



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉK

Tézisfüzet

a Pattantyús-Ábrahám Géza Gépészeti Tudományok Doktori Iskolához
benyújtott PhD disszertációhoz, melynek címe:

MIKRO-KÁOSZ DIGITÁLISAN SZABÁLYOZOTT MECHANIKAI RENDSZEREKBEN

Gyebrószki Gergely

Témavezető:

Dr. Csernák Gábor

Budapest, 2018

1. A kutatási téma háttere

Az elmúlt 50 évben, a digitális elektronikai berendezések megjelenésével új kihívás merült fel a szabályozástechnika és az analitikus mechanika területén: az ún. digitális hatások figyelembe vétele.

A legfontosabb digitális hatások a mintavételezés, az időkésés és a kerekítés (vagy kvantálás). A mintavételezés abból adódik, hogy a processzorok periodikus módon működnek, egyetlen operációt feldolgozva órajelenként. Mivel a szabályozó beavatkozás mértékének kiszámítása időt igényel, a mérés és beavatkozás közti időkésés elkerülhetetlen. Mivel a lebegőpontos számok véges számú biten vannak tárolva, a számítások során kerekítés történik. Számos digitális komponens, például konverterek vagy szűrők, bevezetnek egy vagy több digitális hatást a szabályozott rendszerben.

A témában írt egyik legjelentősebb könyv – Widrow and Kollár [10] – elegáns módszert ad a mintavételezés és kerekítés figyelembe vételére a frekvenciatartományban. A könyv ismerteti a *kvantálási elméletet* (quantization theory), bevezeti a *pszeudo kvantálási zaj* modellt és annak tulajdonságait, alkalmazhatósági feltételeit. Az eredeti jel bizonyos tulajdonságai visszaállíthatóak a kvantált jel vizsgálatával. Az elmélet kiterjeszhető lebegőpontos számítások esetére is.

Bár a kvantálási elmélet nagyszerű eszköz az összetettebb szabályozási rendszerek, az analóg-digitális átalakítás vagy akár a lebegőpontos számítások statisztikai analizésének elvégzésére, a kaotikus viselkedésű rendszereket gyakran könnyebb és szemléletesebb a frekvenciatartomány helyett az időtartományban vizsgálni.

Számos matematikus szakaszosan lineáris vagy nem-lineáris, esetenként hiszterézises leképezéseken keresztül vizsgálta a mintavételezett és kvantált rendszereket. A leképezések ezen osztályának számos alapvető jellemzőjét előállították és részletes analizist elvégezték, de bizonyos esetekben vonatkozó gyakorlati alkalmazást nem, vagy csak nehezen lehetett találni.

Domokos G. és Szász D. részletesen vizsgálta a számítógép lebegőpontos kerekítésének hatását kaotikus leképezések szimulációja során [11]. Megközelítésükkel kiszámítható a kaotikus rendszert jellemző invariáns halmaz, mely a szimuláció digitális hatásai miatt nem járható be numerikusan. Az így tapasztalható másodlagos kvantálás hasonló hatásaival Csernák G. is foglalkozott [12].

Budai Cs., Kovács L., Kövecses J. és Stépán G. a száraz súrlódás stabilizáló hatását vizsgálta egy súrlódásmentes esetben instabil, digitálisan szabályozott mechanikai rendszer esetében. Ismertették a vonatkozó rezgések időtartományban látható jellegzetes konkáv burkoló görbáját, melyet más területeken, tipikusan pozíció szabályozási alkalmazásokban is fel lehet ismerni. A határciklusok kiszámítását, a stabilitás analizist és a kísérleti validációt is elvégezték.

A *mikro-kaosz* (vagy μ -kaosz) kifejezést Stépán Gábor vezette be 1994-ben, majd a mikro-kaotikus viselkedést Haller Gy. [13] és Enikov E. [14] vizsgálta. Fény derült arra, hogy bizonyos digitális hatások (mintavételezés és kerekítés) együttes jelenléte kis amplitúdójú kaotikus oszcillációkhoz vezethet. Innen ered az elnevezésben a *micro* előtag.

