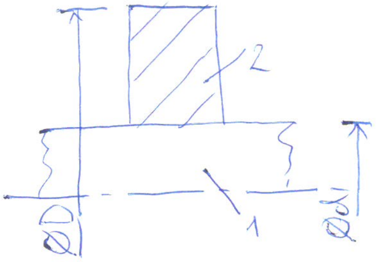
EBSZ GY2/1: Zsugorkötés merev/rugalmas tengely + rug. tárcsa



<u>Adatok</u>

$d = 200\,mm \longrightarrow a_2 = 100\,mm,\ b_1 = 100\,mm$

$D = 1000\,mm \longrightarrow b_2 = 500\,mm$

$E = 200\,GPa$

$\nu = 0{,}3$

$\sigma_{meg} = 100\,MPa$

Feladatok

a) Maximális megengedhető kötésnyomás $p_0 = ?$ merev tengely modell esetén?

b) $u_2(r) = ?$ (elmozdulásmező) $\delta_{max} = ?$ (túlfedés)

c) Hogyan változik a túlfedés rugalmas tengely modell esetén? $(E_1 = E,\ \nu_1 = \nu)$

Vonatkozó összefüggések:

zsugorkötés → nyitott vastagfalú cső

$$\boxed{\sigma_{2r}(r) = A_2 - \frac{B_2}{r^2} \qquad \sigma_{2\theta}(r) = A_2 + \frac{B_2}{r^2} \qquad \sigma_{2z} = 0}$$

feszültség-eloszlások

$$\boxed{A_2 = p_0 \cdot \frac{a_2^2}{b_2^2 - a_2^2} \qquad B_2 = p_0 \cdot \frac{a_2^2 b_2^2}{b_2^2 - a_2^2}}$$

↳ itt $p_b = p_0$: kötésnyomás, $p_k = 0$

$$\boxed{\sigma_{e,max}^{MOHR} = \sigma_\theta(a) - \sigma_r(a)}$$, $p_b > p_k$ esetén (itt $p_0 > 0$)

$$\boxed{u_2(r) = \hat{a}_2 r + \frac{\hat{b}_2}{r} \qquad \hat{a}_2 = \frac{1-\nu}{E_2} \cdot A_2 \qquad \hat{b}_2 = \frac{1+\nu}{E_2} \cdot B_2}$$

elmozdulásmező (nyitott cső)

merev tengely: $u_1(r) \equiv 0,\ \sigma_{1r} = \sigma_{1\theta} = 0$

túlfedés: $\delta = u_2(a_2)$

tárcsára peremfeltétel:

$\sigma_{2r}(a_2) = -p_0$

$\sigma_{2r}(b_2) = 0$

rugalmas tengely: $u_1(r) = \hat{a}_1 r + \frac{\hat{b}_1}{r}$

de mivel nincs a tengelyen furat → $a_1 = 0 \rightarrow u_1(0) = 0 \rightarrow \hat{b}_1 = 0,\ B_1 = 0.$

$\sigma_{1r} = \sigma_{1\theta} = A_1 = -p_0$

$\hat{a}_1 = \frac{1-\nu}{E_1} \cdot A_1 = -\frac{1-\nu}{E_1} \cdot p_0$

Ebben az esetben a túlfedés:

$\delta = u_2(a_2) - u_1(b_1)$

Megoldás:

a) peremfeltételek: $\sigma_{2r}(a_2) = -p_0 \longrightarrow A_2 - \frac{B_2}{a_2^2} = -p_0$ (1)

$\sigma_{2r}(b_2) = 0 \longrightarrow A_2 - \frac{B_2}{b_2^2} = 0$ (2)

$\sigma_{e2,max}^{MOHR} = \sigma_{2\theta}(a_2) - \sigma_{2r}(a_2) \longrightarrow \frac{2B_2}{a_2^2} = \sigma_{meg}$ (3)

$\left(A_2 + \frac{B_2}{a_2^2}\right) - \left(A_2 - \frac{B_2}{a_2^2}\right)$

(3): $B_2 = \frac{\sigma_{meg} \cdot a_2^2}{2} = \frac{100 \cdot 100^2}{2} = 500000\ N$

