EBSZ gyakorló feladatok 2.

II. Hőfeszültségek

1. feladat

Egy állandó keresztmetszetű, l = 1 m hosszú acélrúd két végét mereven befogjuk, majd 87 °C hőmérsékletre melegítjük.
a) Mekkora feszültség ébred a rúdban?
b) Mekkora lenne a feszültség, ha a rúd egyik vége a hőterhelés előtt 0,5 mm távolságban lenne a merev faltól?
A szerelés előtti hőmérséklet 27 °C,
E = 206 GPa, $\alpha = 1.12\times10^{-5}$ 1/K.

Megoldás

Adatok:

In[1]:=
```
l = 1;
ϑ = 87 - 27;
E1 = 206 × 10^9;
α = 1.12 × 10^-5;
```

a) Állandó hőmérséklet

In[5]:=
```
σxa = -E1 α ϑ
```

Out[5]= -1.38432×10^{8}

In[6]:=
```
σxa // EngineeringForm
```

Out[6]//EngineeringForm=

-138.432×10^{6}

Azaz $\sigma_x = -138.4$ MPa

b) Hőterhelés előtt 0.5mm “hézag”

Az egyik peremfeltétel módosul ebben az esetben, 0.5mm elmozdulást enged meg

In[7]:=
$$\int_0^l \left(\frac{1}{E1}\sigma x + \alpha\,\vartheta\right) dx == 0.0005$$

Out[7]=
$$0.000672 + \frac{\sigma x}{206\,000\,000\,000} == 0.0005$$

Ebből közvetlenül meg is határozható σ_x

In[8]:=
```
mob = First@Solve[∫_0^l (1/E1 σx + α ϑ) ⅆx == 0.0005]
```

$$\int_0^{l}\left(\frac{1}{E1}\,\sigma x+\alpha\,\vartheta\right)dx = 0.0005$$

Out[8]= $\{\sigma x \to -3.5432\times 10^{7}\}$

In[9]:=
```
σx /. mob // EngineeringForm
```

Out[9]//EngineeringForm=

-35.432×10^{6}

Azaz $\sigma_x = -35.4$ MPa

Megjegyzés: az integrálás végeredménye paraméteresen:

In[10]:=
```
Clear[E1, α, ϑ, l]
```

In[11]:= $$\int_0^{L}\left(\frac{1}{E}\,\sigma x+\alpha\,\vartheta\right)dx$$

Out[11]= $$L\left(\alpha\,\vartheta+\frac{\sigma x}{E}\right)$$

2. feladat

Egy 40×40 mm^2 téglalap keresztmetszetű rúd egyik végét mereven befogjuk, másik végét vízsz-intes
vezetékbe vezetjük. A vezetékben a rúd vége szabadon elmozdulhat, elfordulni azonban nem tud.
Ezek után a rúd felső peremét teljes hosszában 80 °C hőmérsékletű folyadékkal leöntjük.
A rúd és a folyadék közötti hőátadási tényező 100 W/m^2K. A rúd kezdeti hőmérséklete 20 °C.

a) Milyen lesz a stacionárius hőfeszültség eloszlás a rúdban?
(A súlypontvonal x, az erre függőleges tengely z.)
E = 200 GPa, $\alpha = 1.2\times10^{-5}$ 1/K, k = 50 W/mK.

Megoldás

Adatok:

```
In[34]:= a = 0.04;
ϑF = 80;
ϑ1 = 20;
E1 = 200 × 10^9;
α = 1.2 × 10^-5;
k = 50;
αha = 100;
```

a) Hőmérséklet eloszlás a rúdban

A hőmérséklet eloszlás a keresztmetszetben lineáris, csak z-től függ

```
In[77]:= ϑ[z_] := A + B z
```

Az alsó peremfeltétel:

```
In[78]:= ϑ[-a / 2] == ϑ1
Out[78]= A - 0.02 B == 20
```

A felső peremfeltétel másodfajú:

$$\frac{d\vartheta}{dz} = \left(\vartheta_{\text{folyadék}} - \vartheta_1\right) \frac{\alpha_{\text{hőátadás}}}{k}$$

Itt α nem a lineáris hőtágulási együttható!

