# 1. Feladat

Egy $a$ = 100 mm belső és $b$ = 150 mm külső sugarú cső terhelése $p_b$ = 60 MPa belső ill. $p_k$ = 30 MPa külső nyomás.
a) Mekkora radiális, tangenciális és axiális feszültségek ébrednek a csőfalban, ha a csővég zárt?

Adatok:

```
a = 100;
b = 150;
pb = 60;
pk = 30;
```

## a) Mekkora radiális, tangenciális és axiális feszültségek ébrednek a csőfalban, ha a csővég zárt?

A feszültségeloszlásban szereplő paraméterek:

$$A = \frac{pb\, a^2 - pk\, b^2}{b^2 - a^2} \; // \; N$$

-6.

$$B = (pb - pk)\frac{a^2\, b^2}{b^2 - a^2} \; // \; N$$

540000.

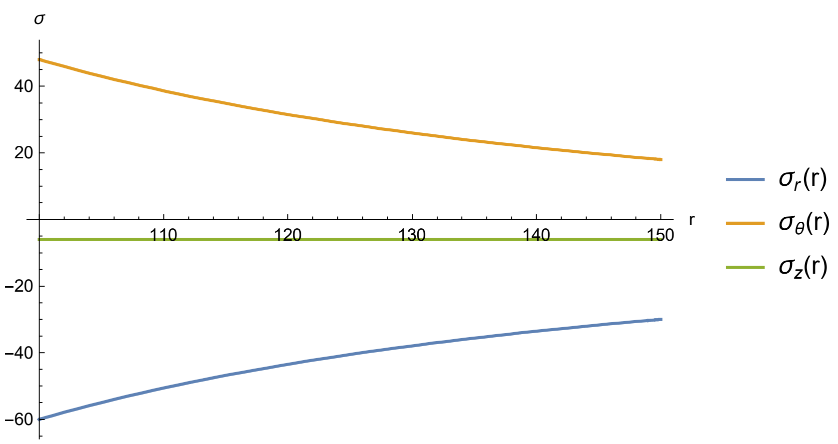
Azaz a feszültségeloszlások

$$\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma z[r\_] := A$$

```
Plot[{σr[r], σθ[r], σz[r]}, {r, a, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)", "σz(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```



A belső falon (r = a)

```
σr[a]
```

```
-60.
```

```
σθ[a]
```

```
48.
```

A külső falon (r = b)

```
σr[b]
```

```
-30.
```

```
σθ[b]
```

```
18.
```

Axiális feszültség konstans:

```
σz[r]
```

```
-6.
```

(Minden feszültség MPa-ban)

```
Quit
```

# 2. Feladat

Egy 100 mm belső és 140 mm külső átmérőjű hidraulikus hengert 100 MPa belső nyomás terhel.
a) Mekkora főfeszültségek ébrednek a belső és külső peremen?
b) Mekkora kell legyen minimálisan a henger anyagának folyáshatára, ha csak rugalmas alakváltozást engedünk meg (zárt és nyitott cső esetén)?
(Használja a Mohr-elméletet.)

Adatok:

```
a = 100;
b = 140;
pb = 100;
pk = 0;
```

## a) Mekkora főfeszültségek ébrednek a belső és külső peremen?

A feszültségeloszlásban szereplő paraméterek:

$$A = \frac{pb\, a^2 - pk\, b^2}{b^2 - a^2} \;\text{// N}$$

104.167

$$B = (pb - pk)\, \frac{a^2\, b^2}{b^2 - a^2} \;\text{// N}$$

$2.04167 \times 10^6$

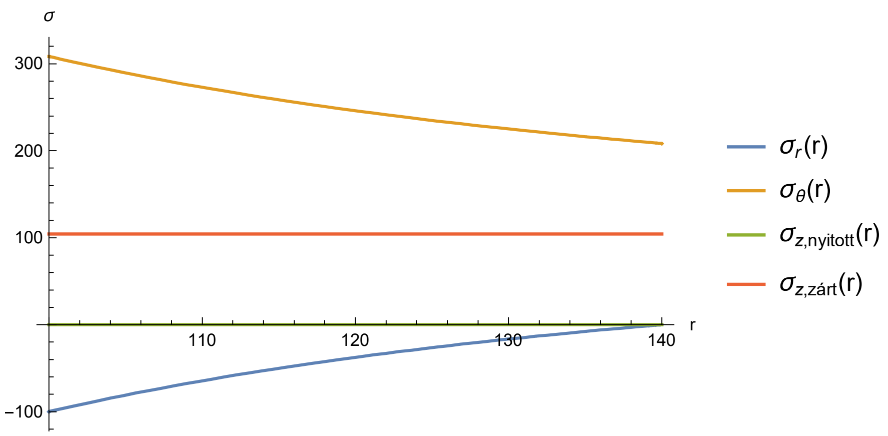
Azaz a feszültségeloszlások

$$\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2}$$

