f = \int\limits_l \left(\frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial F} + \frac{M_h}{I_z E}\frac{\partial M_h}{\partial F} + \frac{M_t}{I_p G}\frac{\partial M_t}{\partial F} \right) \mathrm{d}s, \tag{8}$$

ahol f a keresztmetszetnek az F erő irányába eső elmozdulása.

Egy adott keresztmetszet szögelfordulására adódó összefüggés:

$$\psi = \int\limits_l \left(\frac{N}{AE}\frac{\partial N}{\partial M} + \frac{M_h}{I_z E}\frac{\partial M_h}{\partial M} + \frac{M_t}{I_p G}\frac{\partial M_t}{\partial M} \right) \mathrm{d}s, \tag{9}$$

ahol ψ a keresztmetszet szögelfordulása az M-nek megfelelő értelemben. Az elmozdulás és alakváltozás számításához ismernünk kell a rúd mentén az igénybevételi függvényeket, illetve ezek F és M szerinti deriváltjait. Amennyiben egy olyan helyen szeretnénk számolni a keresztmetszet elmozdulását ahol nincs működő aktív erő, akkor erre a helyre első lépésként, a kívánt irányba, felveszünk egy $F = 0$ erőt. Ezt követően meghatározzuk a szükséges F szerinti deriváltakat, majd visszaírjuk az integrálos kifejezésbe úgy, hogy már $F = 0$-val egyszerűsíthetünk. Hasonló gondolatmenetet kell alkalmaznunk a szögelfordulás esetén is. Görbe rudak esetén $\mathrm{d}s$ helyett $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\varphi$ összefüggést kell alkalmaznunk és az igénybevételeket a φ szög függvényeként kell felírnunk.

Síkbeli esetben, ha egy egyenes rúdra csak nyíró és hajlító igénybevétel hat ($N = 0$, $M_t = 0$) akkor az összefüggések lényegesen leegyszerűsödnek:

$$f = \int\limits_l \frac{M_h}{I_z E}\frac{\partial M_h}{\partial F}\mathrm{d}x, \qquad \psi = \int\limits_l \frac{M_h}{I_z E}\frac{\partial M_h}{\partial M}\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Betti-tétel alkalmazása

Rúdszerkezetek esetén a *Betti*-tétel szerint a rúd egy bizonyos keresztmetszetének elmozdulása - a nyírásból származó alakváltozási energia elhanyagolásával - az alábbi összefüggés szerint számítható:

$$f = \int\limits_l \left(\frac{N}{AE}n + \frac{M_h}{I_z E}m_h + \frac{M_t}{I_p G}m_t \right) \mathrm{d}s, \tag{11}$$

ahol az n, m_h és m_t jelentik azokat az igénybevételi függvényeket, melyeket úgy kapunk, hogy a rúdról eltávolítjuk az összes külső terhelést, majd a keresett f elmozdulás irányába felveszünk egy $F = 1$ nagyságú erőt és ehhez számítjuk ki az igénybevételi függvényeket.

[4] Az $\int \mathrm{d}s$ szerinti összegzés magában foglalja azt az esetet is, ha a rúdszerkeszet 3D törtvonalú, vagy ha síkgörbe részek is vannak benne. Emiatt lehetséges, hogy az egyes rúdrészeken működő hajlítonyómaték a rá merőlegesen csatlakozó rúdra már mint csavarónyomaték hat.

Egy adott keresztmetszet szögelfordulására adódó összefüggés:

$$\psi = \int_l \left(\frac{N}{AE} n_0 + \frac{M_h}{I_z E} m_{h0} + \frac{M_t}{I_p G} m_{t0} \right) \mathrm{d}s, \tag{12}$$

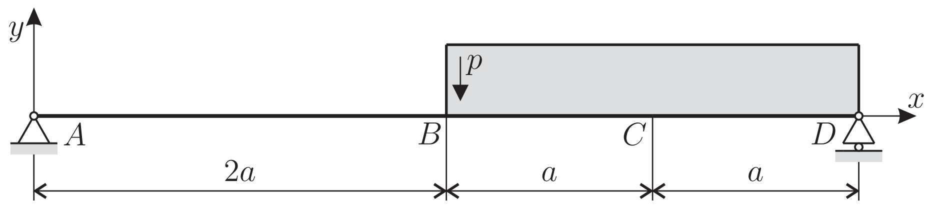
ahol az n_0, m_{h0} és m_{t0} jelentik azokat az igénybevételi függvényeket, melyeket úgy kapunk, hogy a rúdról eltávolítjuk az összes külső terhelést, majd a keresett ψ szögelfordulás irányába felveszünk egy $M = 1$ nagyságú koncentrált erőpárt és ehhez számítjuk ki az igénybevételi függvényeket.

