1. Feladat

Egy a = 100 mm belső és b = 150 mm külső sugarú cső terhelése p_b = 60 MPa belső ill. p_k = 30 MPa külső nyomás.
a) Mekkora radiális, tangenciális és axiális feszültségek ébrednek a csőfalban, ha a csővég zárt?

Adatok:

In[∘]:=
```
a = 100;
b = 150;
pb = 60;
pk = 30;
```

a) Mekkora radiális, tangenciális és axiális feszültségek ébrednek a csőfalban, ha a csővég zárt?

A feszültségeloszlásban szereplő paraméterek:

In[∘]:= $A = \frac{pb\ a^2 - pk\ b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[∘]= −6.

In[∘]:= $B = (pb - pk) \frac{a^2\ b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[∘]= 540 000.

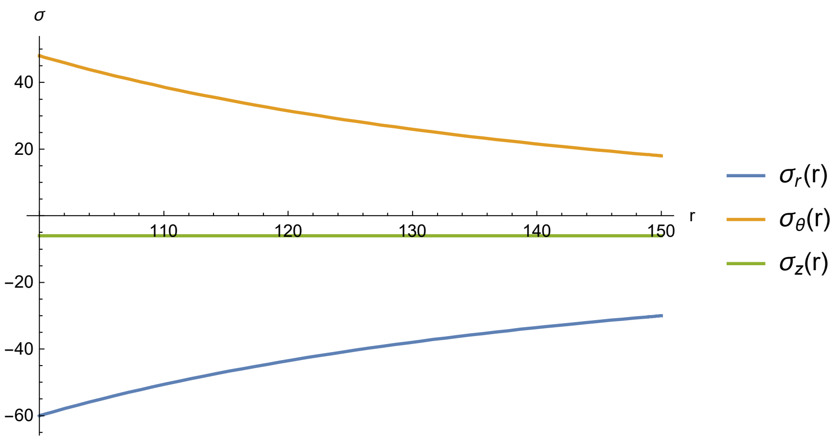
Azaz a feszültségeloszlások

In[∘]:= $\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2}$

$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2}$

$\sigma z[r\_] := A$

In[∘]:=
```
Plot[{σr[r], σθ[r], σz[r]}, {r, a, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)", "σz(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```

Out[∘]=


A belső falon (r = a)

```
In[ ]:= σr[a]
Out[ ]= -60.
```

```
In[ ]:= σθ[a]
Out[ ]= 48.
```

A külső falon (r = b)

```
In[ ]:= σr[b]
Out[ ]= -30.
```

```
In[ ]:= σθ[b]
Out[ ]= 18.
```

Axiális feszültség konstans:

```
In[ ]:= σz[r]
Out[ ]= -6.
```

(Minden feszültség MPa-ban)

```
In[ ]:= Quit
```

2. Feladat

Egy 100 mm belső és 140 mm külső átmérőjű hidraulikus hengert 100 MPa belső nyomás terhel.
a) Mekkora főfeszültségek ébrednek a belső és külső peremen?
b) Mekkora kell legyen minimálisan a henger anyagának folyáshatára, ha csak rugalmas alakváltozást engedünk meg (zárt és nyitott cső esetén)?
(Használja a Mohr-elméletet.)

Adatok:

In[ ]:=
```
a = 100;
b = 140;
pb = 100;
pk = 0;
```

a) Mekkora főfeszültségek ébrednek a belső és külső peremen?

A feszültségeloszlásban szereplő paraméterek:

In[ ]:= $A = \dfrac{pb\,a^2 - pk\,b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[ ]= 104.167

In[ ]:= $B = (pb - pk)\dfrac{a^2\,b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[ ]= 2.04167×10^6

Azaz a feszültségeloszlások

In[ ]:=
$\sigma r[r\_] := A - \dfrac{B}{r^2}$

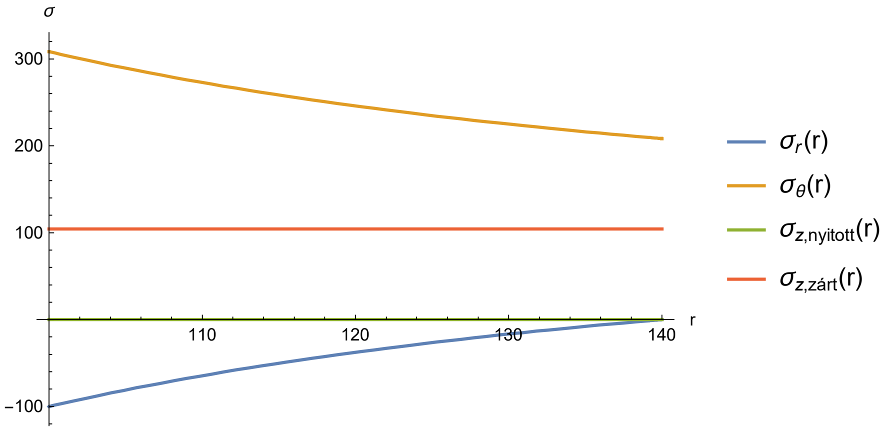
$\sigma\theta[r\_] := A + \dfrac{B}{r^2}$

$\sigma zNY[r\_] := 0$

$\sigma zZART[r\_] := A$

In[]:=
```
Plot[{σr[r], σθ[r], σzNY[r], σzZART[r]}, {r, a, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)", "σz,nyitott(r)", "σz,zárt(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```

