A SMITH-PREDIKTOR IDŐTARTOMÁNYBELI VIZSGÁLATA

ANALYSIS OF THE SMITH PREDICTOR IN TIME DOMAIN

Hajdu Dávid, Insperger Tamás***

ABSTRACT

Time domain representation of the original Smith Predictor is presented for systems with feedback delays. It is shown that if the parameters in the internal model of the predictor are not equal to the parameters of the real system, then the dimension of the closed loop system is double of the dimension of the open-loop system. Furthermore, it is shown that the original Smith Predictor can stabilize unstable plants for some extremely detuned internal model parameters. Thus the general concept that the Smith Predictor is not capable to stabilize unstable systems is technically not true.

1. BEVEZETÉS

Zárt szabályozási körök stabilitási tulajdonságait jelentősen befolyásolhatja a kimenet és a bemenet megjelenése között eltelt holtidő [1,2]. A visszacsatolási időkésés kompenzálásának egyik leggyakrabban használt módszere a prediktív szabályozás, melynek a lényege az, hogy a szabályozott jellemzők aktuális értékét egy belső modell alapján megbecsüljük, és a szabályozót erre a becsült értékre alkalmazzuk. Az egyik leggyakrabban hivatkozott prediktív szabályozó a Smith-prediktor [3]. Ismert, hogy a Smith-prediktort elsősorban stabilis folyamatokra lehet sikeresen használni [4]. Azonban stabilis folyamatok szabályozása esetén is a zárt szabályozási kör stabilitása érzékeny a szabályozó által használt belső modell paramétereinek pontosságára [5]. A Smith-prediktort általában hatásvázlatával illetve átviteli függvényével definiálják. A jelen cikkben megadjuk a Smith-prediktort leíró állapotegyenleteket, és egy egyszerű egyensúlyozási feladaton keresztül szemléltetjük a zárt szabályozási kör paraméterektől való érzékenységét. Megmutatjuk, hogy nagy paraméter eltérések esetén határátmenetben a Smith-prediktor egy PD szabályozóhoz tart, amellyel akár instabil folyamatot is stabilizálhatunk.

2. A SMITH-PREDIKTOR LEÍRÁSA FREKVENCIA TARTOMÁNYBAN

A Smith-prediktor blokk diagramja az 1. ábrán látható. A szabályozott szakasz átviteli függvénye $P(s)$, a szabályozó átviteli függvénye $C(s)$, az alapjel r, a módosított jellemző u, szabályozott jellemző x és a tényleges holtidő τ. Ha a Smith-prediktor által használt belső modell átviteli függvénye $\tilde{P}(s)$ és a prediktor által használt holt idő $\tilde{\tau}$, akkor a d zavaró jel és az x szabályozott jellemző között felírt átviteli függvény a következő alakban adható meg

$$W(s) = \frac{P(s)\left(1 + C(s)\tilde{P}(s) - C(s)\tilde{P}(s)\mathrm{e}^{-\tilde{\tau}s}\right)}{1 + C(s)\tilde{P}(s) - C(s)\tilde{P}(s)\mathrm{e}^{-\tilde{\tau}s} + C(s)P(s)\mathrm{e}^{-\tau s}}. \quad (1)$$

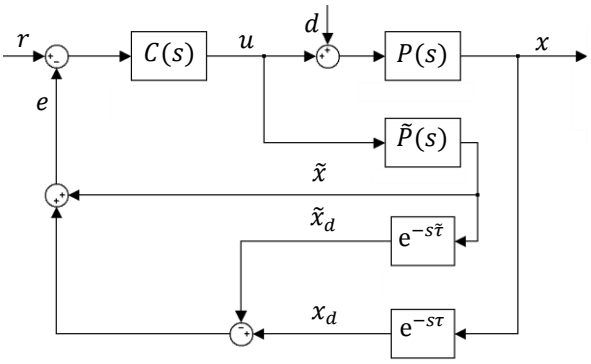
A szabályozott szakasz és a szabályozó átviteli függvényét tört alakban felírva az átviteli függvény az alábbi alakban adható meg

