# NEMLINEÁRIS ÉS NEM-SIMA HATÁSOK FORGÁCSOLÁSI FOLYAMATOK SORÁN

***Kiss Ádám***
*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék, PhD-hallgató, kiss_a@mm.bme.hu*

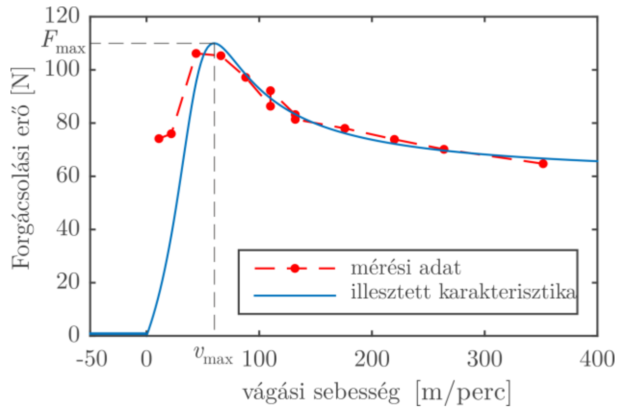
***Bachrathy Dániel***
*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Műszaki Mechanikai Tanszék, Adjunktus, bachrathy@mm.bme.hu*

**Absztrakt**
A forgácsolás az ipar számára elengedhetetlen megmunkálási eljárás, részben az elérhető nagy gyártási pontosságnak köszönhetően és a tömeggyártásban használt hatékonysága miatt. Azonban gépgyártástechnológia egyik problémája a forgácsolási folyamatok során fellépő szerszámgéprezgés, amely nagyban korlátozza a termelékenységet. Ezen rezgések előfordulásának egyik oka a forgácsleválasztás során a szerszám és munkadarab között fellépő forgácsoló erő karakterisztikájában keresendő. Leggyakoribb ilyen rezgés a szakirodalomban már közel 70 éve feltárt regeneratív hatásból származó öngerjesztett rezgés (chatter) [1]. Ezen modellek általában nem veszik figyelembe a forgácsoló erőkarakterisztika sebességtől való függését. Jelen tanulmányban a forgácsoló erő vágási sebességtől való nemlineáris függését vizsgáljuk egy gyalulási példán.
A tanulmányban először a folyamatot leíró mechanikai rendszer egyensúlyi helyeit és stabilitási tulajdonságait adtuk meg, azaz, a kialakuló rezgések előfordulását ábrázoljuk úgynevezett stabilitási térképen. Majd az egyensúlyi helyek globális stabilitási vizsgálata során a forgácsoló erő nemlineáris hatására létrejövő periodikus pályákat tanulmányoztuk. A kialakuló periodikus pályák követésére pszeudó ívhossz módszeren alapuló peremérték megoldó algoritmust alkalmaztunk. Kimutattuk, hogy létrejöhetnek bistabil tartományok, úgynevezett „veszélyes zónák” (*unsafe zone*), amely esetében a stabil fix pont egy megfelelően kicsi perturbációra áttérhet egy nagyobb amplitúdójú periodikus pályára, ezzel káros rezgéseket létrehozva. Ilyen esetben az egyensúlyi helyzet *Hopf* bifurkációs pontjából leágazó instabil határciklus egy *fold* típusú bifurkáción keresztül stabilizálódik, ezáltal létrehozva a bistabil tartományt. Tehát az esetlegesen kialakuló instabil periodikus pályát egy stabil határciklus veheti körül. A periodikus pályák stabilitási tulajdonságainak meghatározása a periodikus pálya körüli linearizálással történt.
Továbbá, munkánk során elemeztük a nem-sima dinamika hatását is, megadtuk a „csúszó régió” (*Sliding region*) létrejöttének feltételét és előfordulásának tartományát. Azaz a kapcsolóvonal azon szakaszát, ahol az uralkodó dinamika rátapadhat arra.

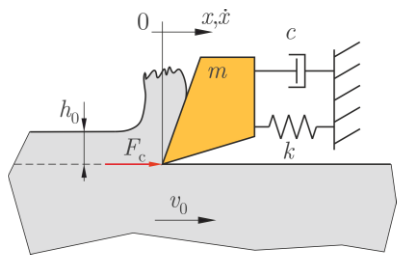
*Kulcsszavak:* Forgácsolás, stabilitásvizsgálat, nemlineáris dinamika, nem-sima hatás

## 1. Bevezetés

A forgácsolás egy széles körben használt gyártási és termelési eljárás. Azonban ez a fajta megmunkálási folyamat káros rezgéseket időzhet elő, amely csökkenti a megmunkáló szerszámok élettartamát és a kialakított felületi minőséget [1]. Ezen rezgések korlátozzák az elérhető




**1. ábra. Forgácsoló erő sebesség függése. Forgácsolási paraméterek: $w = 2$ [mm], $h = 0.1$ [mm], homlokszög $\beta = 10°$, $F_{\max} = 110$ [N], $v_{\max} = 60$ [m/perc].**




**2. ábra. Alkalmazott mechanikai modell, melyben a szerszám egy szabadságfokú lengőrendszer, a munkadarab pedig $v_0$ sebességgel haladó merev test.**

anyagleválasztási hányadot, ezáltal csökkentik termelés hatékonyságát [2]. Fontos feladat a kialakuló szerszámgéprezgések megbízható előrejelzése a termelékenység növelésének, a pénzügyi költségek és a veszteségek minimalizálásának szempontjából egyaránt. A fellépő káros rezgések előfordulását úgynevezett stabilitási térképeken szemléltetik a technológiai paraméterek függvényében [3].

Ebben a tanulmányban egy olyan mechanikai modell hozunk létre, amelyben forgácsolási erő sebességfüggő hatását [4] mutatjuk be. Rávilágítunk, hogy ezen hatás jelentősen befolyásolhatja a megmunkálás stabilitási tulajdonságait, amivel akár növelhetővé válna a termelés produktivitása [5].

Az első fejezetben az alkalmazott mechanikai modell kerül ismertetésre, amelyben merev munkadarabot és rugalmasan megtámasztott forgácsoló szárszámot veszünk figyelembe, amelyet tömeg, rugó és csillapításból álló egyszabadságfokú lengőrendszerként írunk le.

A következő fejezetben a stabilitási térképek elkészítéséhez az egyensúlyi helyzet körüli lokális stabilitási tulajdonságok vizsgálatát követően a nemlineáris forgácsoló erő karakterisztikának és a nem-sima rendszer globális dinamikára gyakorolt hatását vizsgáljuk [6].

A kialakuló periodikus pályák követésére és vizsgálatára pszeudó ívhossz módszeren alapuló peremérték megoldó algoritmust alkalmazunk. A periodikus pályák stabilitási tulajdonságainak meghatározása a periodikus pálya körüli linearizálással történt [7].