```
σzNY[r_] := 0
σzZART[r_] := A
```

```
Plot[{σr[r], σθ[r], σzNY[r], σzZART[r]}, {r, a, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)", "σz,nyitott(r)", "σz,zárt(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```



A belső falon (r = a)

```
σr[a]
```

```
-100.
```

```
σθ[a]
```

```
308.333
```

Azaz: $\sigma_1 = \sigma_\theta > \sigma_2 = \sigma_z > \sigma_3 = \sigma_r$

A külső falon (r = b)

```
σr[b]
```

```
0.
```

```
σθ[b]
```

```
208.333
```

Azaz: $\sigma_1 = \sigma_\theta > \sigma_2 = \sigma_z \geq \sigma_3 = \sigma_r$

## b) Mekkora kell legyen minimálisan a henger anyagának folyáshatára, ha csak rugalmas alakváltozást engedünk meg (zárt és nyitott cső esetén)?

Mivel a legnagyobb és legkisebb főfeszültség $\sigma_\theta$ és $\sigma_r$ a csővég típusától függetlenül, a Mohr-féle egyenértékű feszültség maximuma a belső peremen (r = a):

```
σeMmax = σθ[a] - σr[a]
```

```
408.333
```

Azaz a folyáshatárnak ezzel az értékkel (408,3 MPa) kell megegyezni.

```
Quit
```

# 3. Feladat

Egy 100 mm külső és 50 mm belső átmérőjű pneumatikus henger terhelése 112 MPa belső nyomás. A hengert dugattyúval zárjuk le.
a) Mekkora erő kell a dugattyú egyensúlyban tartásához?
b) Mekkora a külső és belső átmérő méretváltozása? E = 205 GPa, $\nu$ = 0,27.

Adatok:

```
a = 50 / 2;
b = 100 / 2;
pb = 112;
pk = 0;
E1 = 205 000;
ν = 0.27;
```

## a) Mekkora erő kell a dugattyú egyensúlyban tartásához?

A belső nyomás a dugattyú felületén oszlik meg, ami:

```
Ad = a^2 π // N
```

```
1963.5
```

$p_b = F_d / A_d$-ből:

```
Fd = pb Ad // N
```

```
219 911.
```

Azaz $F_d$ = 219,9 kN.

## b) Mekkora a külső és belső átmérő méretváltozása?

Ebben az esetben a feszültségeloszlásban szereplő paraméterek:

