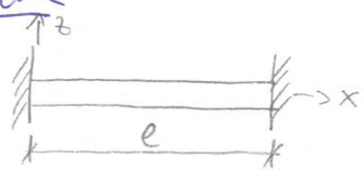
1 Példa



Adatok

$l = 1\,[m]$

$E = 200\,[GPa]$

$\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,[1/K]$

Feladat

a, Feszültség $\vartheta = 50\,[K]$ esetén

b, $\vartheta(0) = 0$; $\vartheta(l) = 100\,[K]$ állandó hőmérsékleteloszlás mellett?

Megoldás

x irányú elmozdulás: $\frac{du}{dx} = \varepsilon_x \Rightarrow du = \varepsilon_x dx \overset{\int_0^l}{\Rightarrow}$

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon_x(\xi)\,d\xi + u(0)$$

ahol

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha\vartheta(x)$$ - termikus nyúlás

Ezzel:

$$u(l) = \int_0^l \frac{\sigma_x}{E} + \alpha\vartheta(x)\,dx = 0 \quad , \; u(l) = u(0) = 0$$

$$\frac{\sigma_x}{E} l + \alpha \int_0^l \vartheta(x)\,dx = 0 \Rightarrow \sigma_x = -\frac{E\alpha}{l}\int_0^l \vartheta(x)\,dx$$

a, $\vartheta(x) = \vartheta = \text{áll.}$

$$\sigma_x = -\frac{E\alpha}{l}\int_0^l \vartheta\,dx = -E\alpha\vartheta = -120\,[MPa]$$

b, Ebben az esetben $\vartheta(x) \Rightarrow$ hővezetés diffegyenletéből:

$$\Delta\vartheta = \frac{d^2\vartheta}{dx^2} = 0 \quad , \text{ x szer integrálva:}$$

$$\vartheta(x) = C_1 x + C_2 \Rightarrow BC: \; \vartheta(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\vartheta(l) = 100 \Rightarrow C_1 l = 100 \Rightarrow$$

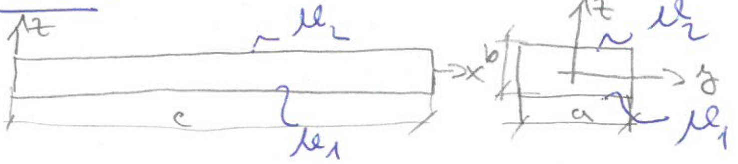
$$\Rightarrow C_1 = 100\left[\frac{K}{m}\right]$$

Ezzel:

$$\sigma_x = -\frac{E\alpha}{l} C_1 \frac{l^2}{2} = -120\,[MPa]$$

Mj ugyanaz az átlag hőterhelés

2. Példa



Adatok

$a = 25\ [mm]$ $\quad \alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \left[\frac{1}{K}\right]$

$b = 50\ [mm]$ $\quad \vartheta_1 = 20\ [K]$

$E = 200\ [GPa]$ $\quad \vartheta_2 = 40\ [K]$

Kérdés

Állandó hőmérséklet-tartás mellett egyenes rúdban milyen a feszültség eloszlás?

Megoldás

Mivel a feszültségek számításához szükséges a hőmérsékleteloszlás:

$$\Delta\vartheta = \frac{d^2\vartheta}{dz^2} = 0$$

$\Rightarrow$ megoldás: $\vartheta(z) = A + Bz$

$$BC: \quad \left.\begin{aligned} \vartheta\left(-\frac{b}{2}\right) &= A - B\frac{b}{2} = \vartheta_1 \\ \vartheta\left(\frac{b}{2}\right) &= A + B\frac{b}{2} = \vartheta_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= \frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} \\ B &= \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{b} \end{aligned}$$

tehát $\vartheta(z) = \dfrac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} + \dfrac{\vartheta_2-\vartheta_1}{b} z$