Síkbeli esetben, ha egy egyenes rúdra csak nyíró és hajlító igénybevétel hat ($N = 0$, $M_t = 0$) akkor az összefüggések lényegesen leegyszerűsödnek:

$$f = \int_l \frac{M_h}{I_z E} m \mathrm{d}x, \qquad \psi = \int_l \frac{M_h}{I_z E} m_0 \mathrm{d}x. \tag{13}$$

Kidolgozott példa

Határozzuk meg a 2. ábrán látható tartó C keresztmetszetének lehajlását és szögelfordulását Castigliano- és Betti-tétel alkalmazásával is. Adatok: $p = 1$ kN/m, $a = 2$ m, $I_z E = 10^6$ Nm^2.



2. ábra. A vizsgált tartó

■ **Megoldás Betti-tétel segítségével:**
A nyíró igénybevétel okozta alakváltozási energia elhanyagolásával a vizsgált rúdnál csak a hajlítónyomatéki igénybevétel hatásával kell számolnunk, mivel $N = 0$ és $M_t = 0$ a rúd hossza mentén. Vagyis a (11)-(12) szerinti általános megoldások helyett használható a (13) szerinti összefüggések. A további számításokhoz az M_h és az m függvények meghatározása szükséges. A reakcióerők számítása (feltételezve, hogy a reakcióerők a pozitív y irányába mutatnak):

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad F_D = \frac{3}{2}pa = 3 \text{ kN}, \tag{14}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{1}{2}pa = 1 \text{ kN}. \tag{15}$$

A hajlítóigénybevételi ábrát a 3. ábra mutatja. Az M_h függvény felírása:

$$M_h = -F_A x, \qquad x = 0...2a, \tag{16}$$

$$M_h = -F_A x + \frac{1}{2}p\left(x - 2a\right)^2, \qquad x = 2a...4a. \tag{17}$$

Az m függvényt úgy kapjuk, hogy a tartóról eltávolítjuk a külső erőrendszert[5], majd a C keresztmetszetben felveszünk egy $F = 1$ koncentrált erőt a lehajlás irányába és meghatározzuk ebben az esetben a hajlítónyomatéki igénybevételt[6]. Ezt az eloszlást a 4. ábra szemlélteti. Az m függvény felírása[7]:

$$m = -0,25x, \qquad x = 0...3a, \tag{18}$$

$$m = -0,25x + 1\left(x - 3a\right) = 0,75x - 3a, \qquad x = 3a...4a. \tag{19}$$

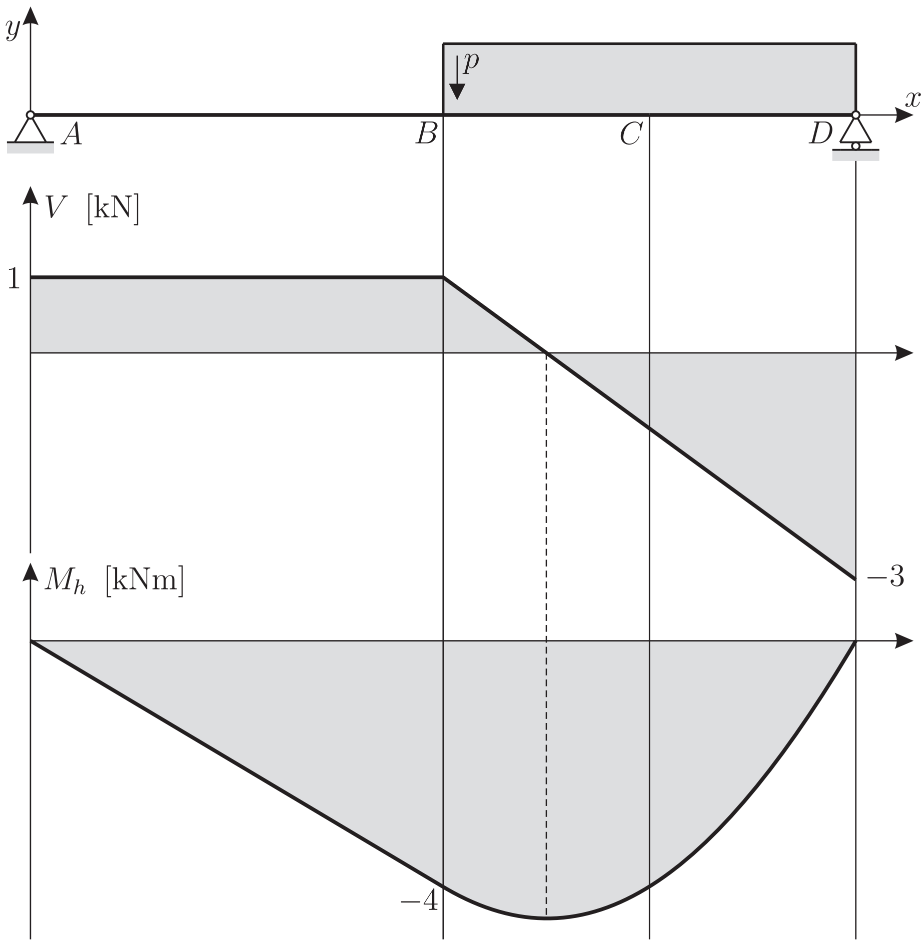
A (13)-ban szereplő integrál elvégzéséhez a tartót 3 részre kell osztanunk, mivel az $M_h m$ szorzat által adódó új függvény 3 különböző szakaszból tevődik össze. Tehát:

$$f = \int\limits_0^{2a} \frac{M_h}{I_z E} m \mathrm{d}x + \int\limits_{2a}^{3a} \frac{M_h}{I_z E} m \mathrm{d}x + \int\limits_{3a}^{4a} \frac{M_h}{I_z E} m \mathrm{d}x. \tag{20}$$

[5] Jelen esetben csak a megoszló terhelés.

[6] Ehhez persze szükséges a reakcióerők számítása is ennél a feladatnál, aminek közlésétől itt most eltekintünk.

[7] A behelyettesítéseknél a hosszméreteket m-ben az erőt N-ban, a nyomatékot pedig Nm-ben helyettesítjük be. A kifejezésekben szereplő numerikus értékek ehhez igazodnak.



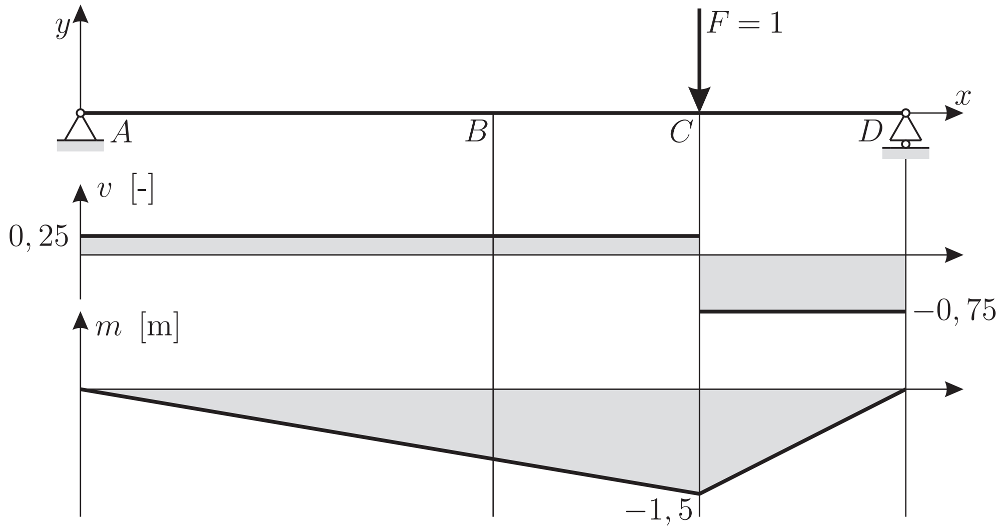
3. ábra. A hajlítónyomatéki függvény ábrázolása