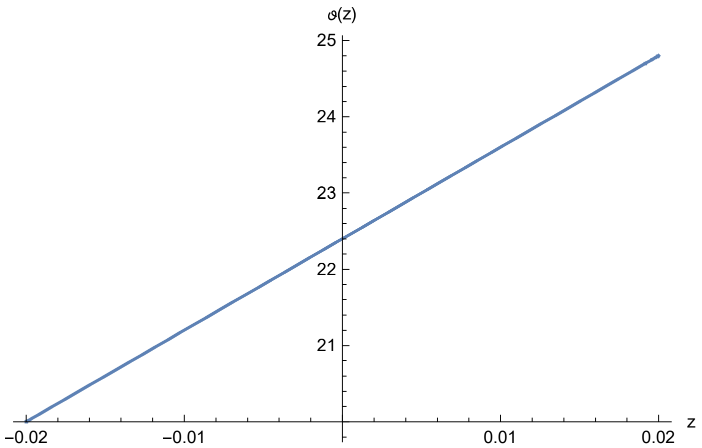
```
In[79]:= ϑ'[a / 2] == (ϑF - ϑ1) αha/k
Out[79]= B == 120
```

Ezzel:

```
In[82]:= moa = First@Solve[{ϑ[-a / 2] == ϑ1, ϑ'[a / 2] == (ϑF - ϑ1) αha/k}, {A, B}]
Out[82]= {A → 22.4, B → 120.}
```

In[83]:= `Plot[ϑ[z] /. moa, {z, -a / 2, a / 2}, AxesLabel → {"z", "ϑ(z)"}]`

Out[83]=



b) Hőfeszültség eloszlás

A feszültség eloszlást az alábbi összefüggés adja:

$\sigma_x(z) = \frac{F_T}{A} + \frac{M_{Ty}}{I_y} z - \frac{M_{Tz}}{I_z} y - E\,\alpha\,\vartheta(z)$

In[84]:= $FT = E1\,\alpha\,a \int_{-a/2}^{a/2} \vartheta[z]\,dz$ /. moa

Out[84]= 86016.

In[85]:= $AA = a^2$

Out[85]= 0.0016

In[86]:= $MTy = E1\,\alpha\,a \int_{-a/2}^{a/2} z\,\vartheta[z]\,dz$ /. moa

Out[86]= 61.44

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka

In[87]:= $Iy = \frac{a\,a^3}{12}$

Out[87]= 2.13333×10^{-7}

Mivel ebben az esetben a rúdvégek szabadon elmozdulhatnak, a konstans tagok kioltják egymást (nem lesz normál igénybevétel)

Így a σ_x eloszlás

In[95]:= $\frac{FT}{AA} - \frac{MTy}{Iy} z - E1\,\alpha\,\vartheta[z]$ /. moa // Expand

Out[95]= $-7.45058 \times 10^{-9} - 5.76 \times 10^{8}\, z$

Megjegyzés: a konstans tag gyakorlatilag 0.

Azaz σ_x = -576*z MPa, (z-t [m]-ben kell helyettesíteni), a két szélső szálban σ_x = ±11.5 MPa.

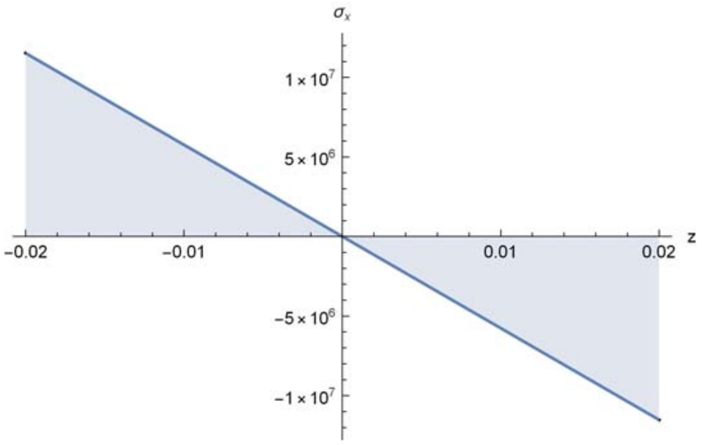
In[97]:=
$$\frac{FT}{AA} - \frac{MTy}{Iy} z - E1\,\alpha\,\vartheta[z]\ /.\ moa\ /.\ z \to a/2\ //\ EngineeringForm$$