Egyenes rúdban a hőfeszültségek:

$$\sigma_x(x,y,z) = \frac{F_T}{A} + \frac{M_{Ty}}{I_y} z - \frac{M_{Tz}}{I_z} y - E\alpha\vartheta(x,y,z),$$

ahol:

$$F_T = E\alpha\int_A \vartheta\, dA = E\alpha \int_{-a/2}^{a/2} dy \int_{-b/2}^{b/2} \vartheta(z)\, dz = E\alpha a\left[\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\frac{b}{2} + \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{b}\frac{b^2}{4} - \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2}\left(-\frac{b}{2}\right) + \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{b}\frac{b^2}{4}\right)\right] =$$

$$= E\alpha \frac{ab}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)$$

$$M_{Ty} = E\alpha\int_A z\vartheta\, dA = E\alpha a \int_{-b/2}^{b/2} z\,\vartheta(z)\, dz = E\alpha\frac{ab^2}{12}(\vartheta_2-\vartheta_1) \qquad I_y = \frac{b^3 a}{12}$$

$$M_{Tz} = -E\alpha\int_A y\vartheta\, dA = -E\alpha\int_{-b/2}^{b/2}\underbrace{\left(\int_{-a/2}^{a/2} y\, dy\right)}_{\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\frac{a}{2}}^{y=\frac{a}{2}} = 0}\vartheta(z)\, dz = 0 \qquad I_z = \frac{ba^3}{12}$$

így:

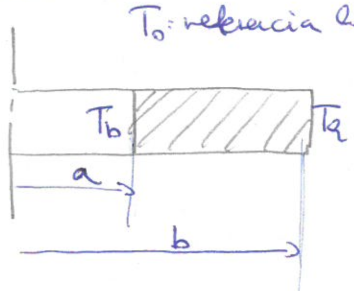
$$\sigma(z) = E\alpha\left[\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} + \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{b}z - \left(\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2} + \frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{b}z\right)\right] = 0$$

Mj: ha nem akadályozzuk (hagyjuk kitágulni) $\Rightarrow \nexists$ feszültség.

(Tehát működik az elmélet :))

3. Példa

T_0: referencia hőm.



Adatok

$a = 20$ [mm]
$b = 40$ [mm]
$T_b = 80$ [°C]
$T_a = 60$ [°C]
$T_0 = 20$ [°C]
$E = 210$ [GPa]
$\nu = 0{,}3$ [1]
$\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \left[\frac{1}{K}\right]$

Feladat

a, Pontos hőmérsékleteloszlás és ennek lineáris közelítése
b, $\sigma_r(r)$; $\sigma_t(r)$ hő fesz?
c, Hol a legnagyobb az eltérés?
d, Axiális fesz eloszlás síkbeli változás esetén $\varepsilon_z =$ áll?

Megoldás

a, Pontos hőmérséklet eloszlás a hővezetés diffegyenletéből (polár koordináta rendszerben)

$$\Delta\vartheta = \frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\vartheta}{dr} = 0 \qquad \text{ált. mo } c_1 \ln x + c_2$$

Ennek a megoldása

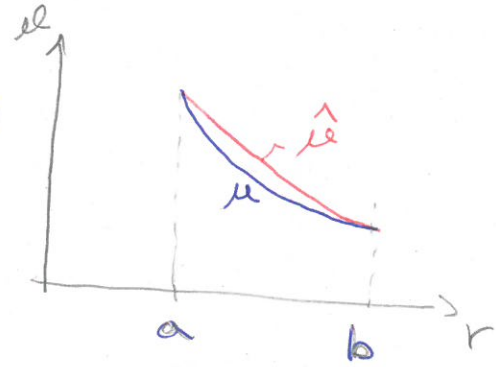
$$\vartheta(r) = \vartheta_a + \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{\ln(b/a)} \ln\frac{b}{r}, \quad \text{ahol } \vartheta_b = T_b - T_0 = 60\,[°C]$$
$$\vartheta_a = T_a - T_0 = 40\,[°C]$$