Csernák Gábor a súrlódás következtében kialakuló tranziens kaoszt vizsgálta mikro-kaotikus viselkedésű rendszerekben. Becslési módszereket adott a kiszökési ráta és a tranziens kaotikus viselkedés átlagos élettartamának becslésére [15, 16].

A disszertáció az alábbi témaköröket fedi le:

Az 1. fejezet ismerteti a tudományterület múltját és jelenét. Bemutatja azokat az alapokat, melyre a szerző kutatási tevékenysége épült.

A 2. fejezet az egy szabadsági fokú, digitálisan szabályozott mechanikai rezgőrendszerhez tartozó 2D mikro-káosz leképezésekkel foglalkozik. A lehetséges 2D mikro-káosz leképezések osztályozása mellett több jellemző mennyiség kiszámítási módjára is ismertet módszereket, továbbá bemutatja, hogy bizonyos eredmények általánosíthatók magasabb dimenziójú rendszerekre.

A 3. fejezet az ún. Egyszerű Cella Leképezés módszer kibővítésével foglalkozik. A kifejlesztett új numerikus módszer – a Csoportosított Egyszerű Cella leképezés – képes a fázistér adaptív felderítésére és párhuzamosított futásra is.

A 4. fejezet a kettős kerekítés hatásával foglalkozik, azaz amikor a digitális szabályozó bemenete (a mért állapotváltozók) és kimenete (a beavatkozó erő) is kerekítve van.

Az 5. fejezet a száraz súrlódás hatásával foglalkozik és ennek kapcsán ismerteti az ún. *hibrid kapcsolású mikro-káosz leképezést*. A hibrid kapcsolás formalizmusa lehetővé teszi tetszőleges, a mintavételezésen kívüli kapcsolási esemény, pl. ütközés figyelembe vételét is.

2. A mikro-káosz leképezéshez kapcsolódó tézisek

Megvizsgáltam a digitálisan szabályozott egy szabadsági fokú mechanikai oszcillátorhoz tartozó 2D mikro-káosz leképezést mintavételezés és kerekítés esetén. A részletes vizsgálat során kiderült, hogy negatív merevség esetén a fázistérben kaotikus attraktorok (vagy repellerek) és fixpontok váltakozó mintázata található.

Több módszert általánosítottam magasabb dimenziójú rendszerekre is, például a Lyapunov-exponensek és periodikus pályák kiszámítását. A maximális lehetséges szabályozási hiba becslésének érdekében megadtam egy összefüggést annak felső korlátjára $\|y_\infty\|$. Ennek segítségével egy elnyelő tartomány – egy olyan fázistérbeli tartomány, melyből a trajektóriák nem tudnak eltávozni – mérete is kifejezhető.

1. Tézis: Topológiai mintázat

Kaotikus attraktorok vagy tranziens kaotikus repellerek és fixpontok váltakozó mintázata figyelhető meg a digitálisan szabályozott egy szabadsági fokú mechanikai oszcillátor fázissterében, amennyiben arányos-differenciáló szabályozási sémát, mintavételezést, nulladrendű tartót és kimeneti kvantálást alkalmazunk. A paramétereiktől függően, fixpontok és kapcsolóvonalak közötti határ-ütközés bifurkációk (border-collision bifurcation) következtében megváltozhat ez a mintázat. Továbbá, krízis bifurkációk során az attraktorok repellerekké válhatnak.

Kapcsolódó közlemények: [5, 1]

2. Tézis: A szabályozási hiba becslése

A mikro-káosz leképezéshez kötődő szabályozási hiba felső korlátja előállítható a leképezés olyan alakba történő átírása alapján, melyben a kvantálás figyelembe vétele nélküli leképezés képletéből kivonjuk a kvantálás során elhagyott törtrészekhez tartozó korrekciós tagokat.