Out[97]//EngineeringForm=

-11.52×10^{6}

In[98]:=
$$Plot\left[\frac{FT}{AA} - \frac{MTy}{Iy} z - E1\,\alpha\,\vartheta[z]\ /.\ moa,\ \{z, -a/2, a/2\},\ AxesLabel \to \{"z", "\sigma_x"\},\ Filling \to Axis\right]$$

Out[98]=



In[99]:= Clear[a, b, E1, α, ϑ2, ϑ1, ϑ]

3. feladat

Mekkora maximális húzó ill. nyomó hőfeszültség ébred egy 10 mm belső és 20 mm külső sugarú nyitott rézcső falában,

a) ha a belső perem állandó hőmérséklete 0 °C, a külső peremé pedig 100 °C?

b) Hogyan változnak az eredmények, ha a hőmérsékleteloszlást lineárisnak vesszük?

E = 204 GPa, $\alpha = 1.6 \times 10^{-5}$ 1/K.

a.1) Hőmérséklet eloszlás csőben

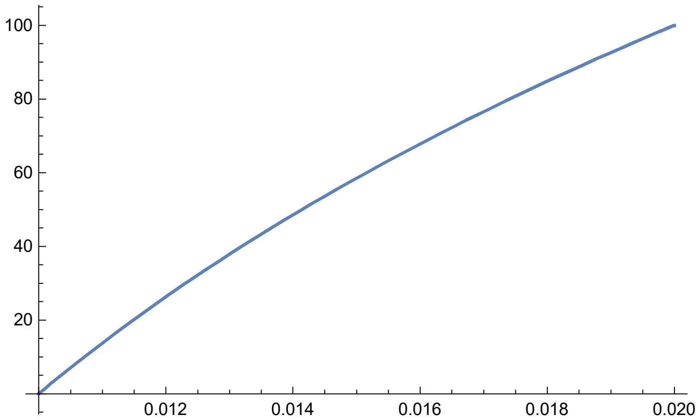
Adatok:

```
a = 0.01;
b = 0.02;
E1 = 104 × 10^9;
α = 1.6 × 10^-5;
ϑ1 = 0;
ϑ2 = 100;
```

$$\vartheta[r\_] := \vartheta 2 + \frac{\vartheta 1 - \vartheta 2}{\mathrm{Log}[b / a]} \mathrm{Log}[b / r]$$

Tehát a hőmérséklet eloszlást a termikus peremfeltételekből meghatározhatjuk

```
Plot[ϑ[r], {r, a, b}]
```



a.2) Feszültségeloszlások

```
ClearAll[σr, σθ]
```

$$\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2} - \frac{E1\,\alpha}{r^2} \int_a^r (\rho\, \vartheta[\rho])\, d\rho$$

$$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2} + \frac{E1\,\alpha}{r^2} \int_a^r (\rho\, \vartheta[\rho])\, d\rho - E1\,\alpha\, \vartheta[r]$$

Most a mechanikai peremfeltételeket kell használni A és B meghatározásához:

```
σr[a] == 0
0. + A - 10000. B == 0
```

```
σr[b] == 0
```

$-3.81879 \times 10^{7} + A - 2500.\ B == 0$

```
moa2 = First@Solve[{σr[a] == 0, σr[b] == 0}]
```