## 2. Mechanikai modell

Forgácsolást leíró modellekben gyakran eltekintenek a forgácsoló erőnek sebesség függő hatásától. Ezt a hatást szemlélteti az 1. ábra, amely különböző forgácsolási sebességekre, de azonos egyéb technológiai paraméterekre illesztett forgácsolási erő értékeket szemléltet. Jól látható, hogy a forgácsolási sebesség növekedésével az erőkarakterisztika növekszik egy $F_{\mathrm{max}}$ maximális erő értékig ($v_{\mathrm{max}}$ helyen), majd ezt követően, tovább növelt forgácsolási sebességeknél csökkenő tendenciát mutat. Tehát a forgácsoló erő nagysága nemlineárisan függ a pillanatnyi forgácsolási sebességtől, amely az előre beállított forgácsolási sebességgel mozgó munkadarab és szerszám rezgési sebességéből adódó relatív sebesség [5]. Továbbá lényeges megjegyezni, hogy nem történik forgácsolás abban az esetben, amikor a szerszám nagyobb sebességgel távolodik a forgácsfronttól ("el-rezeg"), mint annak előre beállított forgácsolási sebessége, azaz a relatív forgácsolási sebesség negatív. Ebben az esetben nincs kontakt a forgácsolószerszám és a munkadarab (forgácsfront) között, ezáltal nem lép fel forgácsoló erő, azaz a forgácsoló erőkarakterisztika 0 értéket vesz fel. Vagyis a forgácsolási erőkarakterisztikában szakadás van. Az így kapott dinamikai rendszert úgynevezett Filippov-típusú nem-sima rendszer [8]. Ezen hatások figyelembevételével a mozgásegyenletünk egy nemlineáris autonóm másodrendű nem-sima differenciálegyenlet [9].

### *2.1. Mozgásegyenlet felírása*

Ezen nem sima sebességfüggő forgácsolást leíró legegyszerűbb mechanikai modell egy tömeg, rugó és csillapításból álló egyszabadságfokú lengőrendszer (lásd 2. ábra):

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= F_{\mathrm{c}}(t); \qquad \text{ha vág a szerszám,} \\ m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= 0; \qquad \text{ha nem vág.} \end{aligned} \tag{1}$$

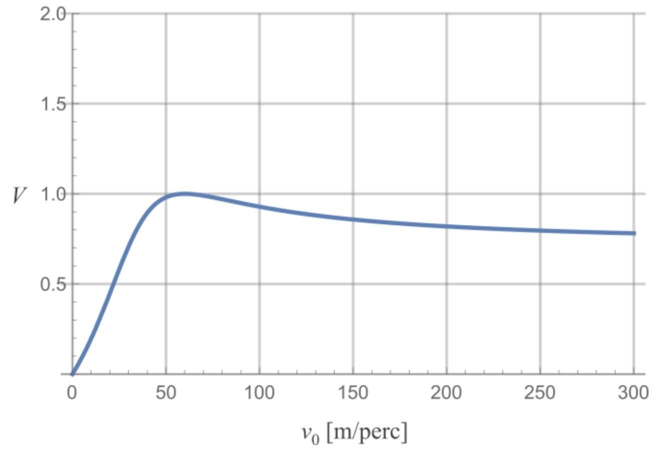
A gerjesztést a sebességfüggő $F_{\mathrm{c}}(t)$ forgácsoló erő adja [2]:

$$F_{\mathrm{c}}(t) = K_{\mathrm{c}} h_0 w_0 V(v(t)) \tag{2}$$

ahol $K_{\mathrm{c}}$ a forgácsolási együttható, $h_0$ a forgácsvastagság, $w_0$ a forgácsszélesség. A forgácsolási erő sebességfüggését leíró hatás a $V\big(v(t)\big)$ nemlineáris formafüggvénnyel (lásd 3. ábra) adható meg

$$V\big(v(t)\big) = \frac{v(t)}{\sqrt{\big(v_{\mathrm{max}} - v(t)\big)^2 + v(t)^2}}, \tag{3}$$

ahol $v(t)$ a relatív forgácsolási sebesség az $\dot{x}(t)$ sebessége és $v_0$ beállított forgácsolási sebességgel mozgó munkadarab között ($v(t) = v_0 - \dot{x}(t)$ és $v_{\mathrm{max}}$ a legnagyobb forgácsolási erőt ($F_{\mathrm{max}}$) felvevő sebességérték (lásd 1. ábra) [10]. Ezzel a formafüggvénnyel kellően pontosan leírható a forgácsolási erő sebességfüggő hatása forgácsolás esetén. Megjegyzendő, hogy ez az erőmodell lineárisan arányos a forgács keresztmetszetével ($h_0 w_0$) és nemlineárisan arányos a relatív forgácsolási sebességgel.




**3. ábra. A forgácsolási erő sebességfüggését leíró $V(t)$ nemlineáris formafüggvény, paraméter: $v_{\max} = 60$ [m/perc].**

Az (1) mozgásegyenletet elosztva az $m$ tömeggel és áttérve $(\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}))$ elsőrendű alakra, a rendszert leíró nem-sima differenciálegyenlet az alábbi módon adható meg:

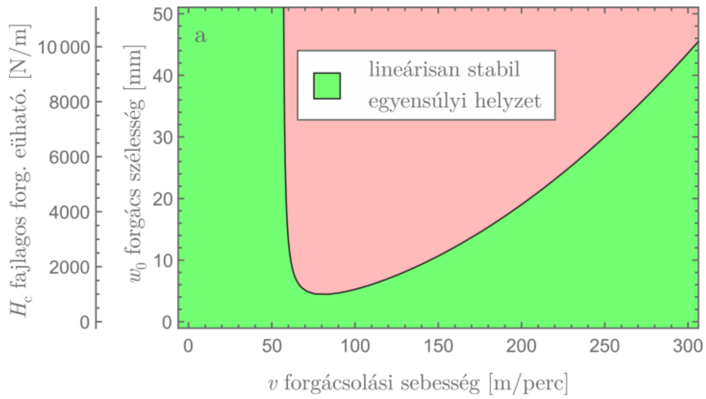
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{matrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}); & \text{ha} \quad H(x) > 0 \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{x}); & \text{ha} \quad H(x) < 0 \end{matrix} \tag{4}$$

ahol $\mathbf{x}(t) = [x(t) \quad \dot{x}(t)]^{\mathrm{T}}$ állapotváltozók vektros alakban, $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ differenciálegyenlet növekménye forgácsolás esetén, $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$ a differenciálegyenlet növekménye abban az esetben, amikor nem történik forgácsolás, és $H(x) = v_0 - \dot{x}(t)$ a kapcsolófüggvény, amely megadja a rendszer két állapota közötti váltást.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ -\omega_{\mathrm{n}}^2 x(t) - 2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\dot{x}(t) + H_{\mathrm{c}} V\big(v(t)\big) \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ -\omega_{\mathrm{n}}^2 x(t) - 2\zeta\omega_{\mathrm{n}}\dot{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

A rendszerben szereplő paraméterek: $\omega_{\mathrm{n}} = \sqrt{k/m}$ a csillapítatlan sajátkörfrekvencia, $\zeta = c/(2\sqrt{km})$ a relatív csillapítási tényező és $H_{\mathrm{c}} = K_{\mathrm{c}} h_0 w_0 / m$ a fajlagos forgácsolási együttható.
Megjegyzendő, hogy abban az esetben, amikor forgácsoló szerszám eltávolodik a forgácsfronttól, azaz $v(t) > v_0$, akkor szükséges egy kevés idő, amíg visszatér addig. Jelen nem-sima modell ezen visszatérési időt és a közben megtett utat elhanyagolja, amely egy jó közelítésnek tekinthető, azokban az esetekben, amikor ez a visszatérés idő kicsi. Ez a számítás az egyensúlyi helyzet körüli vizsgálatot nem befolyásolja.
Az (4) egyenlet $\mathbf{x}_{\mathrm{e},i}$-vel jelölt egyensúlyi helyeit az $\mathbf{F}_i(\mathbf{x}_{\mathrm{e},i}) = \mathbf{0}$, $i = 1{,}2$ egyenletrendszer megoldásai adják (azaz $\dot{\mathbf{x}}_{\mathrm{e},i} = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{x}}_{\mathrm{e},i} = \mathbf{0}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathrm{e},1} &= \begin{bmatrix} \frac{H_{\mathrm{c}} v_0}{\omega_{\mathrm{n}}^2 \sqrt{(v_0 - v_{\max})^2 + v_0^2}} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{x}_{\mathrm{e},2} &= [0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{6}$$




**4. ábra. Lineáris stabilitási térkép. Paraméterek: $m = 1$ [kg], $\zeta = 0.05$ [-], $\omega_n = 260$ [Hz], $K_c = 1200$ [MPa], $h_0 = 0.2$ [mm], $v_0 = 300$ [m/perc], $v_{max} = 60$ [m/perc]**

A nem sima dinamikai rendszer vizsgálata előtt az egyes rendszerek stabilitási tulajdonságai kerülnek bemutatásra a *2.2.* alfejezetben.