$$P(s) = \frac{B_1(s)}{A_1(s)}, \quad \tilde{P}(s) = \frac{\tilde{B}_1(s)}{\tilde{A}_1(s)}, \quad C(s) = \frac{B_2(s)}{A_2(s)}, \quad (2)$$

$$\Downarrow$$

$$W(s) = \frac{A_1(s)A_2(s)B_1(s) + B_1(s)\tilde{B}_1(s)B_2(s)(1 - \mathrm{e}^{-\tau s})}{A_1(s)A_2(s)\tilde{A}_1(s) + A_1(s)B_2(s)\tilde{B}_1(s)(1 - \mathrm{e}^{-\tilde{\tau}s}) + \tilde{A}_1(s)B_1(s)B_2(s)\mathrm{e}^{-\tau s}}. \quad (3)$$

Ebből az alakból látható, hogy ha $\tilde{A}_1(s) = A_1(s)$, akkor a nyitott rendszer pólusai megjelennek a zárt rendszer pólusai között. Ennek következménye, hogy pontos belső modell esetén a Smith-prediktor csak stabilis folyamatok esetén javasolt.



1. ábra A Smith-prediktor blokk diagramja

* MSc hallgató, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tsz.
** egyetemi docens, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Műszaki Mechanikai Tsz.

3. A SMITH-PREDIKTOR LEÍRÁSA IDŐTARTOMÁNYBAN

A blokkdiagram alapján a Smith-prediktor állapotegyenlete a következő alakban adható meg

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \tag{4}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), \tag{5}$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{D}\big(\mathbf{x}(t-\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(t-\tilde{\tau}) + \tilde{\mathbf{x}}(t)\big), \tag{6}$$

ahol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ az állapot változók vektora, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ a Smith-prediktor által becsült állapot változók vektora, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ a módosított jellemzők vektora, $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ a rendszer illetve a bemeneti mátrix, míg $\tilde{\mathbf{A}}$ és $\tilde{\mathbf{B}}$ a rendszer és a bemeneti mátrixok Smith-prediktor által használt modellje. A $\mathbf{D}$ mátrix tartalmazza a szabályozó erősítési tényezőit. A (6) egyenletet behelyettesítve a (4) és az (5) egyenletekbe adódik a Smith-prediktort leíró késleltetett differenciálegyenlet rendszer

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{D}\big(\mathbf{x}(t-\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(t-\tilde{\tau}) + \tilde{\mathbf{x}}(t)\big), \tag{7}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{D}\big(\mathbf{x}(t-\tau) - \tilde{\mathbf{x}}(t-\tilde{\tau}) + \tilde{\mathbf{x}}(t)\big). \tag{8}$$

Ideális esetben $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}$ és $\tau = \tilde{\tau}$, ekkor $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t)$, és a rendszer ekvivalens az n-dimneziós $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{x}(t)$ rendszerrel. Azonban ha a Smith-prediktor paraméterei nem egyeznek meg a valós rendszer paramétereivel, akkor a rendszert a (7)-(8) differenciálegyenlet-rendszer írja le, amelynek a dimenziója $2n$, azaz az eredeti rendszer dimenziójának kétszerese. A rendszer karakterisztikus egyenlete

$$\det\begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}\mathrm{e}^{-\tau s} & -\mathbf{B}\mathbf{D}\big(1 - \mathrm{e}^{-\tilde{\tau} s}\big) \\ -\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{D}\mathrm{e}^{-\tau s} & s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{D}\big(1 - \mathrm{e}^{-\tilde{\tau} s}\big) \end{pmatrix} = 0, \tag{9}$$

melynek gyökei adják a zárt szabályozási kör pólusait. A rendszer stabilitását ezért a (9) egyenlet gyökeinek vizsgálatával határozhatjuk meg.