A diffegyenlet linearizálva:

$$\Delta\vartheta \cong \frac{d^2\vartheta}{dr^2} = 0$$

Ennek megoldása (lásd előző feladat)

$$\hat{\vartheta}(r) = \vartheta_a + \frac{\vartheta_b - \vartheta_a}{b-a}(b-r)$$



Mj. nem mindegy, hogy mit linearizálunk
· BC-t itt kielégíti $\vartheta(a) = \vartheta_b = \hat{\vartheta}(a)$
$\vartheta(b) = \hat{\vartheta}(b) = \vartheta_a$

b, Feszültségeloszlás

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r r\,\vartheta(r)\,dr + A - \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha}{r^2}\int_a^r r\,\vartheta(r)\,dr + A + \frac{B}{r^2} - E\alpha\vartheta(r)$$

$$BC: \ \sigma_r(a) = 0 \Rightarrow -\frac{E\alpha}{a^2}\overbrace{\int_a^a r\,\vartheta(r)\,dr}^{0} + A - \frac{B}{a^2} = 0$$

$$\sigma_r(b) = 0 \Rightarrow -\frac{E\alpha}{b^2}\int_a^b r\,\vartheta(r)\,dr + A - \frac{B}{b^2} = 0$$

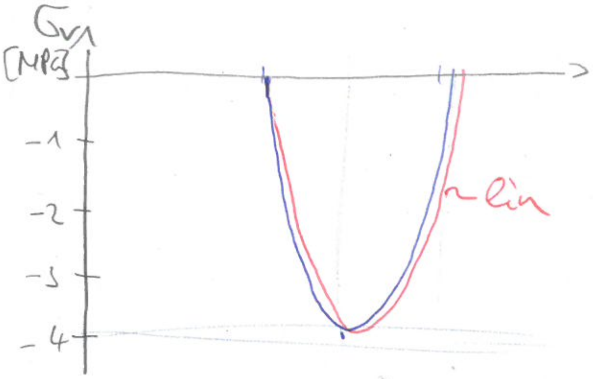
polinom, vagy $x \cdot \ln x$ integrálása

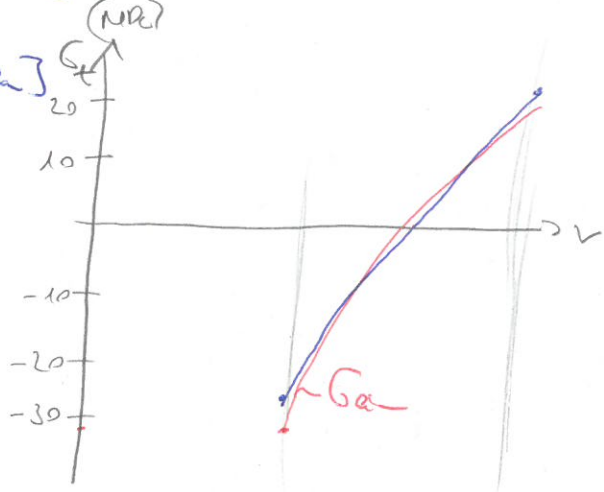
$$\sigma_r(r) = 36{,}36 \ln r - 142{,}51 + \frac{13440}{r^2} \; [MPa]$$

$$\sigma_t(r) = 36{,}36 \ln(r) - 106{,}16 - \frac{13440}{r^2} \; [MPa]$$

$$\hat{\sigma}_r(r) = 0{,}84 r - 39{,}2 + \frac{8960}{r^2} \; [MPa]$$

$$\hat{\sigma}_t(r) = 1{,}68 r - 39{,}2 - \frac{8960}{r^2} \; [MPa]$$





A legnagyobb különbségek és helyük:

$$\Delta\vartheta_{max} = \Delta\vartheta(28{,}85) = -1{,}72 \, [°C] \qquad \Delta\sigma_{r\,max} = \Delta\sigma_r(34{,}12) = 0{,}21 \, [MPa]$$