$\{A \to 5.09172 \times 10^{7},\ B \to 5091.72\}$

Ezzel a σ_θ a belső peremen:

```
σθ[a] /. moa2 // EngineeringForm
```

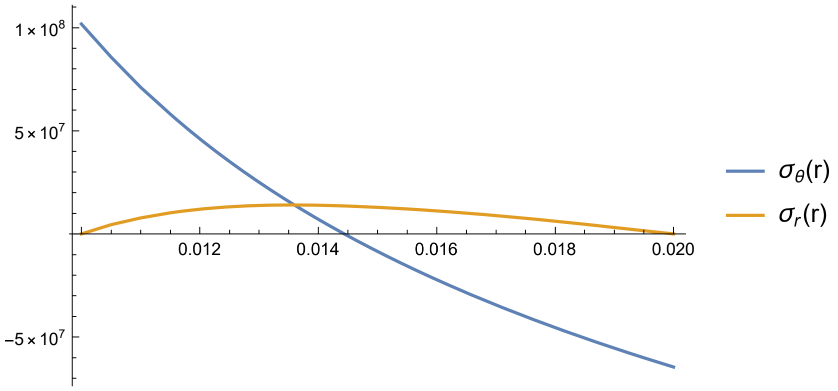
101.834×10^{6}

Valamint a külső peremen:

```
σθ[b] /. moa2 // EngineeringForm
```

-64.5656×10^{6}

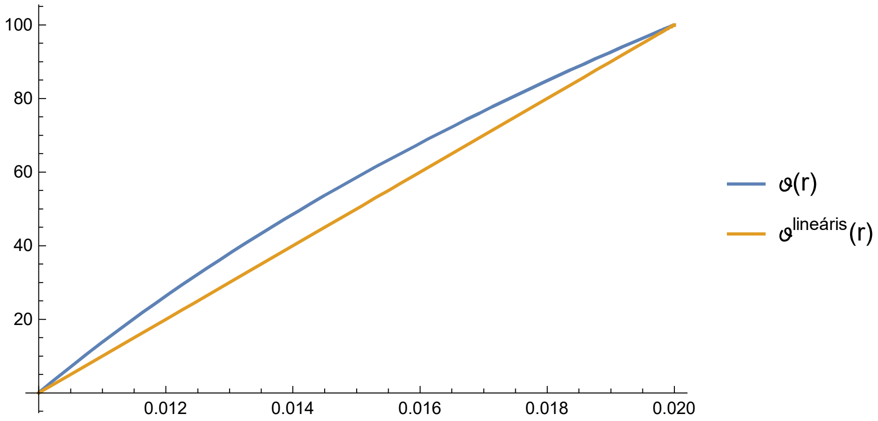
```
ListPlot[{Table[{r, σθ[r] /. moa2}, {r, a, b, (b - a) / 20}],
  Table[{r, σr[r] /. moa2}, {r, a, b, (b - a) / 20}]},
 Joined → True, PlotLegends → {"σθ(r)", "σr(r)"}]
```



b) Lineáris közelítéssel

$$\vartheta lin[r\_] := \vartheta 2 + \frac{\vartheta 1 - \vartheta 2}{b - a}(b - r)$$

```
Plot[{ϑ[r] /. moa, ϑlin[r]}, {r, a, b}, PlotLegends → {"ϑ(r)", "ϑ^lineáris(r)"}]
```



$$\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2} - \frac{E1\,\alpha}{r^2} \int_a^r (\rho\, \vartheta lin[\rho])\, d\rho$$

$$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2} + \frac{E1\,\alpha}{r^2} \int_a^r (\rho\, \vartheta lin[\rho])\, d\rho - E1\,\alpha\,\vartheta[r]$$

```
mob = First@Solve[{σr[a] == 0, σr[b] == 0}]
```