*2.2. Lineáris stabilitásvizsgálat*

Kezdjük az egyensúlyi helyzet körüli lokális stabilitási tulajdonságok vizsgálatával. Az $\mathbf{x}(t)$ általános megoldása a (4) egyenletnek felírható úgy, mint egy $\boldsymbol{\xi}(t)$ kis perturbáció az $\mathbf{x}_e$ egyensúlyi hely körül [6]. Visszahelyettesítve a (4) mozgásegyenletbe, majd a nemlineáris erőkarakteriszikát hatványsorba (Taylor-sor) fejtve a magasabb rendű tagok elhagyásával linearizáljuk a mozgásegyenletet. Az így kapott variációs egyenlet (másodrendű közönséges homogén lineáris differenciálegyenlet, lásd (7) egyenlet) stabilitásának, azaz az egyensúlyi helyzetek lokális stabilitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy a differenciálegyenlet együtthatói pozitívak legyenek [11],

$$\ddot{\xi}(t) + \left(2\zeta\omega_n - \underbrace{\frac{H_c v_{max}(v_0 - v_{max})}{\sqrt{\left((v_0 - v_{max})^2 + v_0^2\right)^3}}}_{=\dot{V}(v(t))}\right)\dot{\xi}(t) + \omega_n^2\xi(t) = 0. \tag{7}$$

$\ddot{\xi}(t)$ együtthatója 1, $\xi(t)$ együtthatója a sajátkörfrekvencia fizikai tartalma miatt mindig pozitív, így a stabilitást az $\dot{\xi}(\mathrm{t})$ együtthatója dönti el az alábbi feltétellel

$$2\zeta\omega_n - \frac{H_c v_{max}(v_0 - v_{max})}{\sqrt{\left((v_0 - v_{max})^2 + v_0^2\right)^3}} > 0 \tag{8}$$

Minden olyan paraméterkombinációra, amelyre a fenti egyenlet teljesül, az egyensúlyi helyzet lokálisan aszimptotikusan stabil, ellenkező esetben instabil. Ezt a kvalitatív tulajdonságot úgynevezett stabilitási térképen szemléltetjük a 4. ábrán a két legfontosabb technológiai paraméter függvényében, amelyek a $v_0$ forgácsolási sebesség és $w_0$ forgács szélesség (amely átszámolható a $H_c$ fajlagos forgácsolái együtthatóra az *m* tömeg leosztásával).

A 4. ábrán látható, hogy jelen erőkarakterisztika esetén, az adott $v_{\max}$ sebességnél alacsonyabb sebességtartományon bármilyen forgács szélességre stabil lesz az egyensúlyi helyzet. Továbbá, az instabil egyensúlyi helyzet legalsó pontja 80 mm/perc forgácsolási sebességnél és 4.5 mm forgácsszlességnél található. Ez alapján 4.5 mm forgácsszélességnél kisebb fogások esetén az egyensúlyi helyzet mindig stabilnak mondható. Ezzel egy robusztus tartományt kijelölve ($v_0 < 60$ m/perc és $w_0 < 4.5$ mm) az egyensúlyi helyzetre nézve. Valamint látható, hogy az instabil esetekben (például $v_0 = 150$ m/perc és $w_0 = 15$ mm) az egyensúlyi helyzet stabilizálható nemcsak a forgácsolási sebesség csökkentésével, de növelésével is. Megjegyzendő, hogy a lineáris stabilitási határ relatíve magasabb forgács szélességeknél található, azonban a további fejezetekben található nemlineáris vizsgálatok során kimutatjuk, hogy egy robusztusan stabil határ már jóval alacsonyabb forgácsszélességek esetén fordul majd csak elő.

## 3. Bifurkáció analízis

A rendszeren további vizsgálatokat végzünk el a nemlineáris és a nem-sima hatások feltárására. A nemlineáris hatás következménye egy esetlegesen kialakuló periodikus pálya létrejötte lehet az egyensúlyi helyzet körül [12], amely vizsgálatára bár létezik analitikus számítási algoritmus (normák formák, hopf bifurkáció analízis), azonban ezen periodikus pályák további vizsgálata a nem sima rendszeren már nehezen kezelhető analitikusan [14]. Ezért ezen vizsgálatokat numerikus algoritmusok segítségével oldjuk meg. Ehhez először definiálunk egy kapcsolóvonalat – melyet jelöljön $\Sigma = \{x: H(x) = 0\}$ – amely jól elkülöníti a két állapotot, azaz hogy történik forgácsolás vagy nem történik forgácsolás. A fizikai tartalma annak az esetnek amikor nem történik forgácsolás az, amikor a szerszám nagyobb sebességgel távolodik a forgácsfronttól "el-rezeg", mint annak $v_0$ forgácsolási sebessége. Ebben az esetben nincs kontakt a forgácsolószerszám és a munkadarab (forgácsfront) között, ezáltal nem lép fel forgácsoló erő. A kapcsolóvonal fizikai tartalmának szemléltetése: ez az eset akkor léphet fel amikor a szerszám "rezgési" sebessége és a munkadarab (forgácsfront) vágási sebessége megegyezik, azaz a relatív sebességük 0. Ebben az esetben a szerszám pontosan együtt halad a forgácsfronttal.
Jelen modellre igaz az, hogy a $\Sigma$ kapcsolóvonalon uralkodó dinamika megegyezik az $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})$ (vág) és $\mathbf{F}_2(\mathbf{x})$-vel (nem vág) jelölt dinamikai rendszerekre, tehát az alábbi egyenlőség teljesül, mivel $V(0) = 0$, tehát az átmenet $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ között szakadásmentes [8]:

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\Sigma} = \mathbf{F}_2(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\Sigma}. \tag{9}$$

Ez azt jelenti, hogy ilyen forgácsolási erőkarakterisztikát feltételezve nemalakulhat ki úgynevezett "Csúszó régió" (*Sliding region*), amelynél a megoldás (trajektória) nem metszi, hanem rajta marad a $\Sigma$ kapcsolóvonalon.
Ettől függetlenül vizsgáljuk meg a nem-simaság hatását a periodikus pályákra. Ehhez a már előbb említett okokból kifolyólag numerikus számítási algoritmusokat alkalmazunk. Mérnöki szempontból célszerű lehet megvizsgálni, hogy adott technológiai paraméter(ek)nek milyen hatása van nemcsak az egyensúlyi helyzetel lokális tulajdonságaira, hanem a globális dinamikai viselkedésre is. Ennek érdekében a vizsgálatokhoz először szükséges megtalálni a periodikus pályákat, majd ezen pálya változását követni egy vagy több technológiai paraméteren. Ezen vizsgálatnak egy lehetséges megoldása az úgynevezett "nyers erő" (*brute force*) módszer, amikor numerikusan integráljuk a differenciálegyenletünket és minden számunkra érdekes technológiai paramétert végigsöprünk a mérnökileg reális paramétertartományon. Azonban ez a módszer számításigény szempontjából gazdaságtalan, ugyanis egy periodikus pálya megtalálásához