4. MÁSODRENDŰ RENDSZER VIZSGÁLATA

Reflexkésést tartalmazó egyensúlyozási problémák egyik legegyszerűbb modelljét a következő másodrendű rendszer adja [6]

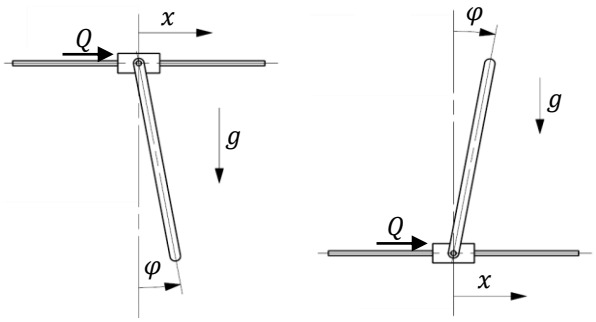
$$\ddot{\varphi}(t) + a\varphi(t) = -q(t-\tau). \tag{10}$$

A 2. ábrán látható homogén inga modellek esetén ahol φ az inga függőlegessel bezárt szögét jelöli, az a rendszerparaméter hagyományos inga esetén $a = 6g/l$, az inverz inga esetén $a = -6g/l$, ahol l az inga hossza, g pedig a nehézségi gyorsulás. A fajlagos szabályozó erő $q(t) = 6Q(t)/(ml)$ alakban adható meg, ahol m az inga tömege, $Q(t)$ pedig az aktuális szabályozó erő. Egy PD szabályozó esetén $q(t) = p\varphi(t) + d\dot{\varphi}(t)$, ahol p a propocionális és d a derivatív erősítési tényező. A megfelelő stabilitási térképeket a 3. ábra mutatja, ahol a stabil paramétertartományokat szürke színnel jelöltük (a térképeken az instabil gyökök száma is szerepel). Ismeretes, hogy ha a holtidő nagyobb egy kritikus értéknél, akkor az instabil rendszer nem stabilizálható. PD szabályozó esetén a kritikus holtidő $\tau_{krit} = \sqrt{-2/a}$, ami az inverz inga esetén $\tau_{krit} = \sqrt{l/(3g)}$ [6].

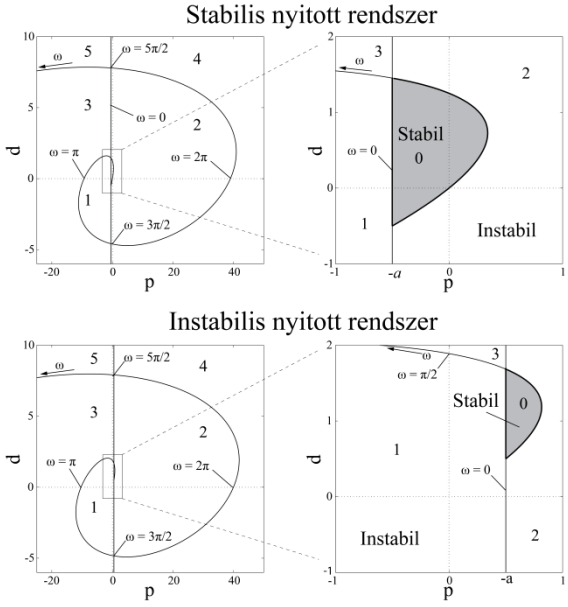
Bevezetve a

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{pmatrix}, \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

jelölést, a (10) egyenlet átírható a (4) egyenlet alakjára. A Smith-prediktor ezek után a (8)-(9) egyenletekkel vizsgálható. A belső modell által használt paramétereket ($\tilde{a}$ és $\tilde{\tau}$) hullámmal jelöljük.