Mivel a tartó teljes hossza mentén az I_zE szorzat állandó, emiatt kiemelhető az integrál jel elé:

$$f = \frac{1}{I_zE}\left(\int_0^{2a} M_h m \mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} M_h m \mathrm{d}x + \int_{3a}^{4a} M_h m \mathrm{d}x\right), \tag{21}$$

$$\begin{aligned} I_zE\cdot f &= \int_0^{2a}\left(\left(-F_A x\right)\left(-0,25x\right)\right)\mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a}\left(\left(-F_A x + \frac{1}{2}p\left(x-2a\right)^2\right)\left(-0,25x\right)\right)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{3a}^{4a}\left(\left(-F_A x + \frac{1}{2}p\left(x-2a\right)^2\right)\left(0,75x-3a\right)\right)\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} I_zE\cdot f &= \int_0^{2a} 250x^2\mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a}\left(-125x^3 + 1\ 250x^2 - 2\ 000x\right)\mathrm{d}x \\ &+ \int_{3a}^{4a}\left(375x^3 - 6\ 750x^2 + 36\ 000x - 48\ 000\right)\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{23}$$



4. ábra. Az m függvény ábráziolása

$$f = \frac{1}{I_z E}\left(5\ 333,33 + 10\ 833,33 + 4\ 500\right) = \frac{20\ 666,67}{10^6} = 0,02067\ \mathrm{m}, \tag{24}$$

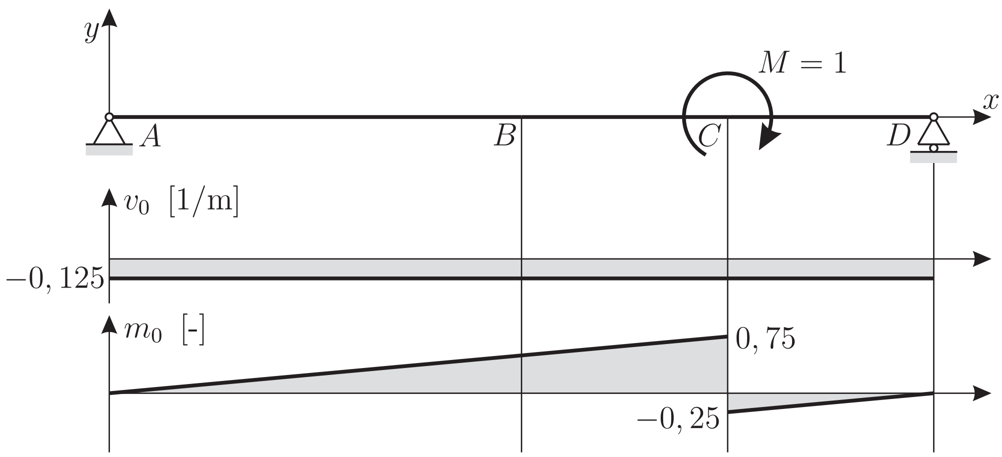
$$\boxed{f = 20,67\ \mathrm{mm}}. \tag{25}$$

Mivel pozitív értékre jött ki, ez azt jelenti, hogy a lehajlás a felvett F erő irányába mutat.

Az m_0 függvényt úgy kapjuk, hogy a tartóról eltávolítjuk a külső erőrendszert, majd a C keresztmetszetben felveszünk egy $M = 1$ nagyságú koncentrált erőpárt[8] a feltételezett szögelfordulás irányába és meghatározzuk ebben az esetben a hajlítónyomatéki igénybevételt[9]. Ezt az eloszlást a 5. ábra szemlélteti. Az m_0 függvény felírása:

$$m_0 = 0,125x, \qquad x = 0...3a, \tag{26}$$

$$m_0 = 0,125x - 1, \qquad x = 3a...4a. \tag{27}$$



5. ábra. Az m_0 függvény ábrázolása

[8] Célszerű ezt a koncentrált erőpárt dimenziótlanul felvenni. Emiatt a v_0 függvény dimenziója [1/m] lesz.