(2): $A_2 = \frac{B_2}{b_2^2} = \frac{5 \cdot 10^5}{500^2} = 2\ MPa$

(1) $p_0 = \frac{B_2}{a_2^2} - A_2 = 50 - 2 = 48\ MPa$

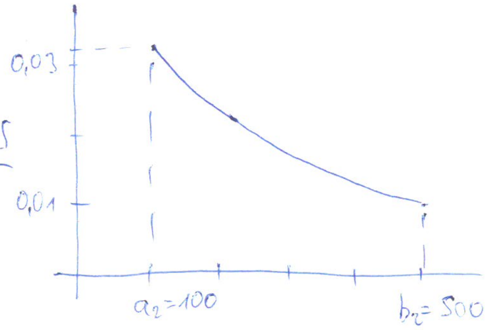
b) elmozdulásmező paraméterei:

$\hat{a}_2 = \frac{1-\nu}{E} A_2 = 7 \cdot 10^{-6}$

$\hat{b}_2 = \frac{1+\nu}{E} B_2 = 3{,}25$

így:

$u_2(r) = 7 \cdot 10^{-6} \cdot r + \frac{3{,}25}{r}$



túlfedés: $\delta = u_2(a_2) = 7 \cdot 10^{-6} \cdot 100 + \frac{3{,}25}{100} = 0{,}0332\ mm$

c) Ha a tengely rugalmas, és ugyanaz az anyaga ($E_1 = E$, $\nu_1 = \nu$)

$u_1(r) = \hat{a}_1 r$

$A_1 = -p_0$

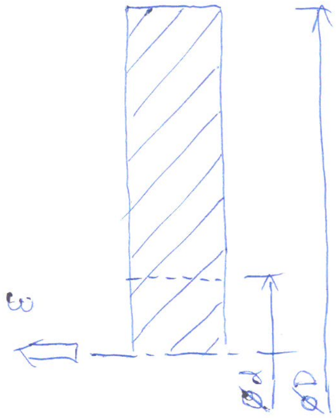
$\hat{a}_1 = \frac{1-\nu}{E} A_1 = -\frac{1-\nu}{E} p_0 = -1{,}68 \cdot 10^{-4}$

így az új túlfedés $\delta' = u_2(a_2) - u_1(b_1) = \overbrace{\hat{a}_2 \cdot a_2 + \frac{\hat{b}_2}{a_2}}^{0{,}0332} - \underbrace{\hat{a}_1 \cdot b_1}_{-0{,}0168} = 0{,}05\ mm.$

$\underline{d} = a_2 = b_1$

ez jelentős különbség $\frac{\delta' - \delta}{\delta} \simeq \frac{0{,}05 - 0{,}0332}{0{,}0332} \simeq 50\%$

EBS7 GY2/12: Forgó tömör ill. furatos tárcsa



Adatok:

$D = 400\ mm \longrightarrow b = 200\ mm$

$d = 40\ mm \longrightarrow a = 20\ mm$

$\rho = 7800\ kg/m^3 \longrightarrow 7800 \cdot 10^{-12} = 7{,}8 \cdot 10^{-9}$!

$n = 3000\ \frac{ford}{perc} = \frac{3000}{60} \cdot \frac{1}{s}$

$\nu = 0{,}3$ $\qquad E = 200\ GPa$

$\sigma_p = 240\ MPa$

Megj: $1\ \frac{kg}{m^3} = 1\ \frac{kgm}{s^2} \cdot \frac{s^2}{m^4} = 1\ N \cdot \frac{s^2}{m^4} = 10^{-12} \cdot \frac{Ns^2}{mm^4}$

Feladatok

a) Ha tömör a tárcsa, $\sigma_r(r) = ?$ és $\sigma_\theta(r) = ?$

b) Mekkora fordulatszámnál és hol lépne fel képlékeny folyás? $\}$ tömör forgó tárcsa

c) d átmérőjű furatos tárcsa esetén: $\sigma_r(r) = ?$ és $\sigma_\theta(r) = ?$

d) Mekkora fordulatszám engedhető meg, ha $\sigma_{meg} = 100\ MPa$? $\}$ normál forgó tárcsa