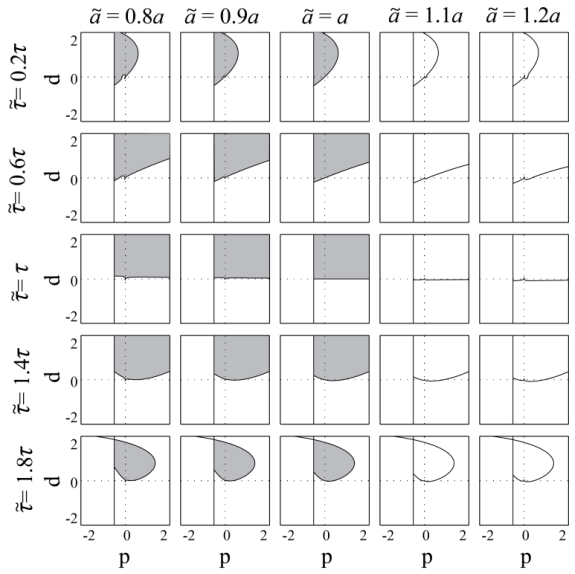
2. ábra A hagyományos és az inverz inga



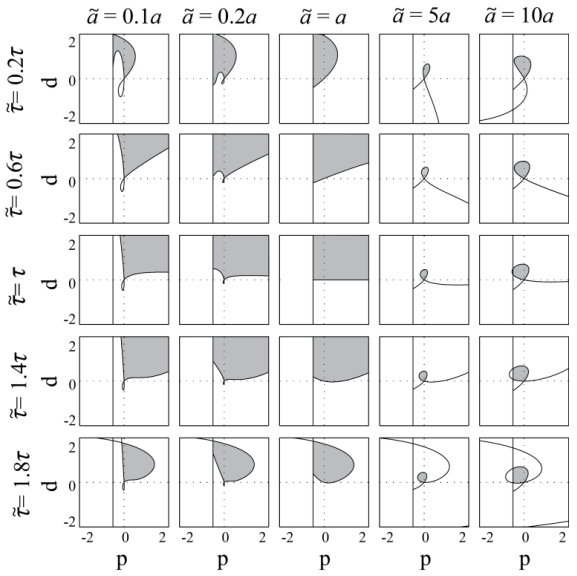
3. ábra PD szabályozóval szabályozott hagyományos inga (fent) és inverz inga (lent) stabilitási térképei $\tau = 1$ esetén

A 4. és az 5. ábra a Smith-prediktorral kompenzált stabilis nyitott rendszer stabilitási térképeit mutatja kis és nagy paraméter eltérések esetén. Látható, hogy az egyes tartományok stabilitása függ attól, hogy a belső rendszerparaméter alulról vagy felülről közelíti a valós értéket. Míg $\tilde{a} < a$ esetén jól látható a stabil tartomány, addig $\tilde{a} > a$ esetén majdnem eltűnik. A stabilitási térképek változását $\tau = \tilde{\tau}$ esetén a 6. ábra mutatja, míg az $\tilde{a} \to a$ határátmenet változásai a 7. ábrán láthatók. A 6. ábrán látható, hogy extrém nagy eltérések esetén ($\tilde{a} = 50a$) a stabilis tartomány a késleltetett PD szabályozó stabilis tartományához tart. Ebben az esetben az $\tilde{\mathbf{x}}(t-\tilde{\tau})$ az $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ tagok a (7)-es és a (8)-as egyenletekben elhanyagolhatók az $\mathbf{x}(t)$ taghoz képest. A 4. és az 5. ábrák azt is mutatják, hogy az időkésés modellezésének pontatlanságára (azaz $\tilde{\tau}$-ra) a rendszer már kevésbé érzékeny.