$$A = \frac{pb\, a^2 - pk\, b^2}{b^2 - a^2} \;//\; N$$

```
37.3333
```

$$B = (pb - pk) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \;//\; N$$

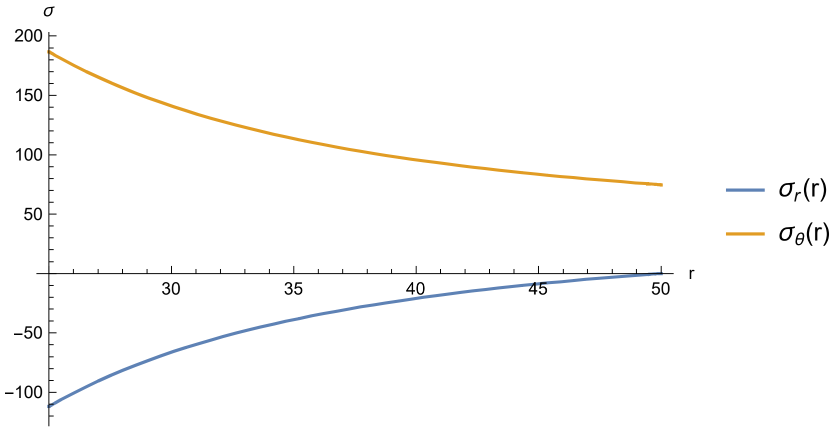
```
93 333.3
```

Azaz a feszültségeloszlások

$$\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2}$$

```
Plot[{σr[r], σθ[r]}, {r, a, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```




Elmozdulásmező paraméterei (dugattyúval zárt → nyitott cső!)

$$\hat{a} = \frac{1 - \nu}{E1} A$$

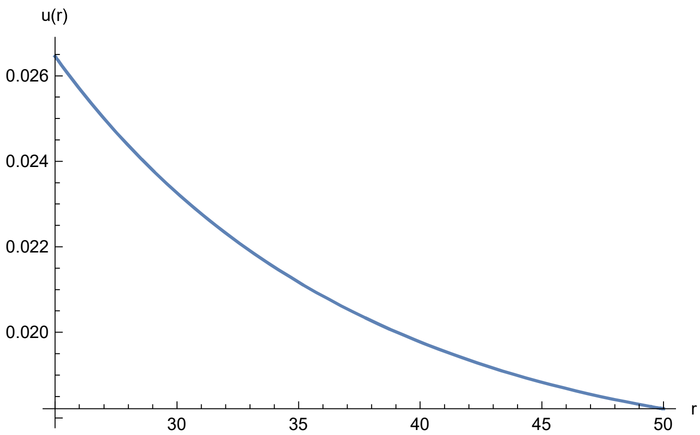
0.000132943

$$\hat{b} = \frac{1 + \nu}{E1} B$$

0.578211

$$u[r\_] := \hat{a}\, r + \frac{\hat{b}}{r}$$

```
Plot[u[r], {r, a, b}, AxesLabel → {"r", "u(r)"}]
```




A belső sugár változása u(a), tehát a belső átmérő változása ennek kétszerese:

```
2 u[a]
```

0.0529041

Azaz Δd = 52,9 $\mu$m

A külső sugár változása u(b), tehát a külső átmérő változása ennek kétszerese:

```
2 u[b]
```

0.0364228

Azaz $\Delta D = 36{,}4\ \mu m$

```
Quit
```

# 4. Feladat

Nyúlásmérést végeztünk egy 100 mm külső és 50 mm belső átmérőjű cső külső felületén. A tangenciális nyúlás $240 \times 10^{-6}$-nak, az axiális nyúlás $60 \times 10^{-6}$-nak adódott. A csövet 90 MPa belső nyomás terhelte.
a) Állapítsa meg, hogy mekkora az aktuális tangenciális és axiális feszültség!
b) Hasonlítsa össze a kapott értékeket az elméleti értékekkel!
Mit mondhatunk a csővég típusáról? E = 208 GPa, *ν* = 0,29.

Adatok:

```
a = 25;
b = 50;
εθ = 240 × 10^-6;
εz = 60 × 10^-6;
pb = 90;
pk = 0;
E1 = 208 000;
ν = 0.29;
```

## a) Állapítsa meg, hogy mekkora az aktuális tangenciális és axiális feszültség!

Mivel minden adott, kiszámíthatjuk az elméleti feszültségeket

$$A = \frac{pb\, a^2 - pk\, b^2}{b^2 - a^2} \;//\; N$$

```
30.
```

$$B = (pb - pk)\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \;//\; N$$

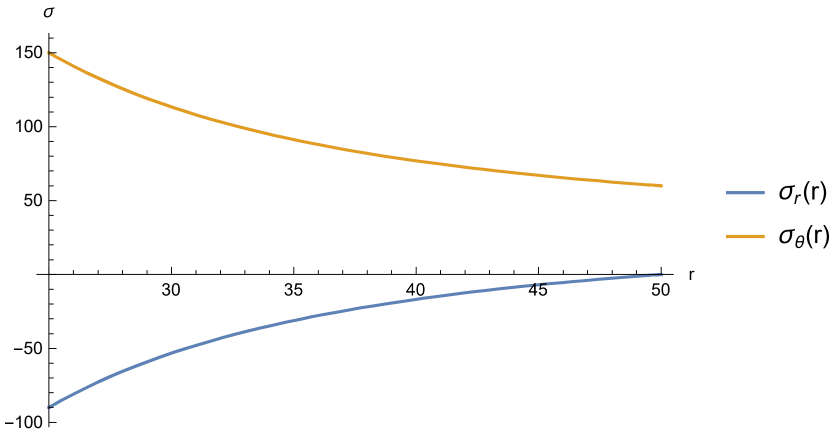
```
75 000.
```

Azaz a feszültségeloszlások

$$\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2}$$