Kimeneti kerekítés esetén az invariáns halmaz lehető legtávolabbi pontja az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$\mathbf{y}_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^j \mathbf{S}^k \mathbf{b} \chi_k = \cdots = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{1,k} \chi_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{n,k} \chi_k \end{bmatrix}.$$

\mathbf{y}_∞ i -edik komponensének maximalizálásához az elhagyott törtrészek végtelen χ_k sorozatának a $\chi^i = \{\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_k, \dots\} = \{\text{sign}(\sigma_{i,0}), \text{sign}(\sigma_{i,1}), \dots, \text{sign}(\sigma_{i,k}), \dots\}$ sorozatot kell választani, mely jó felső korlátot ad a szabályozási hibára.

Ez a megközelítés adaptálható a bemeneti kerekítés esetére is, ahol minden egyes állapotváltozó kerekítéséhez egy-egy elhagyott törtrész sorozat tartozik.

\mathbf{y}_∞ egyes komponenseire számított korlátokból összeállítható egy ún. *elnyelő téglatest*, amely a szabályozási hiba mértékét jellemzi. A szabályozási hiba becslésének ellenőrzéséhez kifejlesztettem egy gyakorlatban alkalmazható algoritmust a periodikus pályák meghatározására, mely a fázistér szimbolikus dinamikai megközelítésén alapszik.

Kapcsolódó közlemények: [1, 7, 8]

3. A csoportosított egyszerű cella leképezéshez kapcsolódó tézis

3. Tézis: Csoportosított Egyszerű Cella Leképezés

A fázistérbeli objektumok adaptív felderítésének érdekében kibővítettem az Egyszerű Cella leképezés (Simple Cell Mapping – SCM) módszerét. A Csoportosított Egyszerű Cella Leképezés (Clustered Simple Cell Mapping) módszerével két Egyszerű Cella Leképezéses megoldás kapcsolható össze, így létrejön egy SCM megoldásokat tartalmazó csoport. Ha adott két különálló, nem átfedő és nem feltétlenül szomszédos fázistér tartományokhoz tartozó SCM megoldás, akkor ezek csoportosítása két lépésből áll:

- Az első lépés azokat a tranziens cella sorozatokat osztályozza, amelyek az egyik SCM tartományából a másikba lépnek át, egy ismert fázistérbeli objektumra.
- A második lépés azokat a tranziens cella sorozatokat vizsgálja, melyek a másik SCM tartományba lépnek át, de ismeretlen, eddig osztályozatlan cellához

vezetnek. A *cella fa leképezés* koncepciójával ezek a tranziens cella sorozatok is osztályozhatóak és új periodikus cella csoportok fedezhetőek fel a két SCM megoldás határán.

A második lépés után az SCM megoldáscsoport minden cellája ismert állapotter objektumhoz tartozik vagy kivezet a vizsgált fázistér tartományból az ún. *redukált külső cellába*. Bemutattam egy egyszerű stratégiát, mellyel új szomszédos állapotter régiók választhatók ki és ezáltal adaptív és automatikus módon bővíthető a megoldáscsoport.

A módszer komplexitása lineáris a megoldáscsoportban szereplő cellák számát tekintve.

Kapcsolódó közlemények: [2].

A javasolt módszer az alábbi előnyökkel és alkalmazási jellemzőkkel rendelkezik:

- A módszer segítségével az SCM megoldás folytatható, amennyiben emberi megfigyelés vezényli a fázistér feltérképezését. Folytatáskor egy új tartományon való SCM megoldás előállítására és a megoldáscsoportba való hozzáadása kisebb számítási igényű, mint az egész kibővített fázistér tartományon való SCM megoldás előállítása.
- A párhuzamos futtatás triviálisan megoldható, mivel a különálló SCM megoldások egymástól függetlenül előállíthatóak a csoportosítási eljárás előtt. A csoportosítás első lépése szintén párhuzamosítható.
- A módszer hasznos lehet valós idejű alkalmazásokban, ahol a vizsgált fázistér tartomány folytonosan változik. Amennyiben egy számítógép kijelzője felel meg a vizsgált fázistér tartománynak, a képernyő mozgatása során egy vékony tartományon való SCM megoldás előállítása és a megoldáscsoportba illesztése gazdaságosan elvégezhető.
- Memóriakorlát esetén is hasznos lehet a javasolt módszer, ugyanis nagy feladatok kisebb részre bonthatóak és bizonyos SCM megoldások lemezre írhatóak (melyeket csak szükség esetén kell visszaolvasni a memóriába).