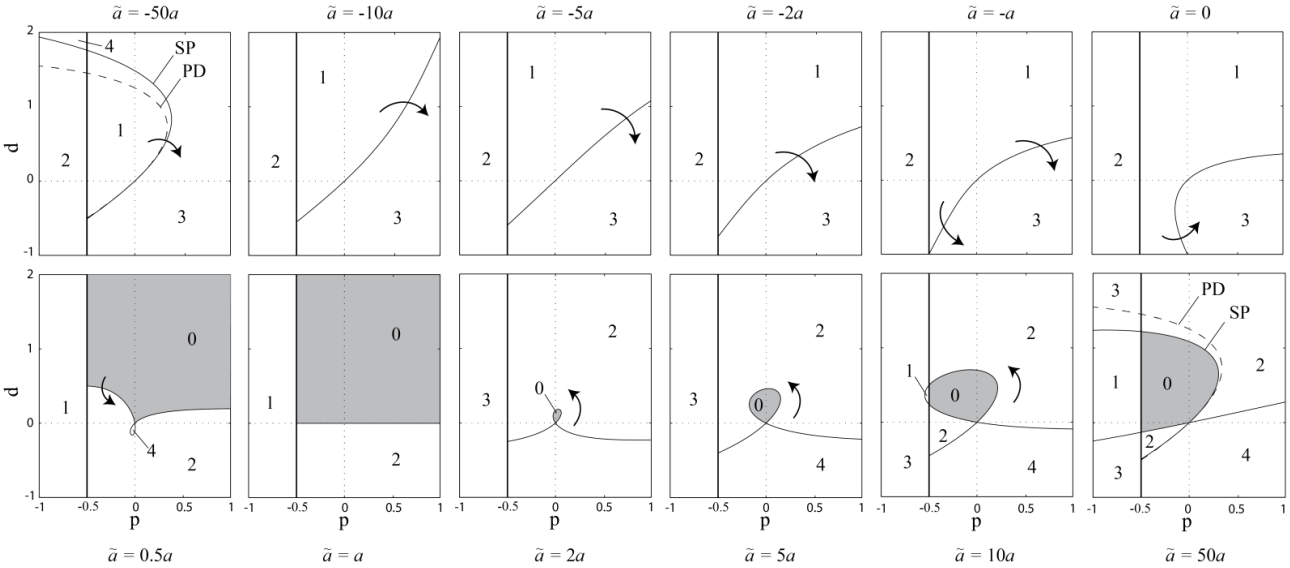
Instabilis nyitott rendszer esetén (inverz inga) a stabilitási térképeket a 8. ábra mutatja. Látható, hogy nagy és ellentétes értelmű paraméter eltérés esetén (pl. $\tilde{a} = -2a$ vagy $\tilde{a} = -5a$) létezik stabil tartomány. Ebben az esetben a rendszer lényegében PD szabályozóként működik. A 6., 7. és a 8. ábrákon feltüntetett számok az instabil pólusok számát jelölik.



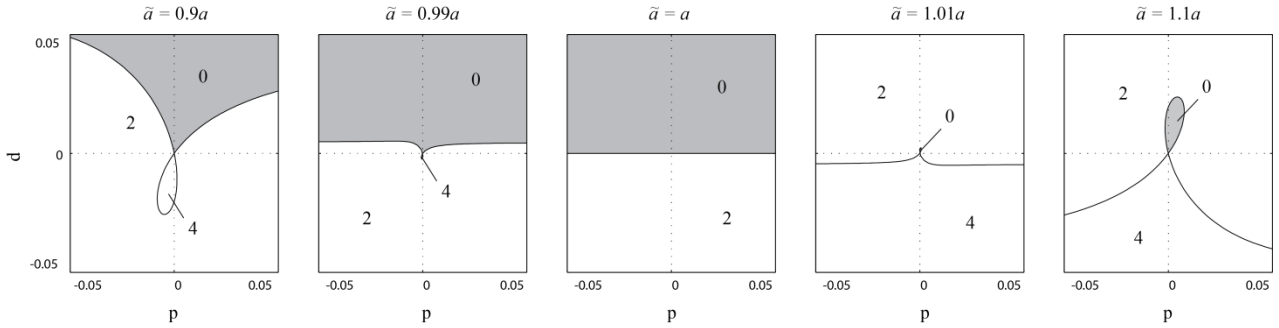
4. ábra Stabilitási térképek kis paraméter eltérések esetén ($a = 0{,}5, \tau = 1$) - stabilis nyitott rendszer