Out[]=



A belső falon (r = a)

In[]:=
```
σr[a]
```

Out[]= -100.

In[]:=
```
σθ[a]
```

Out[]= 308.333

Azaz: $\sigma_1 = \sigma_\theta > \sigma_2 = \sigma_z > \sigma_3 = \sigma_r$

A külső falon (r = b)

In[]:=
```
σr[b]
```

Out[]= 0.

In[]:=
```
σθ[b]
```

Out[]= 208.333

Azaz: $\sigma_1 = \sigma_\theta > \sigma_2 = \sigma_z \geq \sigma_3 = \sigma_r$

b) Mekkora kell legyen minimálisan a henger anyagának folyáshatára, ha csak rugalmas alakváltozást engedünk meg (zárt és nyitott cső esetén)?

Mivel a legnagyobb és legkisebb főfeszültség σ_θ és σ_r a csővég típusától függetlenül, a Mohr-féle egyenértékű feszültség maximuma a belső peremen (r = a):

In[]:=
```
σeMmax = σθ[a] - σr[a]
```

Out[]= 408.333

Azaz a folyáshatárnak ezzel az értékkel (408,3 MPa) kell megegyezni.

In[]:=
```
Quit
```

3. Feladat

Egy 100 mm külső és 50 mm belső átmérőjű pneumatikus henger terhelése 112 MPa belső nyomás. A hengert dugattyúval zárjuk le.

a) Mekkora erő kell a dugattyú egyensúlyban tartásához?

b) Mekkora a külső és belső átmérő méretváltozása? E = 205 GPa, ν = 0,27.

Adatok:

```
In[•]:= a = 50 / 2;
b = 100 / 2;
pb = 112;
pk = 0;
E1 = 205 000;
ν = 0.27;
```

a) Mekkora erő kell a dugattyú egyensúlyban tartásához?

A belső nyomás a dugattyú felületén oszlik meg, ami:

```
In[•]:= Ad = a^2 π // N
Out[•]= 1963.5
```

$p_b = F_d / A_d$-ből:

```
In[•]:= Fd = pb Ad // N
Out[•]= 219 911.
```

Azaz F_d = 219,9 kN.

b) Mekkora a külső és belső átmérő méretváltozása?