[9] Ehhez persze szükséges a reakcióerők számítása is ennél a feladatnál, aminek közlésétől itt most eltekintünk.

A szögelfordulás számításához a tartót 3 részre kell osztanunk, mivel az $M_h m_0$ szorzat által adódó új függvény 3 különböző szakaszból tevődik össze. Tehát:

$$\psi = \int_0^{2a} \frac{M_h}{I_z E} m_0 \mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} \frac{M_h}{I_z E} m_0 \mathrm{d}x + \int_{3a}^{4a} \frac{M_h}{I_z E} m_0 \mathrm{d}x. \tag{28}$$

Mivel a tartó teljes hossza mentén az $I_z E$ szorzat állandó, emiatt kiemelhető az integrál jel elé:

$$\psi = \frac{1}{I_z E} \left(\int_0^{2a} M_h m_0 \mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} M_h m_0 \mathrm{d}x + \int_{3a}^{4a} M_h m_0 \mathrm{d}x \right). \tag{29}$$

$$\begin{aligned} I_z E \cdot \psi \;&=\; \int_0^{2a} \left((-F_A x)(0,125x) \right) \mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} \left(\left(-F_A x + \frac{1}{2} p (x-2a)^2 \right) (0,125x) \right) \mathrm{d}x \\ &+ \int_{3a}^{4a} \left(\left(-F_A x + \frac{1}{2} p (x-2a)^2 \right) (0,125x - 1) \right) \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{30}$$

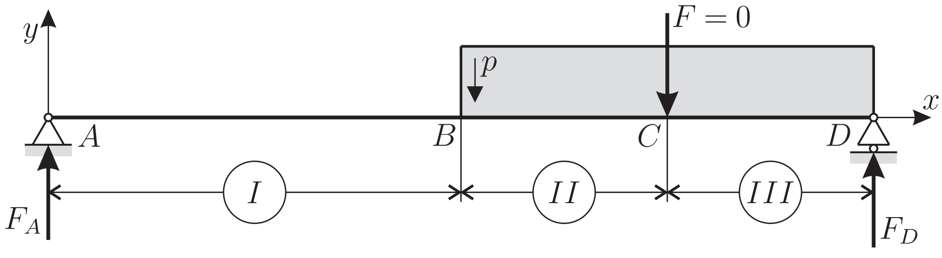
$$\begin{aligned} I_z E \cdot \psi \;&=\; \int_0^{2a} (-125)\, x^2 \mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} \left(62.5x^3 - 625x^2 - 1\ 000x \right) \mathrm{d}x \\ &+ \int_{3a}^{4a} \left(62.5x^3 - 1\ 125x^2 + 6\ 000x - 8\ 000 \right) \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{31}$$

$$\psi = \frac{1}{I_z E} (-2\ 666,67 - 5\ 416,67 + 750) = \frac{-7\ 333,33}{10^6} = -0,00733 \text{ rad}, \tag{32}$$

$$\boxed{f = -0,4202^\circ}. \tag{33}$$

MIvel negatív értékre jött ki emiatt a felvett M irányával ellentétes értelemben.

■ **Megoldás Castigliano-tétel segítségével:**
Elsőként a lehajlást, majd a szögelfordulást számítjuk.



6. ábra. A C keresztmetszet lehajlásának számítása

Mivel a keresett elmozdulás irányába nem hat koncentrált erő, emiatt fel kell vennünk egy $F = 0$ erőt annak érdekében, hogy a számítási képletekben jelentkező deriváltakat számítani tudjuk. Ezt szemlélteti a 6. ábra. Jelen feladatnál a hajlítónyomatéki függvény felírásához fel kell használnunk a reakcióerőket[10]. Emiatt szükséges a reakcióerők kifejezése a felvett F figyelembevételével[11]:

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad F_D = \frac{3}{4}F + \frac{3}{2}pa, \tag{34}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = \frac{1}{4}F + \frac{1}{2}pa. \tag{35}$$