4. A kettős kerekítéshez kapcsolódó tézisek

Megvizsgáltam a kettős kerekítés hatását digitális szabályozás esetén – amikor a szabályozó bemenete és kimenete is kerekítve van. A vonatkozó mikro-káosz leképezés vizsgálatával megmutattam, hogyan származtatható a kettős kerekítésből valamelyik szimpla kerekítési eset (a bemeneti- vagy a kimeneti kerekítés).

Két új bifurkációs jelenséget találtam, melyek csak kettős kerekítés esetén léphetnek fel. Az egyik a *holsáv krízis*, mely esetén a kerekítési paraméterek változtatása úgy tolja el a holsávokat, hogy egy kaotikus attraktor tranziens kaotikus repellerré válik. A másik jelenség a *kapcsolóvonal ütközés*, mely esetén két szakaszosan folytonos kapcsolóvonal összeér, ezáltal jelentősen megváltoztatva a fázistér topológiáját.

4. Tézis: Kerekítési arány

A kettős kerekítés – amikor a szabályozó bemenete és kimenete is kvantált – jellemezhető az ún. *kerekítési arány* paraméterrel, mely a bemeneti és kimeneti kerekítés felbontásainak arányával függ össze. A kettős kerekítés valamelyik egyszeres (bemeneti vagy kimeneti) kerekítési esetre visszavezethető egy megfelelő ρ kerekítési arány használatával és a $\rho \rightarrow 0$ határérték vizsgálatával.

Nem lehet a kettős kerekítésből mindkét egyszeres kerekítési esetben való átmenetet egyetlen kerekítési arány paraméterrel vizsgálni, mert ρ egy egészrész-képző függvényben szerepel a leíró egyenletekben. Emiatt az egyik átmenethez tartozó felső határérték nulla: $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \text{Int}(x/\rho) = 0$, és ez kikapcsolt szabályozónak felel meg véges x értékekre, ahol x az állapotváltozók lineáris kombinációja.

Ennélfogva, két különböző kerekítési arányra van szükség a egyszeres kerekítési esetekbe való átmenetek vizsgálatához, melyek fordítottan arányosak egymással: $\rho' \sim 1/\rho$.

Kapcsolódó közlemények: [4, 9].

5. Tézis: Kapcsolóvonal ütközés és holsáv krízis

A kettős kerekítés esetén – amikor a szabályozó bemenete és kimenete is kvantált – a szabályozott rendszer állapottere felosztható bizonyos szabályozási erő értékekhez tartozó tartományokra, melyeket kapcsolóvonalak választanak el egymástól.

Két új bifurkációs jelenséget mutattam meg, melyek a kettős kerekítés esetén jelentkezhetnek:

- *Kapcsolóvonal ütközés* során a szakaszosan folytonos kapcsolóvonalak bizonyos pontokon összeérnek a fázistérben. Ez a jelenség kvalitatív változásokat okozhat folytonos rendszerek fázistérben, mivel a megoldások így egyszerre több kapcsolóvonalon is áthaladhatnak. A jelenség kevésbé jelentős leképezések esetén, mivel a leképezések megoldásaihoz diszkrét pontok tartoznak a fázistérben.

Az elsőrendű kapcsolóvonal ütközés létezésének feltételeit megadtam olyan leképezések esetére, ahol a kapcsolóvonalak kettős kerekítésből és arányos-differenciáló szabályozási sémából erednek. Ismertettem továbbá magasabb rendű kapcsolóvonal ütközések feltételeit – ahol egy kapcsolóvonal a k -edik szomszédjával érintkezik –, valamint *kritikus kerekítési arány* értékeket is megadtam, melyek esetén minden lehetséges helyen kapcsolóvonal ütközés áll fenn.