Ebben az esetben a feszültségeloszlásban szereplő paraméterek:

In[•]:= $A = \frac{pb\, a^2 - pk\, b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[•]= 37.3333

In[•]:= $B = (pb - pk) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[•]= 93 333.3

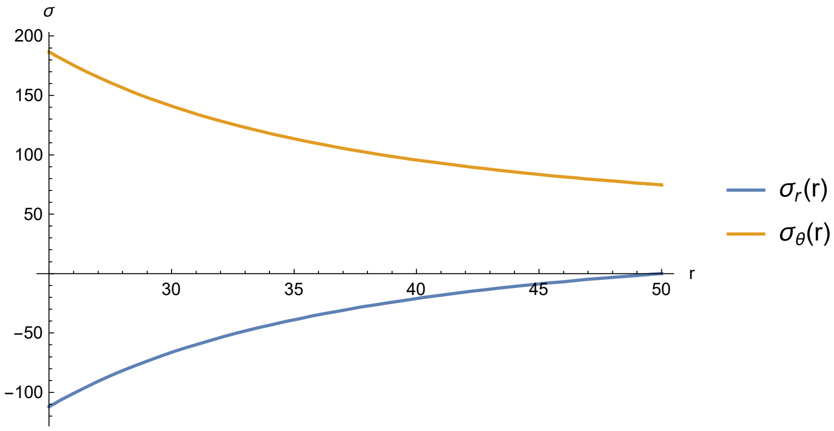
Azaz a feszültségeloszlások

In[•]:= $\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2}$

$\sigma \theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2}$

In[ ]:=
```
Plot[{σr[r], σθ[r]}, {r, a, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```

Out[ ]=



Elmozdulásmező paraméterei (dugattyúval zárt → nyitott cső!)

In[ ]:= $\hat{a} = \frac{1 - \nu}{E1} A$

Out[ ]= 0.000132943

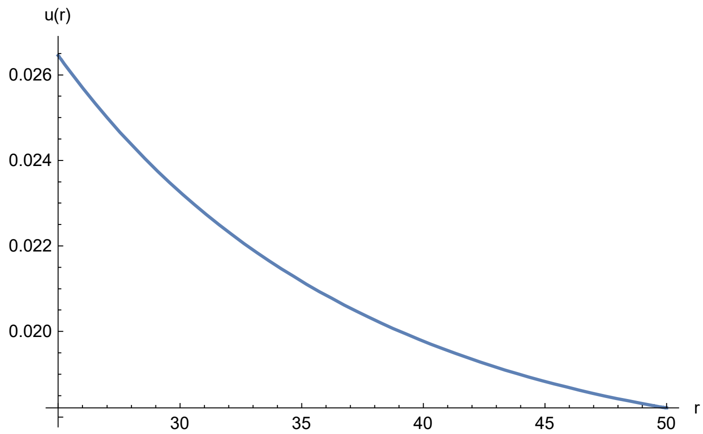
In[ ]:= $\hat{b} = \frac{1 + \nu}{E1} B$

Out[ ]= 0.578211

In[ ]:= $u[r\_] := \hat{a}\, r + \frac{\hat{b}}{r}$

In[ ]:=
```
Plot[u[r], {r, a, b}, AxesLabel → {"r", "u(r)"}]
```

Out[ ]=



A belső sugár változása u(a), tehát a belső átmérő változása ennek kétszerese:

In[ ]:=
```
2 u[a]
```

Out[ ]= 0.0529041

Azaz Δd = 52,9 μm

A kulső sugár változása u(b), tehát a külső átmérő változása ennek kétszerese:

In[ ]:=
```
2 u[b]
```
Out[ ]=
```
0.0364228
```

Azaz $\Delta D = 36{,}4\ \mu m$

In[ ]:=
```
Quit
```

4. Feladat

Nyúlásmérést végeztünk egy 100 mm külső és 50 mm belső átmérőjű cső külső felületén. A tangenciális nyúlás 240×10^{-6}-nak, az axiális nyúlás 60×10^{-6}-nak adódott. A csövet 90 MPa belső nyomás terhelte.

a) Állapítsa meg, hogy mekkora az aktuális tangenciális és axiális feszültség!

b) Hasonlítsa össze a kapott értékeket az elméleti értékekkel!

Mit mondhatunk a csővég típusáról? E = 208 GPa, $\nu = 0{,}29$.

Adatok:

In[ ]:=
```
a = 25;
b = 50;
εθ = 240 × 10^-6;
εz = 60 × 10^-6;
pb = 90;
pk = 0;
E1 = 208000;
ν = 0.29;
```

a) Állapítsa meg, hogy mekkora az aktuális tangenciális és axiális feszültség!

Mivel minden adott, kiszámíthatjuk az elméleti feszültségeket

In[ ]:= $A = \dfrac{pb\, a^2 - pk\, b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[ ]= 30.

In[ ]:= $B = (pb - pk)\dfrac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ // N

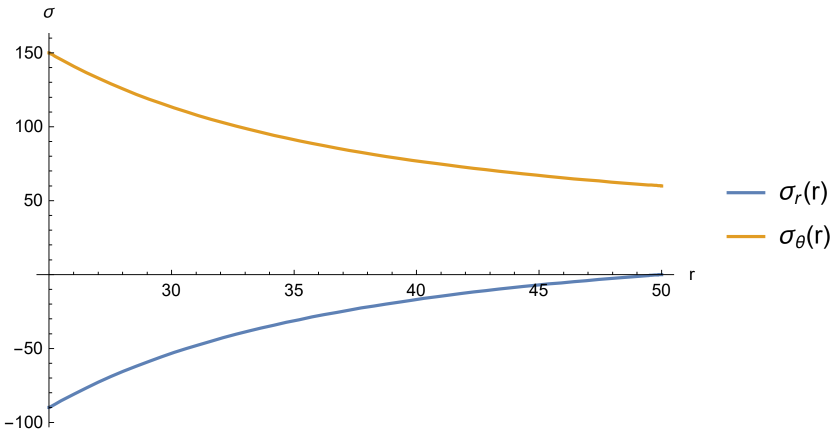
Out[ ]= 75000.

Azaz a feszültségeloszlások

In[ ]:= $\sigma r[r\_] := A - \dfrac{B}{r^2}$

$\sigma\theta[r\_] := A + \dfrac{B}{r^2}$

In[ ]:=
```
Plot[{σr[r], σθ[r]}, {r, a, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```