A hajlítónyomatéki függvény felírásához 3 részre kell osztanunk a tartót:

$$\begin{aligned}
M_h &= -F_A x \\
&= -\frac{1}{4}Fx - \frac{1}{2}pax, \qquad x = 0...2a, && (36)\\
M_h &= -F_A x + \frac{1}{2}p\left(x-2a\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{4}Fx - \frac{5}{2}pax + 2a^2p, \qquad x = 2a...3a, && (37)\\
M_h &= -F_A x + \frac{1}{2}p\left(x-2a\right)^2 + F\left(x-3a\right) \\
&= \frac{1}{2}px^2 + \frac{3}{4}Fx - \frac{5}{2}pax + 2a^2p - 3aF, \qquad x = 3a...4a. && (38)
\end{aligned}$$

Ezt követően az F szerinti deriváltakat kell számítanunk az egyes szakaszokon:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_h}{\partial F} &= -\frac{1}{4}x, \qquad x = 0...2a, && (39)\\
\frac{\partial M_h}{\partial F} &= -\frac{1}{4}x, \qquad x = 2a...3a, && (40)\\
\frac{\partial M_h}{\partial F} &= \frac{3}{4}x - 3a, \qquad x = 3a...4a. && (41)
\end{aligned}$$

Miután a tartó mentén $N = 0$ és $M_t = 0$, emiatt használhatóak a (10) szerinti összefüggések. A behelyettesítésnél már egyszerűsíthetünk $F = 0$-val:

$$I_z E \cdot f = \int_0^{2a} M_h \frac{\partial M_h}{\partial F}\mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} M_h \frac{\partial M_h}{\partial F}\mathrm{d}x + \int_{3a}^{4a} M_h \frac{\partial M_h}{\partial F}\mathrm{d}x, \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
I_z E \cdot f \;=\; & \int_0^{2a} \left(\left(-\frac{1}{2}pax\right)\left(-\frac{1}{4}x\right)\right)\mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} \left(\left(\frac{1}{2}px^2 - \frac{5}{2}pax + 2a^2p\right)\left(-\frac{1}{4}x\right)\right)\mathrm{d}x \\
& + \int_{3a}^{4a} \left(\left(\frac{1}{2}px^2 - \frac{5}{2}pax + 2a^2p\right)\left(\frac{3}{4}x - 3a\right)\right)\mathrm{d}x, && (43)
\end{aligned}$$

[10] Ha egy befogott tartónk lenne, akkor nem feltétlenül szükséges, hiszen a szabad végtől indulva felírható a hajlítónyomatéki függvény anélkül, hogy a reakcióerőket számítanánk.

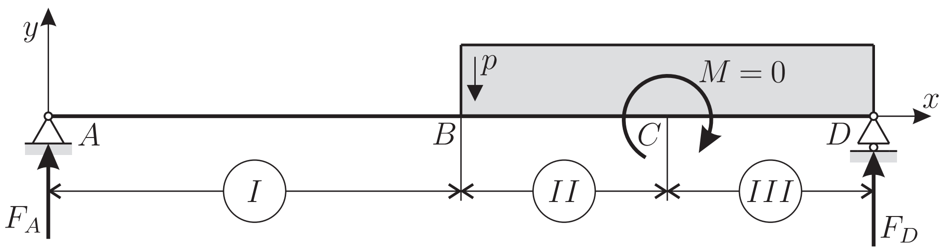
[11] Természetesen a valóságos reakcióerők nem változnak, hiszen $F = 0$. Mindez azért kell, hogy az F szerinti deriválást majd el tudjuk végezni.