$\{A \to 4.62222 \times 10^7,\ B \to 4622.22\}$

Ezzel a σ_θ a belső peremen:

```
σθ[a] /. mob // EngineeringForm
```

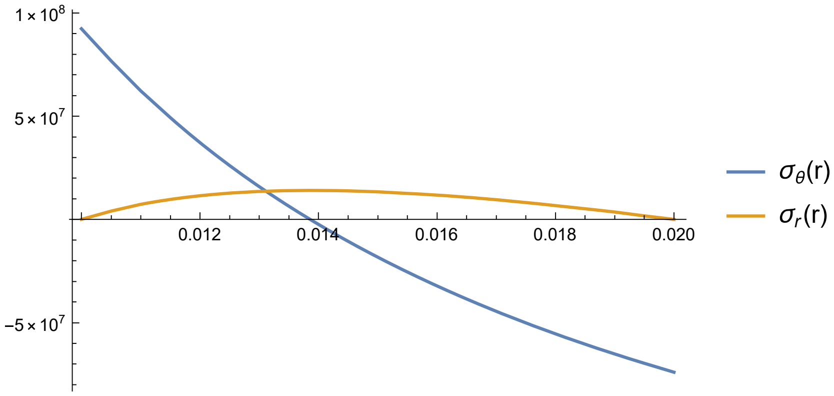
92.4444×10^6

Valamint a külső peremen:

```
σθ[b] /. mob // EngineeringForm
```

-73.9556×10^6

```
ListPlot[{Table[{r, σθ[r] /. mob}, {r, a, b, (b - a) / 20}],
  Table[{r, σr[r] /. mob}, {r, a, b, (b - a) / 20}]},
 Joined → True, PlotLegends → {"σθ(r)", "σr(r)"}]
```



4. feladat (4. gyakorlat 2. feladata)

Egy a belső és b külső sugarú nyitott acélcső belső peremét konstans T_b, külső peremét konstans T_k
hőmérsékleten tartjuk. A referencia hőmérséklet T_0.
a.) Határozzuk meg a pontos hőmérséklet eloszlást, valamint ennek lineáris közelítését!
b.) Határozzuk meg a sugár menti hőfeszültség eloszlásokat a kétféle hőmérséklet eloszlást figyelembe véve!
a = 20 mm, b = 40 mm, T_b = 80°C, T_k=60°C, T_0=20 °C, E = 210 GPa, $\alpha = 1.2\times10^{-5}$ 1/K.

a.1) Hőmérséklet eloszlás csőben

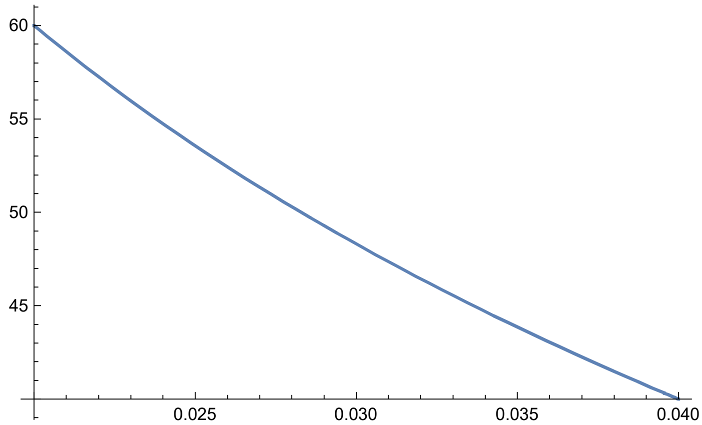
Adatok:

```
a = 0.02;
b = 0.04;
E1 = 210 × 10^9;
α = 1.2 × 10^-5;
ϑ1 = 80 - 20;
ϑ2 = 60 - 20;
```

$$\vartheta[r\_] := \vartheta 2 + \frac{\vartheta 1 - \vartheta 2}{\mathrm{Log}[b / a]}\,\mathrm{Log}[b / r]$$

Tehát a hőmérséklet eloszlást a termikus peremfeltételekből meghatározhatjuk

```
Plot[ϑ[r] /. moa, {r, a, b}]
```



a.2) Feszültségeloszlások

```
ClearAll[σr, σθ]
```

$$\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2} - \frac{E1\,\alpha}{r^2}\int_a^r (\rho\,\vartheta[\rho])\,d\rho$$

$$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2} + \frac{E1\,\alpha}{r^2}\int_a^r (\rho\,\vartheta[\rho])\,d\rho - E1\,\alpha\,\vartheta[r]$$

Most a mechanikai peremfeltételeket kell használni A és B meghatározásához:

```
σr[a] == 0
```

```
0. + A - 2500. B == 0
```

```
σr[b] == 0
```

$-4.51335\times10^{7} + A - 625.\ B == 0$

```
moa2 = First@Solve[{σr[a] == 0, σr[b] == 0}]
```

$\{A \to 6.0178\times10^{7},\ B \to 24071.2\}$

Ezzel a $\sigma_\theta = -30.8$ MPa a belső peremen:

```
σθ[a] /. moa2 // EngineeringForm
```