- *Holsáv krízis* során egy kaotikus attraktor tranziens kaotikus repelleré válik az azt meghatározó kapcsolóvonal alakjának változása miatt. A holsáv krízis elnevezés abból a megfigyelésből ered, miszerint ez az esemény szoros összefüggésben van a bemeneti kerekítésekhez kapcsolódó holsáv változásával a 2D mikro-kaosz leképezések esetén. Megmutattam, hogy ez a krízis jelentősen befolyásolhatja a maximális lehetséges szabályozási hibát. Bizonyos esetekben az is előfordulhat, hogy valamely kerekítési felbontás paraméter – r_1 vagy r_0 – növelése kisebb szabályozási hibát eredményez.

Kapcsolódó közlemények: [4, 9].

A gyakorlati alkalmazásokat tekintve előfordulhat, hogy egy digitálisan szabályozott rendszer hatékonyabbá tehető a disszertáció 4.2.2 szakaszában bemutatott eljárás alapján – egy kedvező kerekítési arány megkeresésével. Így megállapítható, hogy melyik fizikai komponenst érdemes fejleszteni, azaz melyik kerekítésnél érdemes jobb felbontást elérni. Bizonyos esetekben az is előfordulhat, hogy egy kvantáló tag felbontásának mesterséges rontása, vagy nagyobb mintavételezési idő kisebb szabályozási hibát eredményez. Hasonló eredményekre jutott Insperger Tamás, John Milton és Stépán Gábor [17, 18], az emberi egyensúlyozás vizsgálatakor, ahol a kvantálás jelenléte javította a stabilitási jellemzőket.

5. A hibrid kapcsolású mikro-káosz leképezéshez kapcsolódó tézis

Bevezetem a *hibrid kapcsolású mikro-káosz leképezést*, amely az arányos-differenciáló sémával szabályozott, száraz súrlódásos inverz inga mechanikai modelljéhez kötődik. Súrlódás nélkül a rendszer fázisterében több különálló kaotikus attraktor található. A mikro-káosz leképezés általánosításával a száraz súrlódás hatását vizsgáltam.

Megmutattam, hogy a kaotikus attraktorok tranziens kaotikus repellerekké válhatnak, az attraktorok és a letapadási zónák ütközése során történő krízis következtében. Széles paramétertartományokban kaotikus attraktorok és letapadási zónák egyidejűleg jelen vannak a fázistérben.

A hibrid kapcsolás formalizmusával más kapcsolási események – például ütközés – is figyelembe vehetők.

6. Tézis: Hibrid kapcsolású mikro-káosz leképezés

A mikro-káosz leképezés általánosítható olyan esetekre is, amikor nemcsak a mintavételezési időpontokban történik kapcsolás, hanem – száraz súrlódás vagy ütközés miatt – a mintavételezéstől függetlenül is előfordulhat. Az így kapott leképezés elnevezése: *hibrid kapcsolású mikro-káosz leképezés*.

Kaotikus attraktorok és a súrlódásból adódó letapadási zónák egyidejűleg jelen lehetnek a hibrid kapcsolású mikro-káosz leképezés fázistérében, így bebizonyosodott, hogy a mikro-kaotikus viselkedés fennállhat száraz súrlódás jelenlétében is.

Kapcsolódó közlemények: [3, 6].

Az eredmény gyakorlati jelentősége az a tény, hogy nem-ideális mérési körülmények, pl. száraz súrlódás jelenléte esetén is lehetséges a mikro-kaotikus viselkedés detektálása. Megpróbálkoztam a mikro-káosz kísérleti körülmények közötti kimutatásával is [6], azonban az irreguláris megoldások kaotikus mivoltát nem sikerült bebizonyítani.