```
Plot[{σr[r], σθ[r]}, {r, a, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```




## b) Hasonlítsa össze a kapott értékeket az elméleti értékekkel! Mit mondhatunk a csővég típusáról?

Az első pont, ahol eltér a nyitott és a zárt csőre vonatkozó összefüggés $\varepsilon_z$

Nyitott csőre:

$$\varepsilon zNY = -\frac{2\,\nu}{E1}\,A$$

-0.0000836538

Zárt csőre:

$$\varepsilon zZ = \frac{1-2\,\nu}{E1}\,A$$

0.0000605769

Itt már a mért nyúlás előjele alapján el tudjuk dönteni, hogy **zárt csőről van szó.**
Egyébként a mérés és az elmélet között kisebb mint 1% a relatív hiba.

```
εzZ // EngineeringForm
```

$60.5769 \times 10^{-6}$

$$\frac{\varepsilon zZ - \varepsilon z}{\varepsilon zZ}$$

0.00952381

Itt pótolhatjuk az előző feladatból hiányzó $\sigma_z - t$, mert már tudjuk, hogy zárt csőről van szó.

```
σz = A
```

30.

A tangenciális nyúlásra vonatkozó összefüggés: Hooke-törvény

$$\varepsilon\theta b = \frac{1+\nu}{E1}\left(\sigma\theta[b] - \frac{\nu}{1+\nu}\,(\sigma r[b] + \sigma\theta[b] + \sigma z)\right)$$

0.000246635

```
εθb // EngineeringForm
```

$246.635 \times 10^{-6}$

A mérés és az elmélet itt is közeli értékeket ad: a relatív hiba 2,7%

$$\frac{\varepsilon\theta b - \varepsilon\theta}{\varepsilon\theta b}$$

```
0.0269006
```

## Megjegyzés: a mérésből számított feszültségek

A mért $\varepsilon_z$ nyúlásból kifejezhető az A paraméter:

$$Am = \frac{\varepsilon z\, E1}{1 - 2\,\nu}$$

```
29.7143
```

Majd a Hooke-törvény és $\varepsilon_\theta$ felhasználásával B paraméter

$$Bm = Bm\ /.\ Solve\left[\varepsilon\theta == \frac{1+\nu}{E1}\left(\left(Am + \frac{Bm}{b^2}\right) - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\left(Am - \frac{Bm}{b^2}\right) + \left(Am + \frac{Bm}{b^2}\right) + Am\right)\right)\right]\ //\ First$$

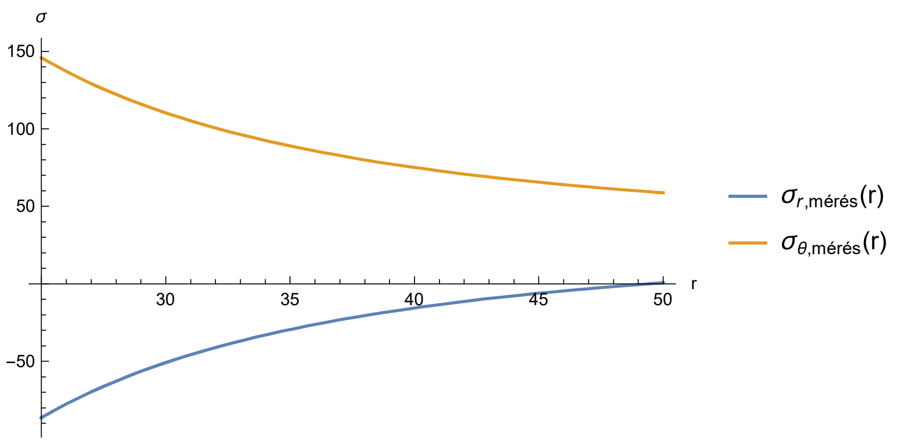
```
72 558.1
```

Azaz a mérés alapján előálló feszültségeloszlások:

$$\sigma rm[r\_] := Am - \frac{Bm}{r^2}$$

$$\sigma\theta m[r\_] := Am + \frac{Bm}{r^2}$$

```
Plot[{σrm[r], σθm[r]}, {r, a, b},
 PlotLegends → {"σr,mérés(r)", "σθ,mérés(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```