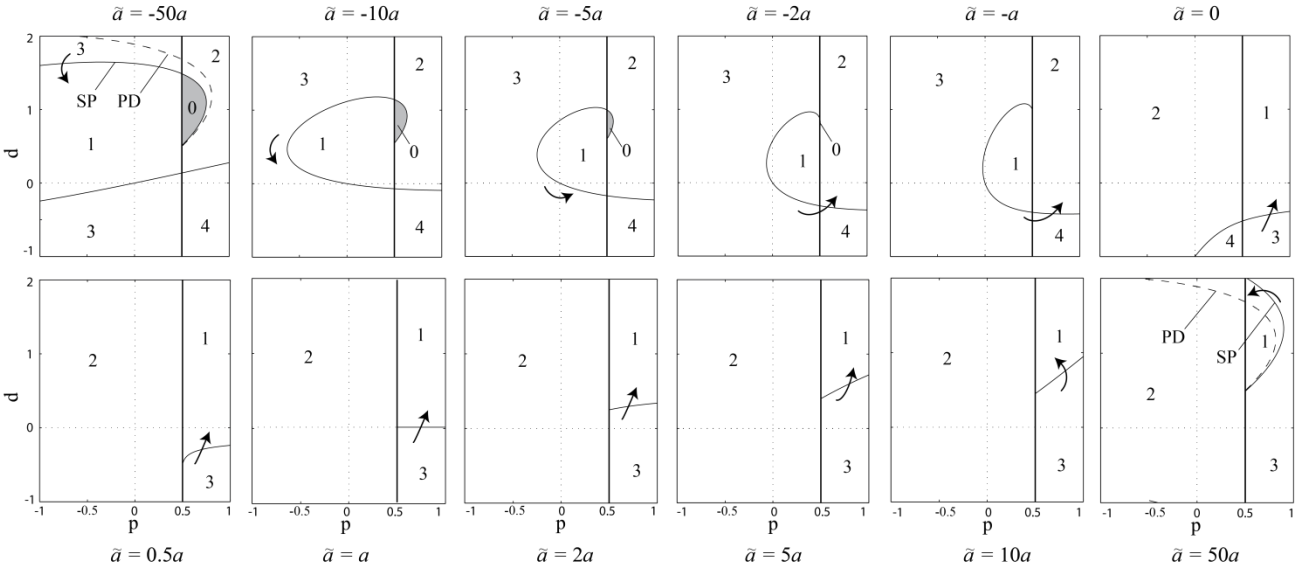
5. ábra Stabilitási térképek nagy paraméter eltérések esetén ($a = 0{,}5, \tau = 1$) - stabilis nyitott rendszer



6. ábra Stabilitási térképek változása a rendszerparaméter eltérése esetén ($a = 0.5,\ \tau = \tilde{\tau} = 1$, PD = PD szabályozó τ holtidővel; SP = Smith-prediktor) - stabilis nyitott rendszer



7. ábra Stabilitási térképek változása kis paraméter eltérések esetén ($a = 0.5,\ \tau = \tilde{\tau} = 1$) - stabilis nyitott rendszer



8. ábra Stabilitási térképek változása a rendszerparaméter eltérése esetén ($a = -0.5,\ \tau = \tilde{\tau} = 1$, PD = PD szabályozó τ holtidővel; SP = Smith-prediktor) - ***instabilis*** *nyitott rendszer*

5. ÖSSZEGZÉS

A Smith-prediktorral kompenzált rendszer stabilitási tulajdonságait vizsgáltuk egy másodrendű rendszer (inverz inga és hagyományos inga) példáján keresztül. Megmutattuk, hogy a Smith-prediktort leíró állapotegyenletek dimenziója megegyezik a nyitott rendszer méretének kétszeresével. A rendszer stabilitását a karakterisztikus egyenlet vizsgálatával határoztuk meg. Stabilitási térképekkel demonstráltuk, hogy a Smith-prediktor mennyire érzékeny a modell paramétereinek a pontosságára. Megmutattuk, hogy irreálisan nagy paraméter eltérések esetén a Smith-prediktor alkalmazható instabilis folyamatokra is.

6. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutató munka az OTKA–K105433 jelű projekt részeként az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok támogatásával valósult meg.

7. IRODALOM

[1] LANTOS B.,: *Irányítási rendszerek elmélete és tervezése I*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2001.

[2] KEVICZKY L., BARS R., HETTHÉSSY J., BARTA A., BÁNYÁSZ CS.: Szabályozástechnika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2007.

[3] SMITH O.J.M.: Closer control of loops with dead time, *Chem. Engrg. Prog.*, Vol. 53, No. 5, (1957), pp. 217-219.

[4] PALMOR Z. J.:Time-delay compensation: Smith predictor and its modifications. *The Control Handbook*, pp. 224-237, CRC and IEEE Press, 2000.

[5] MICHIELS W., NICULESCU S.-I.: Stability and Stabilization of Time Delay Systems - An Eigenvalue Based Approach, SIAM Publications, Philadelphia, 2007.

[6] STEPAN G.: Delay effects in the human sensory system during balancing, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, Vol. 367, (2009), pp. 195–1212.