Out[ ]=


b) Hasonlítsa össze a kapott értékeket az elméleti értékekkel! Mit mondhatunk a csővég típusáról?

Az első pont, ahol eltér a nyitott és a zárt csőre vonatkozó összefüggés ε_z

Nyitott csőre:

In[ ]:= $\varepsilon zNY = -\frac{2\,\nu}{E1} A$

Out[ ]= -0.0000836538

Zárt csőre:

In[ ]:= $\varepsilon zZ = \frac{1 - 2\,\nu}{E1} A$

Out[ ]= 0.0000605769

Itt már a mért nyúlás előjele alapján el tudjuk dönteni, hogy **zárt csőről van szó.**
Egyébként a mérés és az elmélet között kisebb mint 1% a relatív hiba.

In[ ]:= `εzZ // EngineeringForm`

Out[ ]//EngineeringForm=
60.5769×10^{-6}

In[ ]:= $\frac{\varepsilon zZ - \varepsilon z}{\varepsilon zZ}$

Out[ ]= 0.00952381

Itt pótolhatjuk az előző feladatból hiányzó $\sigma_z - t$, mert már tudjuk, hogy zárt csőről van szó.

In[ ]:= `σz = A`

Out[ ]= 30.

A tangenciális nyúlásra vonatkozó összefüggés: Hooke-törvény

In[•]:= $\varepsilon\theta b = \frac{1+\nu}{E1}\left(\sigma\theta[b] - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma r[b] + \sigma\theta[b] + \sigma z)\right)$

Out[•]= 0.000246635

In[•]:= `εθb // EngineeringForm`

Out[•]//EngineeringForm=

246.635×10^{-6}

A mérés és az elmélet itt is közeli értékeket ad: a relatív hiba 2,7%

In[•]:= $\frac{\varepsilon\theta b - \varepsilon\theta}{\varepsilon\theta b}$

Out[•]= 0.0269006

Megjegyzés: a mérésből számított feszültségek

A mért ε_z nyúlásból kifejezhető az A paraméter:

In[•]:= $Am = \frac{\varepsilon z\ E1}{1 - 2\nu}$

Out[•]= 29.7143

Majd a Hooke-törvény és ε_θ felhasználásával B paraméter

In[•]:= $Bm = Bm\ /.\ Solve\left[\varepsilon\theta == \frac{1+\nu}{E1}\left(\left(Am + \frac{Bm}{b^2}\right) - \frac{\nu}{1+\nu}\left(\left(Am - \frac{Bm}{b^2}\right) + \left(Am + \frac{Bm}{b^2}\right) + Am\right)\right)\right]\ //\ First$