---

Megoldás:

pf. szimm. tengelyen

a) tömör tárcsa $\quad u(0) = 0 \longrightarrow \hat{b} = 0$ és $B = 0$

$\sigma_r(b) = 0$: peremfeltétel kívül

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sigma_r(r) = A - \frac{B}{r^2} + C_1 \cdot r^2 & u(r) = \hat{a} r + \frac{\hat{b}}{r} + \hat{c} \cdot r^3 & \hat{a} = \frac{1-\nu}{E} A \\ \sigma_\theta(r) = A + \frac{B}{r^2} + C_2 \cdot r^2 & C_1 = -\frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 & \hat{b} = \frac{1+\nu}{E} B \\ \sigma_z = 0 & C_2 = -\frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 & \hat{c} = -\frac{1-\nu^2}{8 \cdot E} \rho \omega^2 \end{array}}$$

$\sigma_r(b) = 0 \longrightarrow A + C_1 \cdot b^2 = 0$ $\quad$ innen $A = -C_1 \cdot b^2 = \underline{12{,}7022\ MPa}$

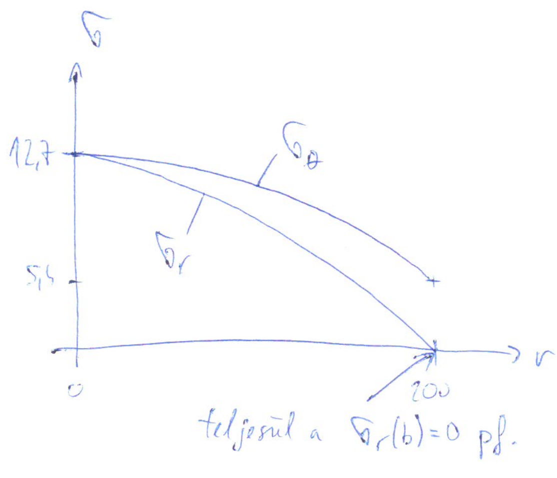
$B = 0$!

$\omega = 2\pi \cdot n = 2\pi \cdot \frac{3000}{60} = 100\pi = 314{,}15\ \frac{rad}{s}$

$\left.\begin{array}{l} \hat{c} = 4{,}378 \cdot 10^{-10} \\ C_1 = -3{,}1755 \cdot 10^{-4} \\ C_2 = -1{,}828 \cdot 10^{-4} \end{array}\right\}$ adatokból számolható!

tehát: $\sigma_r(r) = A + C_1 r^2 = 12{,}7 - 3{,}175 \cdot 10^{-4} r^2$

$\sigma_\theta(r) = A + C_2 r^2 = 12{,}7 - 1{,}828 \cdot 10^{-4} r^2$



b) $\sigma_{e,max}$ itt most $r=0$ helyen lesz

$$\begin{aligned} &\sigma_1 \quad \sigma_r(0) = 12{,}7\ \mathrm{MPa} \\ &\vee| \\ &\sigma_2 \quad \sigma_\theta(0) = 12{,}7\ \mathrm{MPa} \\ &\vee| \\ &\sigma_3 \quad \sigma_z = 0\ \mathrm{MPa} \end{aligned} \Bigg\} \quad \sigma_e^{MOHR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 12{,}7 - 0 = 12{,}7\ \mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{e\,max}^{MOHR} = \sigma_r(0) = A = -C_1 \cdot b^2 = -\frac{3+\nu}{8} \cdot \rho\omega^2 b^2 \longrightarrow \frac{\sigma_{e,max}^{MOHR}}{\omega^2} = \text{konst}$$

ω-tól négyzetesen függ!

Mivel ω-tól négyzetesen függ, felírható, hogy

$$\frac{\sigma_{e,max}^{M}}{\omega^2} = \frac{\sigma_F}{\omega_F^2}$$

σ_F: folyáshatár

ω_F: az a szögsebesség, ahol $\sigma_{e,max}^{M}$ eléri σ_F-et.

$$\omega_F = \omega \cdot \sqrt{\frac{\sigma_F}{\sigma_r(0)}} \longrightarrow$$ mivel $\omega = 2\pi n$, ugyanez a fordulatszámra is érvényes

$$n_F = n \cdot \sqrt{\frac{\sigma_F}{\sigma_r(0)}} = 217{,}34 \frac{\text{ford}}{s} = 13040 \frac{\text{ford}}{\text{perc}}$$