$$I_zE\cdot f = \int\limits_0^{2a}\left(\left(-1000x\right)\left(-0,25x\right)\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{2a}^{3a}\left(\left(500x^2-5\,000x+8000\right)\left(-0,25x\right)\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{3a}^{4a}\left(\left(500x^2-5\,000x+8000\right)\left(0,75x-6\right)\right)\mathrm{d}x, \tag{44}$$

$$I_zE\cdot f = \int\limits_0^{2a}\left(250x^2\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{2a}^{3a}\left(-125x^3+1\,250x^2-2\,000x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{3a}^{4a}\left(375x^3-6\,750x^2+36\,000x-48\,000\right)\mathrm{d}x, \tag{45}$$

$$f = \frac{1}{I_zE}\left(5\,333,33+10\,833,33+4\,500\right) = \frac{20\,666,67}{10^6} = 0,02067\ \mathrm{m}, \tag{46}$$

$$\boxed{f = 20,67\ \mathrm{mm}}. \tag{47}$$



7. ábra. A C keresztmetszet szögelfordulásának számítása

Mivel a keresett elfordulás helyén nem hat koncentrált erőpár, emiatt fel kell vennünk egy $M = 0$ koncentrált erőpárt annak érdekében, hogy a számítási képletekben jelentkező deriváltakat számítani tudjuk. Ezt szemlélteti a 7. ábra. Jelen feladatnál a hajlítónyomatéki függvény felírásához fel kell használnunk a reakcióerőket. Emiatt szükséges a reakcióerők kifejezése a felvett M figyelembevételével:

$$\sum M_A = 0 \quad\Rightarrow\quad F_D = \frac{M}{4a}+\frac{3}{2}pa, \tag{48}$$

$$\sum F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad F_A = -\frac{M}{4a}+\frac{1}{2}pa. \tag{49}$$

A hajlítónyomatéki függvény felírásához 3 részre kell osztanunk a tartót:

$$\begin{aligned} M_h &= -F_Ax \\ &= \frac{M}{4a}x-\frac{1}{2}pax, \qquad x = 0...2a, \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} M_h &= -F_Ax+\frac{1}{2}p\left(x-2a\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}px^2+\frac{M}{4a}x-\frac{5}{2}pax+2a^2p, \qquad x = 2a...3a, \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} M_h &= -F_Ax+\frac{1}{2}p\left(x-2a\right)^2-M \\ &= \frac{1}{2}px^2+\frac{M}{4a}x-\frac{5}{2}pax+2a^2p-M, \qquad x = 3a...4a. \end{aligned} \tag{52}$$

A szögelfordulás képletében szereplő deriváltak számítása:

$$\frac{\partial M_h}{\partial M} = \frac{1}{4a}x, \qquad x = 0...2a, \tag{53}$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial M} = \frac{1}{4a}x, \qquad x = 2a...3a, \tag{54}$$

$$\frac{\partial M_h}{\partial M} = \frac{1}{4a}x - 1, \qquad x = 3a...4a. \tag{55}$$

A behelyettesítésnél már egyszerűsíthetünk $M = 0$-val:

$$I_zE \cdot \psi = \int_0^{2a} M_h \frac{\partial M_h}{\partial M} \mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} M_h \frac{\partial M_h}{\partial M} \mathrm{d}x + \int_{3a}^{4a} M_h \frac{\partial M_h}{\partial M} \mathrm{d}x, \tag{56}$$

$$\begin{aligned} I_zE \cdot \psi \quad = \quad & \int_0^{2a} \left(\left(-\frac{1}{2}pax \right) \left(\frac{1}{4a}x \right) \right) \mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} \left(\left(\frac{1}{2}px^2 - \frac{5}{2}pax + 2a^2p \right) \left(\frac{1}{4a}x \right) \right) \mathrm{d}x \\ & + \int_{3a}^{4a} \left(\left(\frac{1}{2}px^2 - \frac{5}{2}pax + 2a^2p \right) \left(\frac{1}{4a}x - 1 \right) \right) \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} I_zE \cdot \psi \quad = \quad & \int_0^{2a} \left(-125x^2 \right) \mathrm{d}x + \int_{2a}^{3a} \left(62,5x^3 - 625x^2 + 1\ 000x \right) \mathrm{d}x \\ & + \int_{3a}^{4a} \left(62,5x^3 - 1\ 125x^2 + 6\ 000x - 8\ 000 \right) \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{58}$$

$$\psi = \frac{1}{I_zE} (-2\ 666,67 - 5\ 416,67 + 750) = \frac{-7\ 333,33}{10^6} = -0,00733 \text{ rad}, \tag{59}$$

$$\boxed{\psi = -0,4202^\circ}. \tag{60}$$