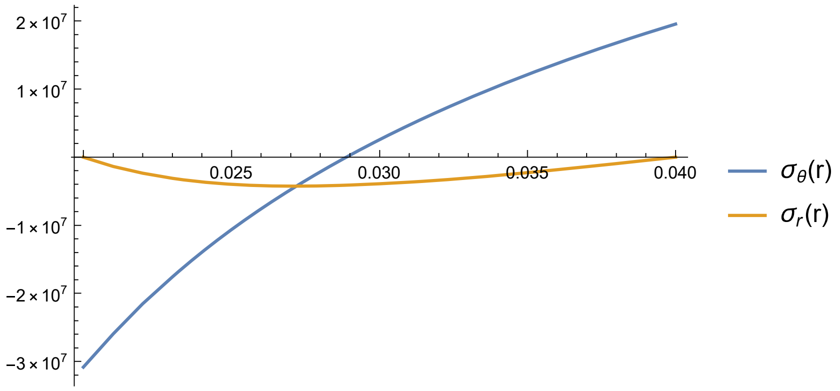
-30.8441×10^{6}

Valamint $\sigma_\theta = +19.56$ MPa a külső peremen:

```
σθ[b] /. moa2 // EngineeringForm
```

19.5559×10^{6}

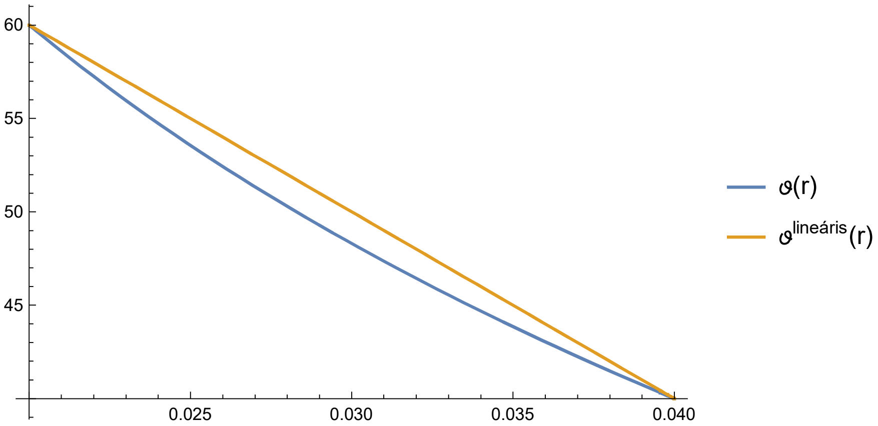
```
ListPlot[{Table[{r, σθ[r] /. moa2}, {r, a, b, (b - a) / 20}],
  Table[{r, σr[r] /. moa2}, {r, a, b, (b - a) / 20}]},
 Joined → True, PlotLegends → {"σθ(r)", "σr(r)"}]
```



b) Lineáris közelítéssel

$$\vartheta lin[r\_] := \vartheta 2 + \frac{\vartheta 1 - \vartheta 2}{b - a}(b - r)$$

```
Plot[{ϑ[r] /. moa, ϑlin[r]}, {r, a, b}, PlotLegends → {"ϑ(r)", "ϑ^lineáris(r)"}]
```



$$\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2} - \frac{E1\,\alpha}{r^2}\int_a^r (\rho\,\vartheta lin[\rho])\,d\rho$$

$$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2} + \frac{E1\,\alpha}{r^2}\int_a^r (\rho\,\vartheta lin[\rho])\,d\rho - E1\,\alpha\,\vartheta[r]$$

```
mob = First@Solve[{σr[a] == 0, σr[b] == 0}]
```

$\{A \to 6.16 \times 10^7, B \to 24640.\}$

Ezzel a σ_θ a belső peremen:

```
σθ[a] /. mob // EngineeringForm
```

$-28. \times 10^6$

Valamint a külső peremen:

```
σθ[b] /. mob // EngineeringForm
```

22.4×10^6

```
ListPlot[{Table[{r, σθ[r] /. mob}, {r, a, b, (b - a) / 20}],
  Table[{r, σr[r] /. mob}, {r, a, b, (b - a) / 20}]},
 Joined → True, PlotLegends → {"σθ(r)", "σr(r)"}]
```