"elegendően sokáig" kell szimulálnunk (integrálnunk) az adott rendszert, hogy a tranziens hatások teljesen kihaljanak és ténylegesen periodikus pályát találjunk. Ezért a szimulációk elejét eldobjuk, amelyre nagy mennyiségű számítási erőforrást kellett fordítani. További probléma lehet a numerikus szimulációval, hogy nemlineáris rendszereknél a megtalált megoldás függ a kezdeti feltételtől, valamint instabil periodikus pályák megtalálására egyszabadságfokú modelleken kívül nehézkes.
Ezért mi a periodikus pályák követésére egy pszeudó-ívhossz módszeren alapuló kollokációs peremétrékmegoldó eljárást alkalmazunk. A követni kívánt paraméter a $H_c$ fajlagos forgácsolási együttható, melyet a továbbiakban bifurkációs paraméterként kezelünk, melyre a szokásos $\mu$ jelölést használjuk.

### *3.1. Peremérték feladat*

Legyen $x_p(t)$ egy periodikus pálya $T$ periódusidővel, (azaz $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(T)$). Továbbiakban az egyszerűség kedvéért elhagyjuk a p alsóindexes jelölést. Vegyük észre, hogy $\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \mathbf{x}(\mathrm{t} + T)$ is igaz tetszőleges $t$-re. Peremérték feladatként megfogalmazva a fenti feladatot az alábbi formában adható meg

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mu) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}(T) \end{aligned}, \tag{10}$$

ahol a $T$ periodusidő ismeretlen.
Bevezetve egy $\tau = t/T$ dimenziótlan időt, a dimenziótlan idő szerinti deriválást jelöje

$$\blacksquare' = \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\blacksquare = \frac{1}{T}\frac{d}{d\tau}\blacksquare; \quad \left(\dot{\blacksquare} = \frac{d}{dt}\blacksquare\right) \tag{11}$$

Ezzel a peremérték feladat (lásd (10) egyenlet) dimenziótlan idővel átírva az alábbi módon alakul

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(\tau) &= T\mathbf{F}(\mathbf{x}(\tau), \mu) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}(1) \end{aligned}. \tag{12}$$

További szükséges feltétel hogy a peremfeltétel rajta legyen a periodikus pályán, azaz, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ feltétel teljesüljön, ahol $\mathbf{x}_0$ a periodikus pálya egy pontja. Ezt a folyamatot "inicializálásnak" hívjuk, amely során egy periodikus pályát numerikus szimulcáió segítségével állítunk elő.
Ezt követően a (12) egyenletrendszer megoldható peremértékmegoldó algoritmusokkal. Mi a MATLAB programcsomag bvp5ca beépített függvényét alkalmazzuk.

### *3.2. Paraméter követés*

Bifurkációs paraméter követésére egy használt módszer a paraméter léptetés, amikor ismert a (12) egyenlet megoldása ($\mathbf{x}_i$ és $T_i$) adott $\mu_i$ értéknél, és keressük $\mu_{i+1} = \mu_i + \Delta\mu$-nél. A peremérték feladat az alábbi módon fogalmazható meg

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i'(\tau) &= T_{i+1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_i(\tau), \mu_{i+1}) \\ \mathbf{x}_{i+1}(0) &= \mathbf{x}_{i+1}(1) \equiv \mathbf{x}_0 \end{aligned}, \tag{13}$$

ahol $T_i$ és $\mathbf{x}_{i+1}$ a keresett ismeretlen mennyiségek, valamint $\mu_{i+1}$ megváltozott bifurkációs paraméter ismert. A megoldáshoz szükségünk van még egy "Fázis feltételre" (*Phase Condition*), amely az alábbi módon definiálható:

$$\langle \mathbf{x}_{i+1}(0) - \mathbf{x}_i(0), \mathbf{F}(\mathbf{x}_i(0), \mu_i) \rangle = 0, \tag{14}$$

ahol $\langle \blacksquare, \blacksquare \rangle$ két vektor skalárszorzását jelöli. A peremérték feladat számításának inicializálása, azaz kezdeti becslés megadása az $\mathbf{x}$ periodikus pályára és $T$ periodisudőre történhet az előző pályából, azaz

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} \approx \mathbf{x}_i \\ T_{i+1} \approx T_i \end{cases} \tag{15}$$

vagy extrapolációval az előző két ismert pályából, ahogy azt az 5. ábra szemlélteti. Ezen módszernek is megvannak a maga hátrányai, így mi a vizsgálatunk során egy pszeudó ívhossz módszeren alapuló eljárást alkalmaztunk a periodikus pályák követésére.

### *3.3. Pszeudó ívhossz módszer*

A pszeudó ívhossz alapgondolata, hogy a keresett megoldás az előzőleg kiszámított megoldásokból származtatott $\mathbf{v}$ irányra merőleges irányban keresi. A $\mathbf{v}$ irány definiálása az alábbi módon történik

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1}}{||\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1}||}, \tag{16}$$

ahol $\mathbf{y}_i$ az előző lépésekben számított megoldásokat jelöli. A feladat megfogalmazása az alábbi egyenletrendszerrel adható meg

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i, \mathbf{v} \rangle - h &= 0 \\ G(\mathbf{y}_{i+1}) &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

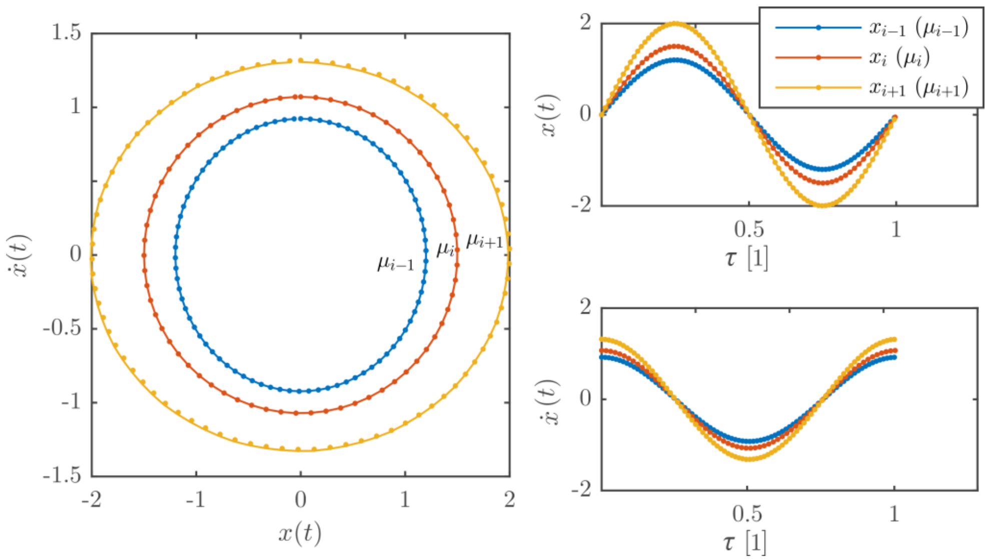
ahol $G(\mathbf{y})$ egy implicit formában megadható függvény és $h$ a számítási lépésköz.
Alkalmazzuk a módszert periodikus pályák követésére. Jelölje $\mathbf{y}_i = [\mu_i \;\; T_i]^{\mathrm{T}}$ az ismeretlen állapotváltozók paramétereit, úgymint $\mu$ bifurkációs paramétert és $T$ periódusidőt az adott $i$-dik megoldási lépésben. Továbbá, definiáljuk a $G(\mathbf{y}_i)$ implicit egyenletet az alábbi módon:

$$G(\mathbf{y}_i) = T_i - T_{\mathrm{BVP}}(\mu_i), \tag{18}$$

ahol $T_{\mathrm{BVP}}(\mu_i)$ a 3.1 fejezetben definiált peremérték megoldó algoritmusból számított $T$ periódusidó egy adott $\mu$ paraméterre. Ezáltal az (17) egyenlet módosul az alábbi módon