Tézispontokhoz kapcsolódó hivatkozások

- [1] G. Csernák, G. Gyebroszki, and G. Stépán. “Multi-Baker Map as a Model of Digital PD Control”. In: *International Journal of Bifurcations and Chaos* 26.2 (2016), pp. 1650023–11.
- [2] G. Gyebroszki and G. Csernák. “Clustered Simple Cell Mapping: An extension to the Simple Cell Mapping method”. In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 42 (2017), pp. 607–622.
- [3] G. Gyebroszki and G. Csernák. “The hybrid micro-chaos map: digitally controlled inverted pendulum with dry friction”. In: *Periodica Polytechnica Mechanical Engineering* accepted, in press (2018), p. 7.
- [4] G. Gyebroszki and G. Csernák. “Twofold quantization in digital control: deadzone crisis and switching line collision”. In: *Nonlinear Dynamics* submitted, under review (2018), p. 16.
- [5] G. Gyebroszki and G. Csernák. “Methods for the Quick Analysis of Micro-chaos”. In: *Applied Non-Linear Dynamical Systems*. Ed. by Jan Awrejcewicz. Springer International Publishing, 2014. Chap. 28, pp. 383–395.
- [6] G. Gyebroszki, G. Csernák, and Cs. Budai. “Experimental investigation of micro-chaos”. In: *Proceedings of the 8th European Nonlinear Dynamics Conference ENOC, Technische Universität, Wien* (2014), pp. 1–6.
- [7] G. Gyebroszki and G. Csernák. “Digitális szabályozás okozta kaotikus rezgés amplitúdójának becslése”. In: *XII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc, Magyarország* 261 (2015), p. 6.
- [8] G. Gyebroszki and G. Csernák. “Inherent control error in a multi-PD controlled double inverted pendulum”. In: *Proceedings of the 9th European Nonlinear Dynamics Conference, ENOC, Budapest University of Technology and Economics, Hungary* (2017), pp. 1–5.
- [9] G. Gyebroszki and G. Csernák. “Structures within the Quantization Noise: Micro-Chaos in Digitally Controlled Systems”. In: *SYROCO 2018 - 12th IFAC Symposium on Robot Control, Budapest, Hungary* 20 (2018), p. 6.

Egyéb hivatkozások

- [10] Bernard Widrow and István Kollár. *Quantization Noise: Roundoff Error in Digital Computation, Signal Processing, Control, and Communications*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008, p. 778. ISBN: 9780521886710.
- [11] G. Domokos and D. Szász. “Ulam’s scheme revisited: digital modeling of chaotic attractors via micro-perturbations”. In: *Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. A* 9.4 (2003), pp. 859–876.
- [12] G. Csernák. “Quantization-induced control error in a digitally controlled system”. In: *Nonlinear Dynamics* 85 (4 2016), pp. 2749–2763.
- [13] G. Haller and G. Stépán. “Micro-Chaos in Digital Control”. In: *Journal of Nonlinear Science* 6 (1996), pp. 415–448.
- [14] Eniko Enikov and Gabor Stepan. “Microchaotic Motion of Digitally Controlled Machines”. In: *Journal of Vibration and Control* 4.4 (1998), pp. 427–443. DOI: 10.1177/107754639800400405.
- [15] Gábor Csernák and Gábor Stépán. “Quick estimation of escape rate with the help of fractal dimension”. In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 11.5 (2006). Dynamical systems—theory and applications, pp. 595–605. ISSN: 1007-5704. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2005.01.005>.
- [16] Gábor Csernák and Gábor Stépán. “Life Expectancy of Transient Microchaotic Behaviour”. In: *J. Nonlinear Science* 15 (2005), pp. 63–91.
- [17] J.G. Milton et al. “Microchaos in human postural balance: Sensory dead zones and sampled time-delayed feedback”. In: *Physical Review E* 98.2 (2018), p. 022223.
- [18] G. Stepan, J.G. Milton, and T. Insperger. “Quantization improves stabilization of dynamical systems with delayed feedback”. In: *CHAOS* 27 (2017), p. 114306.