```
σrm[b]
```

```
0.69103
```

```
σθm[b]
```

```
58.7375
```

```
Quit
```

# 5. Feladat

Egy 200 mm átmérőjű tömör öntöttvas tárcsa anyagára a megengedett feszültség 30 MPa, sűrűsége $\rho = 7500\ \text{kg}/\text{m}^3$, Poisson tényezője $\nu = 0{,}25$.

a) Mekkora lehet a megengedhető üzemi fordulatszám?

Adatok:

```
b = 100;
σmeg = 30;
ρ = 7500 × 10^-12;
ν = 0.25;
```

## a) Mekkora lehet a megengedhető üzemi fordulatszám?

Mivel tömör a tárcsa (a = 0), B = 0 és $\hat{b} = 0$.

Azaz, a feszültségeloszlások:

```
σr[r_] := A + C1 r^2;
σθ[r_] := A + C2 r^2;
```

Ahol $C_1$ és $C_2$:

$$C1 = -\frac{3+\nu}{8}\rho\,\omega^2$$

$-3.04687 \times 10^{-9}\,\omega^2$

$$C2 = -\frac{1+3\nu}{8}\rho\,\omega^2$$

$-1.64062 \times 10^{-9}\,\omega^2$

Az egyenértékű feszültség $\sigma_{e,\,\max}^{\text{Mohr}} = \sigma_\theta(0) - \sigma_z = \sigma_\theta(0) = \sigma_r(0) = A$

Azaz $A$ értéke megegyezik a megengedhető feszültség értékével:

```
A = σmeg
```

30

A másik egyenletünk a külső peremfeltétel:

```
σr[b] == 0
```

$30 - 0.0000304688\,\omega^2 == 0$

Innen $\omega$ [rad/s]

```
mo = Solve[σr[b] == 0, ω] // Last
```

{ω → 992.278}

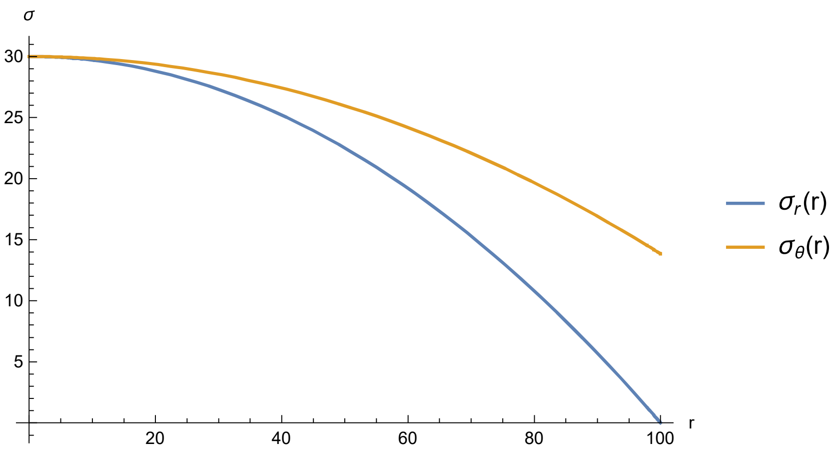
Átváltva [ford/perc]-be:

$$nmax = \frac{\omega}{2\pi}\,60\ \ /.\ mo$$

9475.56

Megjegyzés: feszültségeloszlások grafikonjai:

```
Plot[{σr[r] /. mo, σθ[r] /. mo}, {r, 0, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```




```
Quit
```

# 6. Feladat

Egy 400 mm átmérőjű tömör acél tárcsa üzemi fordulatszáma 3000/perc.
a) Hol ébred és mekkora lesz a maximális Mohr-féle egyenértékű feszültség?
b) Hogyan változik ez az érték, ha a tárcsába 40 mm átmérőjű furatot készítünk?
c) Milyen fordulatszámnál lép fel képlékeny folyás a tömör ill. a furatos tárcsában?
$\rho$ = 7800 kg/m3 , $\nu$ = 0,3, $\sigma_F$ = 240 MPa.

Lásd: 2. gyakorlat