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i, \mathbf{v} \rangle - h &= 0 \\ T_{i+1} - T_{\mathrm{BVP}}(\mu_{i+1}) &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Nem-sima rendszerek esetén előforduló több szegmensől álló periodikus pálya esetén, azaz amikor a periodikus pálya metszi a $\Sigma$ kapcsolóvonalat, kibővítjük a megoldandó rendszerünket az alábbi módon:




**5. ábra. Periodikus pályák kollokációjának szemléltetése**

$$\mathbf{G}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} T_1\mathbf{F}_1(\mathbf{Y}) \\ T_2\mathbf{F}_2(\mathbf{Y}) \end{bmatrix}, \tag{20}$$

ahol $\mathbf{Y} = [\mathbf{x}_1 \;\; \mathbf{x}_2]^\mathrm{T}$ a periodikus pálya szegmenesei az $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ rendszerekben, valamint $T_1$ és $T_2$ az arra a szegmensre vonatkozó periódusidő ($T = T_1 + T_2$).
A módosult peremfeltételek:

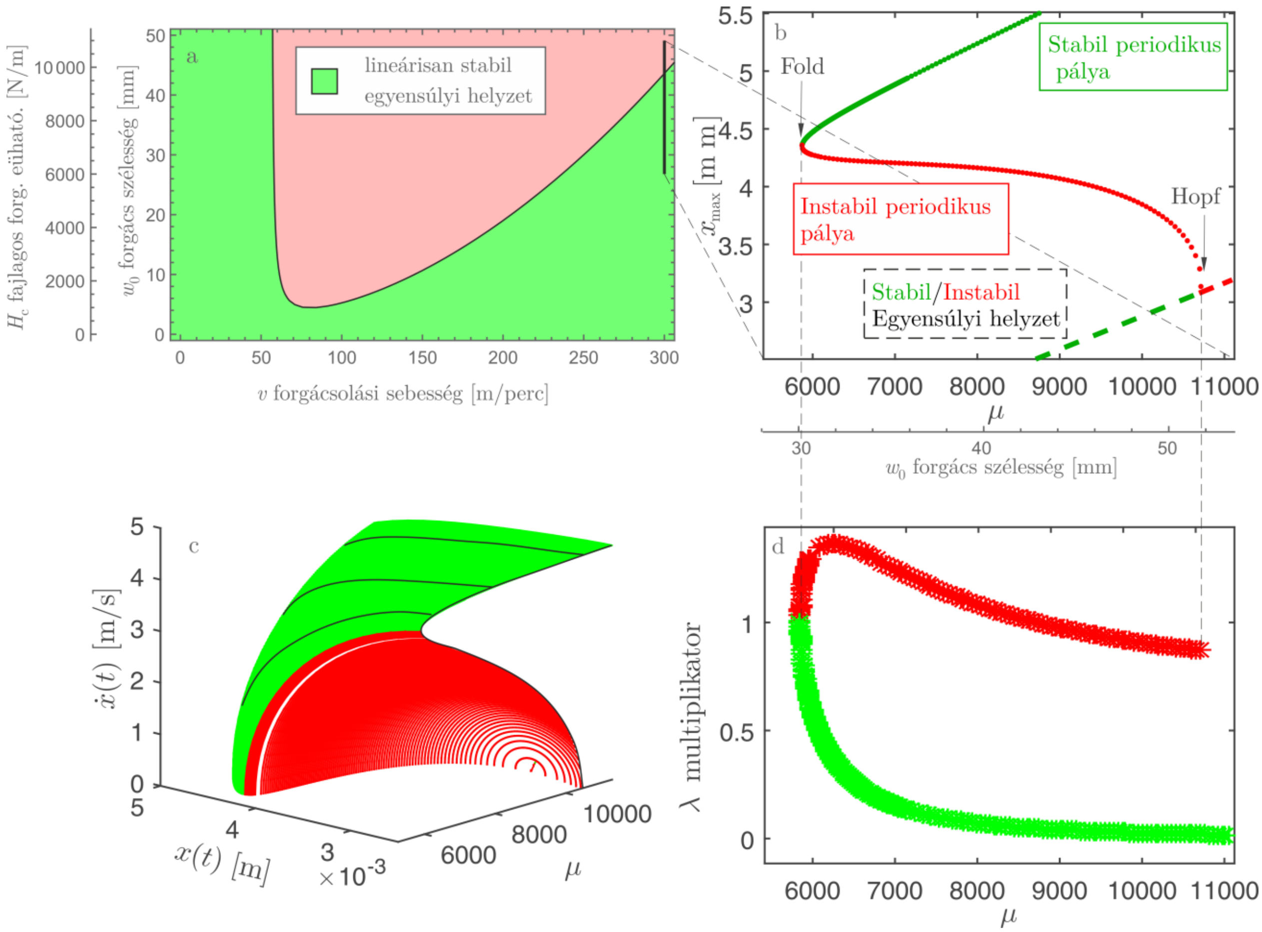
$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(0) = \;\; \mathbf{x}_2(1) \\ \mathbf{x}_2(0) = \;\; \mathbf{x}_1(1) \end{cases}, \quad . \tag{21}$$
$$\begin{cases} H(\mathbf{x}_1(0)) = 0 \\ H(\mathbf{x}_2(1)) = 0 \end{cases}$$

*3.4. Alkalmazás egy teszt-példán*

Továbbiakban reális paraméterek mellett vizsgáljuk a nemlineáris és nem-sima hatásokat az (1) egyenleten. Egyensúlyi helyzetek lineáris stabilitási térképét a 3.3a ábra szemlélteti. Egy adott forgácsolási sebesség esetén ($v_0 = 300$ [m/perc]) periodikus pálya változását követtük a $\mu$ bifurkációs paraméter mentén, az előbbi fejezetben tárgyalt pszeudó ívhossz módszer alkalmazásával. A periodikus pályák változását a 3.3bc diagrammok szemléltetik 2 és 3D ábrázolásban, amelyeket részletesebben következő fejezetben tárgyal. A kialakuló periodikus pályák stabilitása a következő alfejezetben bemutatott módszerrel határozható meg.