Out[•]= 72 558.1

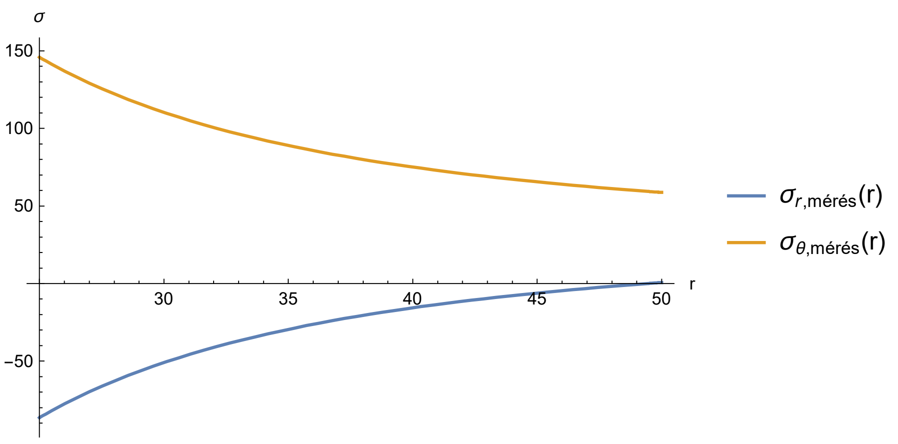
Azaz a mérés alapján előálló feszültségeloszlások:

In[•]:= $\sigma rm[r\_] := Am - \frac{Bm}{r^2}$

$\sigma\theta m[r\_] := Am + \frac{Bm}{r^2}$

In[•]:= `Plot[{σrm[r], σθm[r]}, {r, a, b},`
`PlotLegends → {"σr,mérés(r)", "σθ,mérés(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]`

Out[•]=



In[•]:= `σrm[b]`

Out[•]= 0.69103

In[ ]:= σΘm[b]

Out[ ]= 58.7375

In[ ]:= Quit

5. Feladat

Egy 200 mm átmérőjű tömör öntöttvas tárcsa anyagára a megengedett feszültség 30 MPa, sűrűsége $\rho = 7500\ \text{kg}/\text{m}^3$, Poisson tényezője $\nu = 0{,}25$.

a) Mekkora lehet a megengedhető üzemi fordulatszám?

Adatok:

```
In[]:= b = 100;
σmeg = 30;
ρ = 7500 × 10^-12;
ν = 0.25;
```

a) Mekkora lehet a megengedhető üzemi fordulatszám?

Mivel tömör a tárcsa (a = 0), B = 0 és $\hat{b} = 0$.

Azaz, a feszültségeloszlások:

```
In[]:= σr[r_] := A + C1 r^2;
σθ[r_] := A + C2 r^2;
```

Ahol C_1 és C_2:

```
In[]:= C1 = -(3 + ν)/8 ρ ω^2
Out[]= -3.04687 × 10^-9 ω^2
```

```
In[]:= C2 = -(1 + 3 ν)/8 ρ ω^2
Out[]= -1.64062 × 10^-9 ω^2
```

Az egyenértékű feszültség $\sigma_{e,\,\max}^{\text{Mohr}} = \sigma_\theta(0) - \sigma_z = \sigma_\theta(0) = \sigma_r(0) = A$

Azaz A értéke megegyezik a megengedhető feszültség értékével:

```
In[]:= A = σmeg
Out[]= 30
```

A másik egyenletünk a külső peremfeltétel:

```
In[]:= σr[b] == 0
Out[]= 30 - 0.0000304688 ω^2 == 0
```

Innen ω [rad/s]

```
In[]:= mo = Solve[σr[b] == 0, ω] // Last
Out[]= {ω → 992.278}
```

Átváltva [ford/perc]-be:

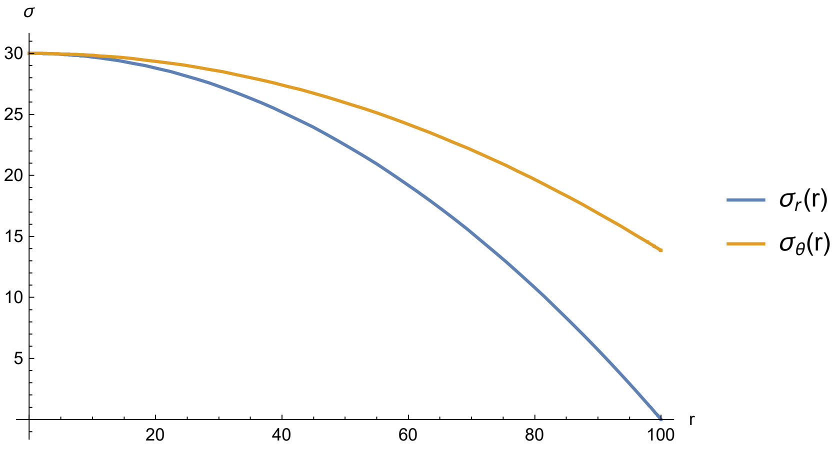
In[ ]:=
```
nmax = ω/(2 π) 60 /. mo
```

$$nmax = \frac{\omega}{2\pi} 60 \;/.\; mo$$

Out[ ]= 9475.56

Megjegyzés: feszültségeloszlások grafikonjai:

In[ ]:=
```
Plot[{σr[r] /. mo, σθ[r] /. mo}, {r, 0, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```

Out[ ]=


In[ ]:=
```
Quit
```

6. Feladat

Egy 400 mm átmérőjű tömör acél tárcsa üzemi fordulatszáma 3000/perc.
a) Hol ébred és mekkora lesz a maximális Mohr-féle egyenértékű feszültség?
b) Hogyan változik ez az érték, ha a tárcsába 40 mm átmérőjű furatot készítünk?
c) Milyen fordulatszámnál lép fel képlékeny folyás a tömör ill. a furatos tárcsában?
$\rho = 7800$ kg/m3 , $\nu = 0{,}3$, $\sigma_F = 240$ MPa.

Lásd: 2. gyakorlat

Adatok:

In[1]:=
```
a = 20;
b = 200;
σF = 240;
ρ = 7800 × 10^-12;
ν = 0.3;
n = 3000;
E1 = 200000;
```

a) Hol ébred és mekkora lesz a maximális Mohr-féle egyenértékű feszültség? (tömör)

In[8]:= `ω = 2 π n / 60`

Out[8]= $100\,\pi$

In[9]:= $\hat{c} = -\frac{1-\nu^2}{8\,E1}\,\rho\,\omega^2$

Out[9]= -4.3784×10^{-10}

In[10]:= $C1 = -\frac{3+\nu}{8}\,\rho\,\omega^2$

Out[10]= -0.000317555

In[11]:= $C2 = -\frac{1+3\,\nu}{8}\,\rho\,\omega^2$

Out[11]= -0.000182834

In[12]:= $A = -C1\,b^2$

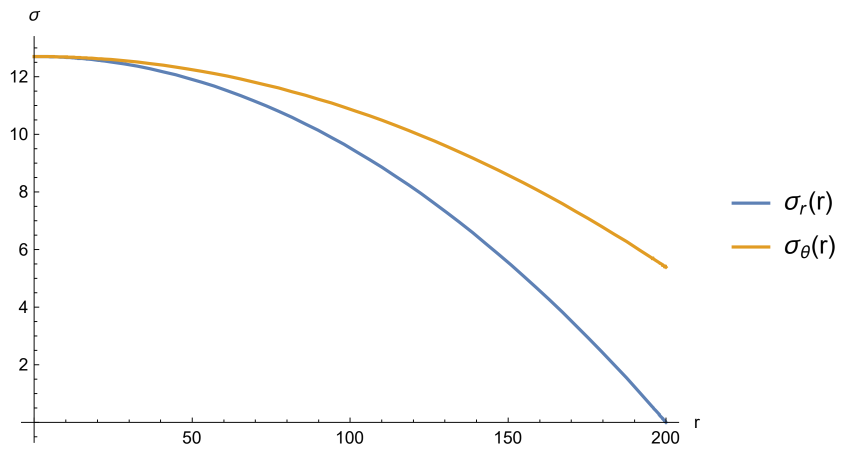
Out[12]= 12.7022

A tömör tárcsa feszültségeloszlásai (a = 0 miatt $\hat{b} = 0$, B = 0)

In[13]:=
```
σrt[r_] := A + C1 r^2
σθt[r_] := A + C2 r^2
```

In[15]:=
```
Plot[{σrt[r], σθt[r]}, {r, 0, b},
 PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)"}, AxesLabel → {"r", "σ"}]
```

Out[15]=



$\sigma_{e,\,max}^{Mohr} = \sigma_r(0) - \sigma_z(0) = \sigma_\theta(0) - \sigma_z(0) = A$

In[16]:=
```
σrt[0]
```

Out[16]= 12.7022

Mivel az A paraméter ω^2-től függ:

In[17]:= $\text{nFt} = \text{n}\sqrt{\frac{\sigma\text{F}}{\text{A}}}$

Out[17]= 13 040.3

b) Hogyan változik ez az érték, ha a tárcsába 40 mm átmérőjű furatot készítünk?

In[18]:= $\text{B} = \frac{\text{a}^2\,\text{b}^2}{\text{a}^2 - \text{b}^2}\left(\text{C1}\,\text{b}^2 - \text{C1}\,\text{a}^2\right)$

Out[18]= 5080.87

In[19]:= $\text{A} = \frac{\text{B}}{\text{a}^2} - \text{C1}\,\text{a}^2$

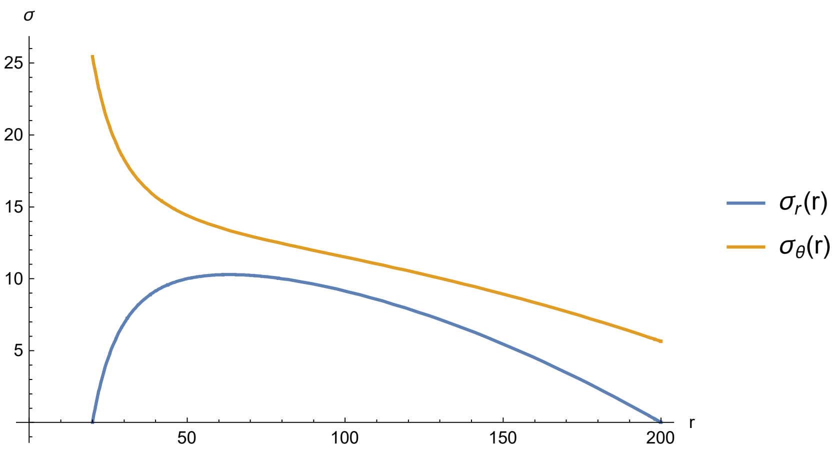
Out[19]= 12.8292

In[20]:= $\sigma\text{rf}[\text{r\_}] := \text{A} - \frac{\text{B}}{\text{r}^2} + \text{C1}\,\text{r}^2$

$\sigma\theta\text{f}[\text{r\_}] := \text{A} + \frac{\text{B}}{\text{r}^2} + \text{C2}\,\text{r}^2$

In[22]:=
```
Plot[{σrf[r], σθf[r]}, {r, a, b}, PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)"},
 AxesLabel → {"r", "σ"}, AxesOrigin → {0, 0}]
```

Out[22]=



$$\sigma_{e,\,max}^{Mohr} = \sigma_\theta(a) - \sigma_r(a) = \sigma_\theta(a)$$

In[23]:=
```
σθf[a] - σrf[a]
```

Out[23]= 25.4582

c) Milyen fordulatszámnál lép fel képlékeny folyás a tömör ill. a furatos tárcsában?

Mivel az $\sigma_{e,max}$ paraméter ω^2-től függ:

In[24]:=
$$nFf = n\sqrt{\frac{\sigma F}{\sigma\theta f[a]}}$$

Out[24]= 9211.12

Összevetve a tömör tárcsával:

In[25]:=
```
nFt
```

Out[25]= 13 040.3