$$\Delta\sigma_{\theta\,max} = \Delta\sigma_\theta(28{,}80) = 1{,}44 \, [MPa]$$

d, Síkalakváltozás esetén legyen

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0$$

A lineárisan rugalmas anyagmodell (Duhamel–Neumann)

$$\varepsilon_r = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_r + \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_r + \sigma_t + \sigma_z)\right] + \alpha\vartheta$$

$$\varepsilon_t = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_t + \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_r + \sigma_t + \sigma_z)\right] + \alpha\vartheta$$

$$\varepsilon_z = \frac{1+\nu}{E}\left[\sigma_z + \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_r + \sigma_t + \sigma_z)\right] + \alpha\vartheta = \varepsilon_0$$

Az alakváltozások kompatibilitási egyenletével:

$$\varepsilon_r = \frac{d(r\varepsilon_t)}{dr} = \varepsilon_t + r\frac{d\varepsilon_t}{dr}$$

a feszültségek:

$$\sigma_r(r) = -\frac{E'\alpha'}{r^2}\int_a^r \xi\vartheta(\xi)\,d\xi + A' - \frac{B'}{r^2} + \frac{E'}{1-\nu'}\nu\varepsilon_0$$

$$\sigma_t(r) = \frac{E'\alpha'}{r^2}\int_a^r \xi\vartheta(\xi)\,d\xi + A' + \frac{B'}{r^2} - E'\alpha'\vartheta(r) + \frac{E'}{1-\nu'}\nu\varepsilon_0$$

ahol: $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$; $\alpha' = \alpha(1+\nu)$ és $\nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$

Energetikai berendezések szilárdságtana

4. gyakorlat
3. Példa

Ezek az A' és B' konstansok is a peremfeltételekből adódhatnak

BC: $\sigma_r(a)=0$

$\sigma_r(b)=0$

Ha nincs axiális terhelés, (se resfogás) akkor az egyensúlyi egyenlet azt adja, hogy

$$\int_A r\sigma_z \, dA = 2\pi \int_a^b r\sigma_z \, dr = 0$$

Ebbe beírom a DH-ból kapott σ_z-t.

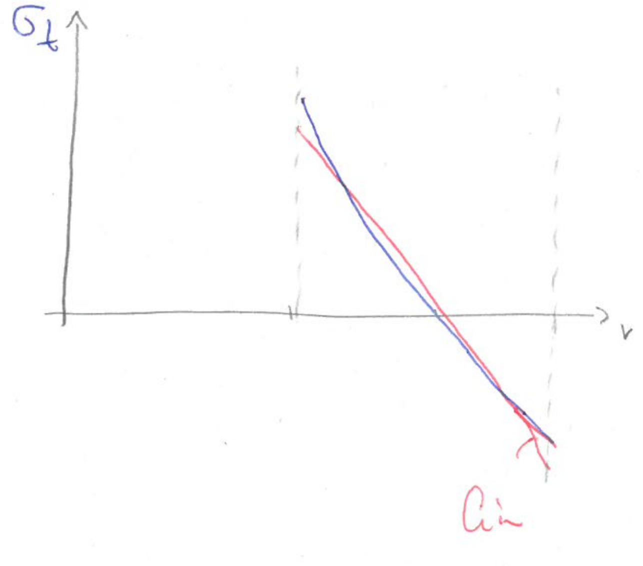
$$\sigma_z = \frac{E^* \alpha}{1-\nu}\left(\frac{2\nu}{b^2-a^2}\int_a^b r\vartheta(r)\,dr - \vartheta(r)\right) + E\varepsilon_0$$

a kifejezésből az adódik, hogy

$$\varepsilon_0 = \frac{2\alpha}{b^2-a^2}\int_a^b r\vartheta(r)\,dr,$$

ezzel pedig

$$\sigma_z = \frac{E\alpha}{1-\nu}\left(\frac{2}{b^2-a^2}\int_a^b r\vartheta(r)\,dr - \vartheta(r)\right)$$



$$\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\ln x}_{g} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}$$