*3.5. Periodikus pályák stabilitásvizsgálata*

A periodikus pálya stabilitását az ún. monodrómia mátrix kiszámításával lehet vizsgálni [7], amely a




**6. ábra a) Lineáris stabilitási határ, fekete vonal: nemlineárisan vizsgált tartomány; b) bifurkációs diagram $v_0 = 300$ [m/perc] forgácsolási sebességnél. Zöld és piros szaggatott vonal: stabil és instabil egyensúlyi helyzetek, zöld és piros görbék: stabil és instabil periodikus pályák, c) periodikus pályák 3D-ben történő ábrázolása; d) karakterisztikus multiplikátorok; Paraméterek: $m = 1$ [kg], ζ=0.05 [-], $\omega_n = 260$ [Hz], $K_c = 1200$ [MPa], $h_0 = 0.2$ [mm], $v_{max} = 60$ [m/perc]}**

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_p(t))\boldsymbol{\xi} \tag{22}$$

variációs egyenlet fundamentális megoldása $t = T$-ben. Periodikus pálya körüli linearizálás során $\mathbf{F}_x$ a differenciálegyenlet Jacobi mátrixa $F_{x_{i,j}} = \partial F_i / \partial x_j$), amelybe az $\mathbf{x}_p(t)$ periodikus pálya van behelyettesítve, ezáltal időfüggő $T$ periodusidővel. Kiszámítandó $\boldsymbol{\xi}(T)$ a $T$ helyen úgy, hogy az egyes irányokba vett egységvektor van előírva kezdeti feltételként.
Jelölje $\boldsymbol{\xi}_i(t)$ a (22) egyenlet megoldását az $\boldsymbol{\xi}_0 = [0 \ \ldots 0 \ 1 \ 0 \ \ldots 0]^T$ kezdeti értékről indítva, amelyben csak az $i$-dik tag nemzérus elemű. Ekkor az $\mathbf{M}$ monodrómia mátrix megadható

$$\mathbf{M} = [\boldsymbol{\xi}_1(T) \quad \boldsymbol{\xi}_2(T) \quad \ldots \quad \boldsymbol{\xi}_n(T)], \tag{23}$$

amelynek sajátértékei az úgynevezett $\lambda$ karakterisztikus multiplikátorok. Az $\mathbf{x}_p(t)$ periodikus pálya stabil, ha

$$|\lambda_i| \leq 1 \qquad i = 1,2,\dots,n;\text{ itt } n = 2 \tag{24}$$

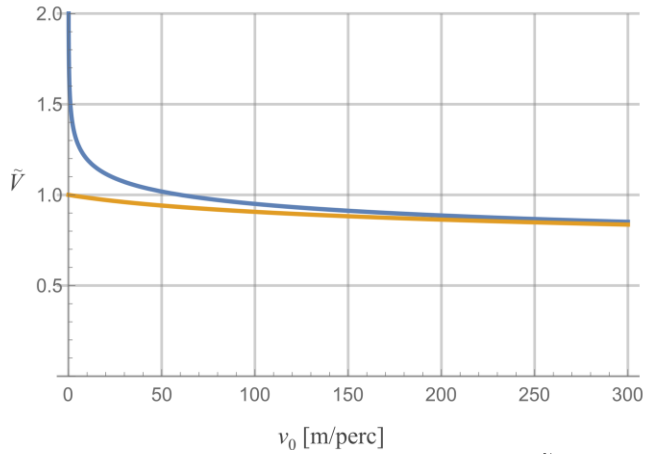
azaz minden karakterisztikus multiplikátor abszolutértéke kisebb mint 1 (jelen esetben $n = 2$). Megjegyzendő, hogy ezen monodrómia mátrixnak egyik sajátértéke mindig 1, amely a fázis eltolhatóságát jelenti.
Ezen számítási algoritmust alkalmazva az előző fejezetben bemutatott periodikus pálya követési algoritmusra, meghatározható a periodikus pályák stabilitása, ahogyan azt a 3.3bcd ábra szemlélteti.
A 3.3b bifurkációs diagrammon látható, hogy az egyensúlyi helyzet (szaggatott piros és zöld vonal) stabilitási határából $\mu = 10760$-nál leágazik egy instabil határciklus (piros folytonos görbe), amely szubkritikus Hopf-bifurkáció jelenlétére utal. Továbbá, ezen instabil periodikus pálya "visszafordul" és átvált egy Fold típusú bifurkáción keresztül ( $\mu = 5870$ ) stabil határciklussá. Ezáltal a fázisportrén $\mu = [5870{,}10760]$ tartományon a stabil egyensúlyi helyzetet egy instabil határciklus ölel körbe, amit egy stabil határciklus burkol.
Ezen bistabilitást (1 stabil egyensúlyi helyzet és 1 stabil határciklus) a szerszámgéprezgéssel foglalkozó szakirodalom "nem biztonságos zónának" (*unsafe zone* [13]) nevezi, ugyanis a kezdeti feltételektől függően a rendszer a stabil egyensúlyi helyzetre vagy a stabil periodikus pályára áll rá. Másképpen megfogalmazva, a stabil egyensúlyi helyzetről egy megfelelően kicsi perturbációval "letéríthető" a megoldás és ezáltal egy rezgőmozgás alakulhat ki (stabil periodikus pálya).
Megjegyzendő, hogy a $\mu$ bifurkációs paraméter követése során a periodikus pálya még irreálisan nagy értékek esetén sem érte el a $\Sigma$ kapcsolóvonalat, azaz a rendszer vizsgálható lenne sima rendszerként. Ennek oka a forgácsolóerő karakterisztikában keresendő, mégpedig, hogy 0 forgácsolási sebességekre az alkalmazott karakterisztika 0 erőt ad. Ennek érdekében a következő fejezetben egy módosított erőkarakterisztikát alkalmazunk, amely bár kis fordulatszámon nem megfelelően írja le a mért forgácsolóerő karakterisztikát, de 0 forgácsoló sebességre nem 0 erőt eredményez, amely esetben úgynevezett Filippov rendszerről beszélhetünk, ugyanis szakadás lesz az erőkarakterisztikában azaz $C^0$ folytonosság sem teljesül.

## 4. Módosított mechanikai modell, nem-sima vizsgálatok

A következő fejezetben módosítjuk az első fejezetben használt $V(t)$ forgácsolóerő sebességfüggő hatását karakterisztikát és a gyakorlatban és szakirodalomban széles körben publikált formulát vizsgáljuk, amely a következőképpen adható meg

$$\hat{V}(t) = v(t)^{-0.1}. \tag{25}$$

Ezen függvény karakterisztikája magasabb forgácsolási sebességtartományon megfelelően jól közelíti a mérési eredményeket, azonban alacsony forgácsolási sebességeknél nem mutatja a forgácsoló erőkarakterisztika jellegét (lokális erőmaximum; lásd 1. ábrán). További probléma ezzel a formával, hogy a $\hat{V}(t)$ függvénynek $v(t) = 0$-ban szingularitása van ($\lim_{v(t)\to 0}\tilde{V}(t) =$ inf), amely fizikai szempontból sem reális (végtelen nagy erőt feltételezne nulla forgácsolási sebesség mellett, lásd 6. ábrán kék görbe).
Ezt a problémát feloldandó, vezessünk be egy új $\tilde{V}(t)$ formafüggvényt (lásd 6. ábrán barna




**7. ábra. A forgácsolási erő sebességfüggését leíró $\tilde{V}(t)$ és $\hat{V}(t)$ nemlineáris formafüggvények**

görbe), amely a $\hat{V}(t)$ függvény eltolással történő módosítása, ezzel kiküszöbölve a szingularitási problémát, vagyis $\tilde{V}$-nek $v(t) = 0$-ban vett határértéke egy konkrét érték $\lim_{v(t)\to 0}\tilde{V}(t) = \text{const.}$ Tehát a módosított $\tilde{V}$ erőkarakterisztikában toljuk el a függvényt egy offset értékkel. Az egyszerűség kedvéért az eltolást válasszuk 1-nek.

$$\tilde{V}(t) = (v(t) + 1)^{-0.1}. \tag{26}$$

*4.1. Filippov rendszer*

A választott erőkarakterisztikának 0-ban szakadása van, azaz $C^0$ folytonosság sem teljesül, ezáltal úgynevezett Filippov típusú nem-sima rendszert kapunk, amelynél a kapcsolóvonal által elválaszott fázisportrén már a sebességekben törés ($C^0$ folytonos), a gyorsulásokban szakadás van. Az előző modell esetében a gyorsulásokban törés van ($C^0$ folytonos), míg a sebesség $C^1$ folytonos.