---

c) Forgó (furatos) tárcsa

az első peremfeltétel változik: $\sigma_r(a) = 0$

és már $b \neq 0$, $B \neq 0$.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r(a) = 0 &\longrightarrow A - \frac{B}{a^2} + C_1 a^2 = 0 \\ \sigma_r(b) = 0 &\longrightarrow A - \frac{B}{b^2} + C_1 \cdot b^2 = 0 \end{aligned}\right\} \ominus : \quad -\frac{B}{a^2} + \frac{B}{b^2} + C_1 \cdot a^2 - C_1 b^2 = 0$$

$$B \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} + C_1 a^2 - C_1 b^2 = 0$$

$$B = \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \cdot \left(C_1 b^2 - C_1 a^2\right) = 5080{,}87\ \mathrm{N}$$

$$A = \frac{B}{a^2} - C_1 \cdot a^2 = 12{,}829\ \mathrm{MPa}$$

tehát ebben az esetben

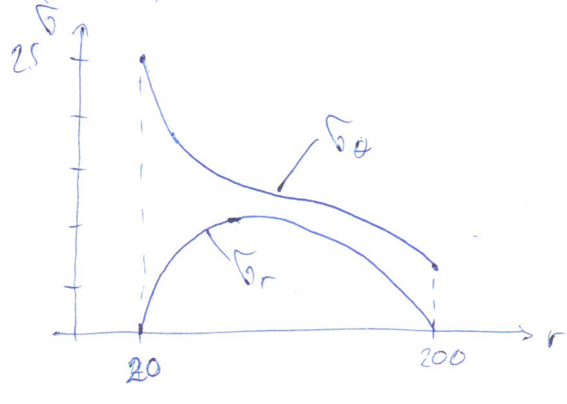
$$\sigma_r(r) = A - \frac{B}{r^2} + C_1 \cdot r^2 = 12{,}8 - \frac{5080}{r^2} + (-3{,}175) \cdot 10^{-4} \cdot r^2$$

$$\sigma_\theta(r) = A + \frac{B}{r^2} + C_2 \cdot r^2 = 12{,}8 + \frac{5080}{r^2} + (-1{,}828) \cdot 10^{-4}\, r^2$$

Látható, hogy itt is teljesül a két perem-feltétel

$\sigma_r(20) = 0$

$\sigma_r(200) = 0$



d) $\sigma_{e,max}^{MOHR} = \sigma_\theta(a) - \sigma_z \overset{vagy}{=} \sigma_\theta(a) - \sigma_r(a) = 25,458 \text{ MPa}$

most $\sigma_\theta(a) = 25,458 \text{ MPa}$ $\quad \sigma_1$

$\sigma_r(a) = 0 \quad\quad \vee \; \sigma_2$

$\sigma_z = 0 \quad\quad \vee\!| \; \sigma_3$

használjuk ismét az előző összefüggést

$$n_{meg} = n \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{meg}}{\sigma_\theta(a)}} = \overset{99,09}{\cancel{153,519}} \frac{1}{s} = \overset{5945}{\cancel{9211}} \frac{ford}{perc}$$

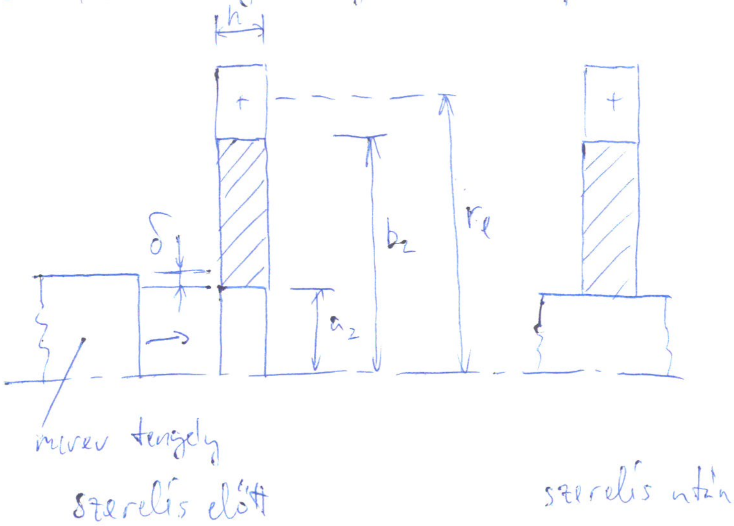
↳ max fordulatszám, ahol $\sigma_{e,max}^{MOHR} = \sigma_{meg} = 100 \text{MPa}$