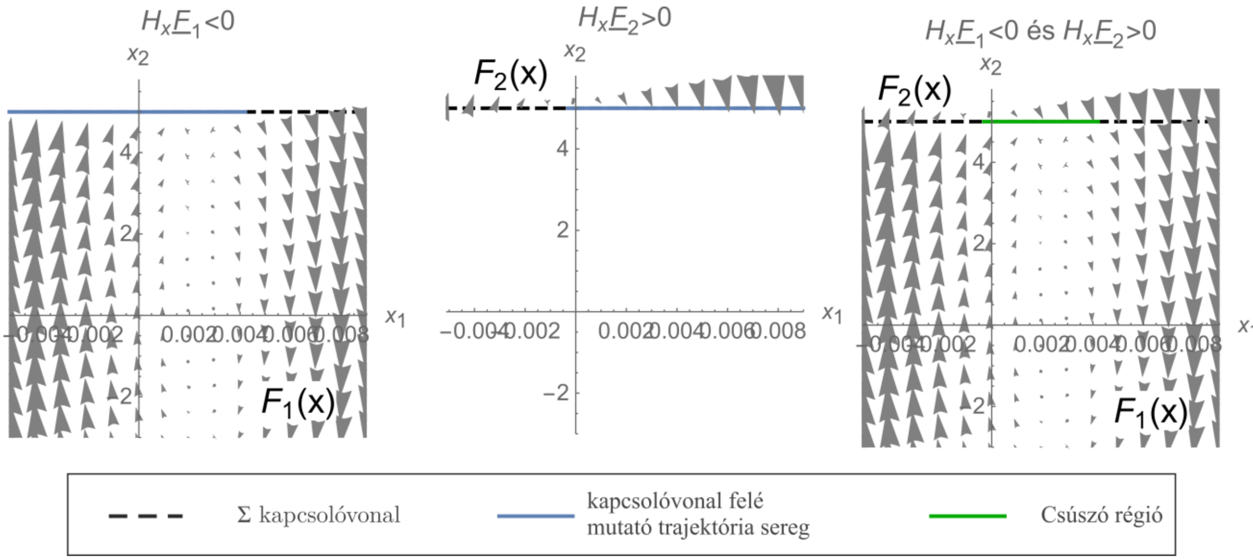
Alkalmazva a 2. ábrán bemutatott modellre ezen módosított erőkarakterisztikát, a (3) egyenletben szereplő $V(t)$ formafüggvényt kicseréljük a módosított $\tilde{V}(t)$ formafüggvényre. Így a rendszert leíró modellt a továbbiakban jelölje $\tilde{\mathbf{F}}_1(\mathbf{x})$ és $\tilde{\mathbf{F}}_2(\mathbf{x})$.

*4.2. Cúszó régió, „Sliding region”*

A dinamikai modellen alkalmazott erőkarakterisztika esetén a $\Sigma$ kapcsolóvonalon uralkodó dinamika nem egyezik meg az $\tilde{\mathbf{F}}_1(\mathbf{x})$ (vág) és $\tilde{\mathbf{F}}_2(\mathbf{x})$-vel (nem vág) jelölt dinamikai rendszerekre, azaz:

$$\tilde{\mathbf{F}}_1(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\Sigma} \neq \tilde{\mathbf{F}}_2(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\Sigma}. \tag{29}$$

Definiáljunk a kapcsolóvonal gradiensét, amely a kapcsolóvonalra merőleges, a növekedés irányába mutató vektormező:




**8. ábra. Csúszó mód szemléltetése; Bal: kapcsolóvonal kékkel jelöltrésze, ahová az $\tilde{\mathbf{F}}_1$ dinamikai rendszer trajektóriái közelítenek; Középső: kékkel jelölt része, ahová az $\tilde{\mathbf{F}}_2$ dinamikai rendszer trajektóriái közelítenek; Jobb: kapcsolóvonal zölddel jelölt része, ahol a mindkét oldalról határoló $\tilde{\mathbf{F}}_1$ és $\tilde{\mathbf{F}}_2$ dinamikai rendszerek trajektóriái közelítenek, azaz létrejön a csúszás**

$$\nabla H = \mathbf{H}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} & \frac{\partial H}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial H}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{30}$$

Csúszó régiónak ("*Sliding region*") nevezzük a $\Sigma$ kapcsolóvonal azon részét, amelyre igaz, hogy [8]

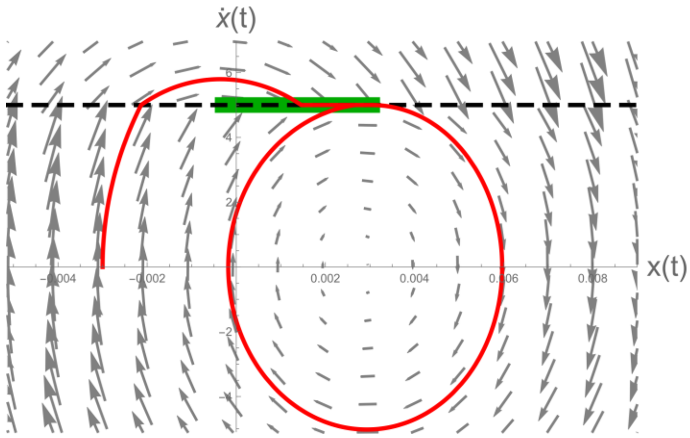
$$\begin{aligned} \langle \mathbf{H}_x, \tilde{\mathbf{F}}_1 \rangle &< 0 \\ \langle \mathbf{H}_x, \tilde{\mathbf{F}}_2 \rangle &> 0 \end{aligned}. \tag{31}$$

A csúszó régió a kapcsolóvonal azon része, ahol a két szomszédos fázistartományok át akarják "lökni" a dinamikát az egyik oldalról a másik oldalra, azaz esetünkben mindkét irányból vonzó. Ahol mindkét fázistartomány oldaláról teljesül ez a jelenség, ott a dinamika "rátapad" a kapcsolóvonalra. Másképpen úgy is megfogalmazhatnánk, hogy a kapcsolóvonal azon része, ahol a határoló fázistartományokat jellemző iránymező közeledik a $\Sigma$ kapcsolóvonalra (lásd a 7. ábra). Jelen dinamikai modellre a (31) egyenlet alapján az alábbi tartományon alakul ki csúszó mód a $\Sigma$ kapcsolóvonalon

$$-2v_0\zeta < x(t) < \frac{H_c}{\omega_n^2} - \frac{2v_0\zeta}{\omega_n}. \tag{32}$$

A kapcsolóvonalon uralkodó dinamikát jelölje $\tilde{\mathbf{F}}_\Sigma$, kiszámítási módja a kapcsolóvonalat határoló két dinamikai rendszer súlyozott arányából történik az alábbi módon:

$$\tilde{\mathbf{F}}_\Sigma = (1-\alpha)\tilde{\mathbf{F}}_1 + \tilde{\mathbf{F}}_2\alpha, \tag{33}$$




**9. ábra. Numerikus szimuláció; Paraméterek: $m = 1$ [kg], $H_c = 9100[N/m]$, $\zeta = 0.05$ [-], $\omega_n = 260$ [Hz], $K_c = 1200$ [MPa], $h_0 = 0.2$ [mm], $v_0 = 300$ [m/perc]**

ahol az arányossági tényező

$$\alpha = \frac{\tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{H}_x}{\mathbf{H}_x(\tilde{\mathbf{F}}_1 - \tilde{\mathbf{F}}_2)}. \tag{34}$$

(34) egyenletet visszahelyettesítve (33)-ba adódik a csúszó régión uralkodó dinamika

$$\tilde{\mathbf{F}}_\Sigma = [v_0 \quad 0]^{\mathrm{T}}. \tag{35}$$

amely megfelel a fizikailag elvárt képne, azaz együtt mozog ($\dot{x} \equiv v_0$). A csúszó mód létezéséről numerikus szimulációval is meggyőződhetünk a (27) egyenlet időbeli integrálásával. Ezt egy tesztpéldárán az 8. ábra szemléltetéti. Látható hogy a $\mathbf{x}_0 = [-0.003 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ kezdeti feltétellel indított szimuláció során a trajektória átmegy $\Sigma$ kapcsolóvonalon az $\tilde{\mathbf{F}}_2$ dinamikával leírt tartományra, majd ráment a vastag zöld vonallal jelölt csúszó régióra. Itt "rátapadt" a kapcsolóvonalra és a (35) egyenlet által leírt dinamikával haladt tovább a (32) egyenletben megadott tartományig, majd letért róla és egy stabil periodikus megoldás formájában állandósult.
Megjegyzendő, hogy a csúszás kifejezés matematikai értelemben vett csúszást jelent, amikor a trajektóriák egy meghatározott kapcsolóvonalon mozognak. A matematikai értelemben vett csúszás fizikai jelentése gyakran pont egy ellentétes jelenség, fizikailag itt ugyanis a szerszám és munkadarab sebessége azonos, tehát mintha össze"tapadva" együtt mozognának.

## 5. Összefoglalás

Jelen tanulmányban a legegyszerűbb forgácsolási folyamat sebességfüggő erőkarakterisztikáját vizsgáltuk egy egyszabadságfokú lengőrendszeren. Ezen erőkarakterisztika nemlineáris és nem-sima mivoltából adódóan bemutatásra került két különböző sebességfüggő hatást leíró erőkarakterisztika. Ezen modelleken bemutattuk, a nem-sima mozgásegyenleteket. Először az első modell egyensúlyi helyzeteinek lineáris stabilitási tulajdonságait, majd egy adott tesztpéldára nemlineáris viselkedését tanulmányoztuk. A kialakuló periodikus pályák követésére pszeudó ívhossz módszeren alapuló peremérték megoldó algoritmust alkalmazásával kimutattuk, hogy még

a sima rendszeren is létrejöhetnek úgynevezett "veszélyes zónák" (*unsafe zone*). Azaz, az egyensúlyi helyzet Hopf bifurkációs pontjából kinövő instabil határciklus egy Fold típusú bifurkáción keresztül stabilizálódik, ezáltal létrehozva egy bistabil tartományt. A periodikus pályák stabilitási tulajdonságának meghatározása a periodikus pálya körüli linearizálással történt. Továbbá, ezen modell vizsgálata rámutatott arra, hogy fizikai értelemben reális paramétertartományok esetén nem jön létre kilépés (váltás különböző dinamikai rendszerek között). Az esetlegesen kialakuló instabil periodikus pályát egy stabil határciklis veszi körül, amelynek sebességamplitúdója nem éri el a kilépés/kapcsolás feltételét. Ennek a Fold típusú bifurkációnak az oka elképzelhető, hogy a nemlineáris karakterisztika lokális maximumának és infelciós pontjának tudható be.
Továbbá, a második bemutatott mechanikai modellen, bemutattuk, hogy a "Csúszó régió" (*Sliding region*) jöhet létre olyan esetekben, ahol a kapcsolóvonal mindkét oldalról vonzza a határoló dinamikai rendszereket. Megadtuk, a csúszó régió létrejöttének feltételét és elődordulásának tartományát. Azaza kapcsolóvonal azon szakaszát, ahol a dinamika rátapadhat arra. Ezt a jelenséget a kilépéses rendszer numerikus szimulációjával is alátámasztottuk, továbbá bemutattuk, hogy így egy stabil határciklus keletkezik.
Továbbfejlesztési lehetőségekként szerepel, hogy az első mechanikai modellen a periodikus pálya Fold bifurkációs pont követésével meghatározhatóvá válna a "veszélyes zóna" a stabilitási térképen. Ez két paramétert követő pszeudo ívhossz módszerrel megoldható abban az esetben, ha további egyenleteket adunk a megoldandó egyenletrendszerhez. Illetve, a második mechanikai modellen szeretnénk megvizsgálni egy grazing bifurkáció esetét, amikor is egy periodikus pálya érinti a kapcsolóvonalat.
Tehát, a bemutatott modellek alátámasztották, hogy a forgácsolásnál létrejövő sebességfüggő hatásnak jelentős szerepe lehet a stabilitási tulajdonságokra, amely elkerülése érdekében fontos alaposan vizsgálni. Megjegyzendő, hogy a két alkalmazott modell közül egyik sem fedte le tökéletesen a mérési eredményeket. Valószínűleg a legmegfelelőbb alkalmazott erőkarakterisztika a két formafüggvény kombinálásából adódna, azaz teljesüljenek az alábbi feltételek: alacsony forgácsolási sebességeknél lokális maximuma legyen a forgácsolóerőnek (Ezt az elsőként bemutatott modell teljesítette). Valamint, 0 forgácsolási sebességnél konstans forgácsoló erő adódjon, ami a súrlódásból keletkező járuláékos erő miatt fizikailag is reális elgondolás (ezt a bemutatott modellek közül a második teljesítette).

**Köszönetnyilvánítás**
A kutatás az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok (OTKA PD112983) támogatásával készült.

**Irodalomjegyzék**

[1] Tobias, S. A., Machine tool vibration, Blackie and Son, Ltd., London, 1965.
[2] Altintas, Y.: Manufacturing Automation. University Press, Cambridge, UK, 2012
[3] Altintas, Y., Budak E., Analytical prediction of stability lobes in milling, CIRP Ann-Manuf Techn, vol. 44, pp. 357-362, 1995.
[4] Grabec, I.: Chaotic dynamics of the cutting process, Int. J. Mech. Tools Manufact, 28, 19-32, 1988

[5] Wiercigroch, M., Krivtsov, A. M.: Frictional chatter in orthogonal metal cutting, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 359.1781 (2001): 713-738.
[6] Gantmacher, F.: Lectures in Analytical Mechanics. MIR Publishers (1975), ISBN-13: 978-0846405511
[7] Farkas, M.: Periodic motions. Springer-Verlag, New York. (1994)
[8] Filippov, A.: Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides. Kluwer Acedemic Publishers (1988)
[9] di Bernardo, M., Budd, C.J., Champneys, A.R., Kowalczyk, P.: Piecewise-smooth Dynamical Systems. Springer (2008)
[10] Ding, W., Self-Excited Vibration. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
[11] Arnold, V. I., Ordinary Differential Equations. MIT Press, Cambridge, MA, 1998.
[12] Wiggins, S.: Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, 2nd edn. Springer (2003)
[13] Kuznetsov, Y. A., Rinaldi, S., Gragnani, A.: One-parameter bifurcations in planar Filippov systems. International Journal of Bifurcations and Chaos 13(8), 2157–2188 (2003)
[14] Dombovari, Z., Wilson, R. E., Stepan, G., Estimates of the bistable region in metal cutting, P Roy Soc A Math Phy, vol. 464, pp. 3255-3271, 2008

**Lektorálta: Dr. Insperger Tamás**