Megjegyzés:

$$n_F = n \cdot \sqrt{\frac{\sigma_F}{\sigma_\theta(a)}} = n \cdot \sqrt{\frac{240}{25,46}} = 153,519 \frac{1}{s} = 9211 \frac{ford}{perc}$$

↳ max fordulatszám, ahol $\sigma_{emax}^{MOHR} = \sigma_F = 240 \text{MPa}$

GY2/13: Forgó zsugorkötés + lapátozás



Adatok

$a = 15\,mm$
$b = 120\,mm$
$h = 20\,mm$
$r_e = 135\,mm$
$m_e = 1{,}5\,kg$

$\rho = 7860 \frac{kg}{m^3} = 7{,}86 \cdot 10^{-9}$
$E = 200\,GPa = 2 \cdot 10^5\,MPa$
$\nu = 0{,}3$

Feladatok

a) $\delta = ?$, ha a lelazulás $\omega = 1000 \frac{rad}{s}$ esetén történik?
b) $\sigma_r(a), \sigma_\theta(a), \sigma_r(b), \sigma_\theta(b) = ?$ feszültségek a tárcsa peremén a lelazulás pillanatában?
c) A forgatás vagy a szerelés veszélyesebb a képlékeny folyás szempontjából?

Megoldás a)

szerelt állapotban $\omega = 0$ esetén
$u_2(a_2) = \delta$
$\sigma_{r2}(a_2) = p_0$: kötésnyomás
másik peremfeltétel : lapátozás
$\omega = 0$ esetben $p_c = 0$

$\rightarrow$ lelazuláskor $\omega = \omega_{kritikus}$
$u_2(a_2) = \delta$
$\sigma_{r2}(a_2) = 0$

$\sigma_{r2}(b_2) = p_c$

$$p_c = \frac{m_e \cdot r_e \cdot \omega^2}{2 b_2 \cdot \pi \cdot h} = 13{,}44\,MPa$$

$\sigma_{r2}(a_2) = 0 \longrightarrow A_2 - \frac{B_2}{a_2^2} + C_1 \cdot a_2^2 = 0 \quad (1)$

$\sigma_{r2}(b_2) = +p_c \longrightarrow A_2 - \frac{B_2}{b_2^2} + C_1 \cdot b_2^2 = +p_c \quad (2)$

$u_2(a_2) = \delta \longrightarrow \hat{a}_2 a_2 \cdot \frac{\hat{b}_2}{a_2} + \hat{C} \cdot a_2^3 = \delta \quad (3)$

(1) és (2)-ből: $A_2 = 61{,}07\,MPa \longrightarrow \hat{a}_2 = \frac{1-\nu}{E} A_2$ (3)-ból $\delta = 9{,}1 \cdot 10^{-3}\,mm$
$B_2 = 13576\,N$ $\quad \hat{b}_2 = \frac{1+\nu}{E} B_2$
(C_1 adatokból számolható)

b) $\sigma_{r2}(a_2) = 0$ $\quad \sigma_{r2}(b_2) = 13{,}44\,MPa$
$\sigma_{\theta 2}(a_2) = 121\,MPa$ $\quad \sigma_{\theta 2}(b_2) = 35{,}1\,MPa$

c) szerelt állapot: $\omega = 0 \rightarrow \sigma^{MOHR}_{e_{max},\,\omega=0} = \frac{2B}{a^2} = 185{,}1\,MPa$
$\omega = 1000 \rightarrow \sigma^{MOHR}_{e_{max},\,\omega\neq 0} = 121 - 0 = 121\,MPa$

szerelt állapot veszélyesebb
$\sigma^{m}_{e,\omega=0} > \sigma^{m}_{e,\omega\neq 0}$