EBSZ gyakorló feladatok 2.

I. Képlékeny alakváltozás

1. feladat

Egy $l = 2$ m hosszú, állandó 50×20 mm^2 téglalap keresztmetszetű kéttámaszú rudat a rúd közepén a rúd hossztengelyére merőleges irányú (felfelé mutató) koncentrált erő terheli.

a) Mekkora F_F erő esetén indul meg a képlékeny alakváltozás?

b) Mekkora lesz a a rugalmas mag mérete 1,1 F_F erő esetén?

c) A rúd hossztengelye irányában milyen hosszú lesz a képlékeny zóna kiterjedése?

E = 206,8 GPa, σ_F = 225 MPa.

Megoldás

Adatok:

In[1]:=
```
l = 2;
a = 0.05;
b = 0.02;
σF = 225 × 10^6;
```

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka az y-tengelyre $[m^4]$

In[5]:= $Iy = \frac{a\, b^3}{12}$

Out[5]= 3.33333×10^{-8}

Az *x*-irányú rúdban a hajlítónyomatéki igénybevétel ebben az esetben (F_F +*y* irányú)

In[6]:= $Mh[x\_] := \text{Piecewise}\left[\left\{\left\{+\frac{FF}{2}x,\ x < \frac{1}{2}\right\}, \left\{+\frac{FF}{2}x - FF\left(x - \frac{1}{2}\right),\ x \geq \frac{1}{2}\right\}\right\}\right]$

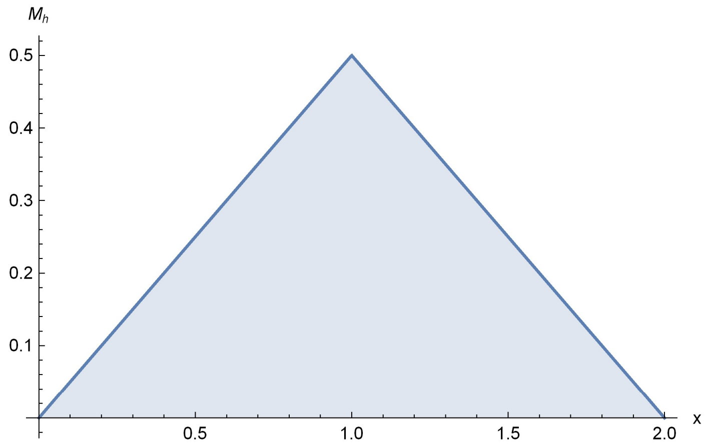
In[7]:=
```
Mh[x] /. FF → F // Simplify // TraditionalForm
```

Out[7]//TraditionalForm=

$$\begin{cases} \frac{F x}{2} & x < 1 \\ F - \frac{F x}{2} & \text{True} \end{cases}$$

Ha például F_F 1N nagyságú lenne, akkor így nézne ki az igénybevételi függvény:

In[8]:=
```
Plot[Mh[x] /. FF → 1, {x, 0, l}, Filling → Axis, AxesLabel → {"x", "Mh"}]
```

Out[8]=


A maximális hajlító igénybevétel $x = l/2$ helyen ébred

In[9]:=
```
MhMax = Mh[l / 2]
```

Out[9]= $\frac{FF}{2}$

a) Képlékeny alakváltozás megindulása

Navier-képletből:

In[10]:= $\sigma xMax = \frac{MhMax}{Iy}\frac{b}{2}$

Out[10]= 150 000. FF

Ezt egyenlővé téve a folyáshatárral:

In[11]:=
```
moa = First@Solve[σxMax == σF]
```

Out[11]= {FF → 1500.}

b) Rugalmas mag + képlékeny zóna

Ebben az esetben a hajlító igénybevétel módosul:

In[12]:=
```
MhMaxB = MhMax /. FF → 1.1 FF
```

Out[12]= 0.55 FF

Azaz 825 Nm

In[13]:=
```
MhMaxB = MhMaxB /. moa
```

Out[13]= 825.

A rugalmas és képlékeny részek közti határra vonatkozó képlet (téglalap keresztmetszetre)

In[14]:= $zF = \sqrt{3\left(\frac{b^2}{4} - \frac{MhMaxB}{\sigma F\ a}\right)}$

Out[14]= 0.00894427

Tehát a rugalmas mag teljes hossza a keresztmetszetben:

In[15]:=
```
2 zF
```
Out[15]=
```
0.0178885
```

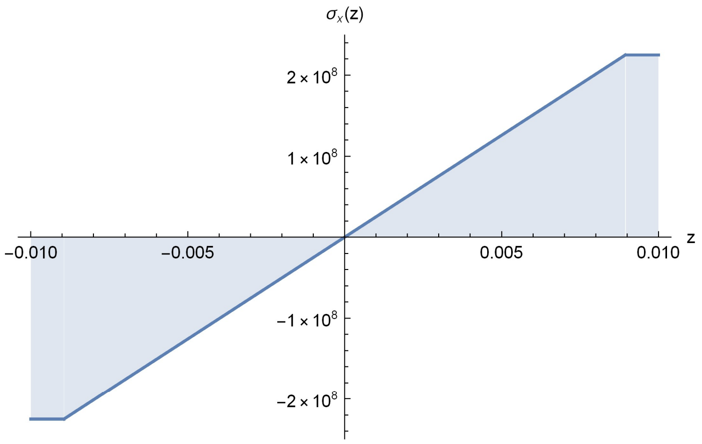
Azaz 17.89 mm

Megjegyzés: a hajlításból származó feszültség eloszlás ekkor:

In[16]:=
```
σx[z_] := Piecewise[{{σF/zF z, Abs[z] < zF}, {Sign[z] σF, Abs[z] ≥ zF}}]
```

In[17]:=
```
Plot[σx[z], {z, -b/2, b/2}, AxesLabel → {"z", "σx(z)"}, Filling → Axis]
```

Out[17]=



Ellenőrizhetjük az eloszlást, a $M_h = \int_A z\, \sigma_x(z)\, dA$ összefüggéssel

In[18]:=
$$\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} z\, \sigma x[z]\, dz\, dy$$

Out[18]=
```
825.
```

(Szintén 825 Nm jön ki, tehát helyes a $\sigma_x(z)$ eloszlás.)

c) Képlékeny zóna kiterjedése (hosszirányban)

Meg kell keresnünk azt a pontot, ahol a rugalmas és képlékeny zóna határa megegyezik a keresztmetszet szélességével $z_F = b/2$, azaz nincs képlékeny zóna

In[19]:=
```
moc = First@Solve[b/2 == Sqrt[3 (b^2/4 - Mh0/(σF a))]]
```

Out[19]=
```
{Mh0 → 750.}
```

Azaz ott ahol a hajlító igénybevétel lecsökken 750 Nm-re, már eltűnik a képlékeny zóna

Mivel a hajlító igénybevétel függvénye az első szakaszon $M_h = \frac{(1.1\, F_F)}{2}\, x$

In[20]:=
```
mocx = First@Solve[1.1 FF/2 x == 750 /. moa]
```

Out[20]=
```
{x → 0.909091}
```

Ez a rúd bal oldalán levő csak-rugalmas alakváltozással rendelkező rész hosszát adja meg, tehát a csak rugalmas zónával rendelkező rész:

In[21]:=
```
lR = 2 x /. mocx
```
Out[21]= 1.81818

Azaz a képlékeny rész hosszirányú kiterjedése

In[22]:=
```
lF = l - lR
```
Out[22]= 0.181818

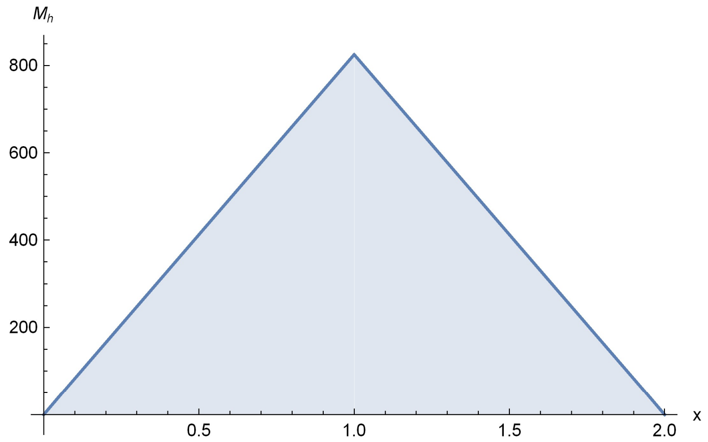
Azaz l_F = 181.8 mm

Megjegyzés I: z_F változása a hossz mentén

Az 1.1 F_F erőhöz tartozó hajlító igénybevétel:

In[23]:= MhB[x_] := Piecewise$\left[\left\{\left\{+\frac{1.1\,FF}{2}\,x,\ x<\frac{l}{2}\right\},\ \left\{+\frac{1.1\,FF}{2}\,x-1.1\,FF\left(x-\frac{l}{2}\right),\ x\geq\frac{l}{2}\right\}\right\}\right]$ /. moa

In[24]:=
```
Plot[MhB[x], {x, 0, l}, Filling → Axis, AxesLabel → {"x", "Mh"}]
```
Out[24]=

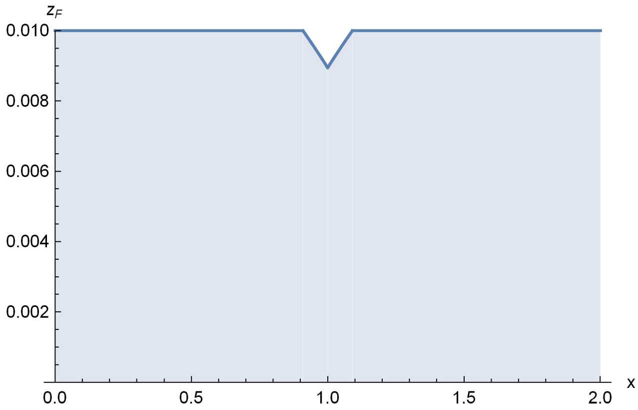


Ezt behelyettesítve a z_F-re vonatkozó képletbe:

In[25]:= zFB[x_] := Min$\left[\sqrt{3\left(\frac{b^2}{4}-\frac{\text{MhB}[x]}{\sigma F\ a}\right)},\ b/2\right]$

In[26]:=
```
Plot[zFB[x], {x, 0, 1}, Filling → Axis, PlotRange → {0, b / 2},
 AxesLabel → {"x", "zF"}, PlotLabel → "Rugalmas-képlékeny határ 1.1 FF esetén"]
```

Out[26]=



Azaz itt is látszik, hogy csak a belső ~10%-ban van képlékeny alakváltozás.
(A kék zóna rugalmas, a fehér zóna képlékeny)

Megjegyzés 2: z_F változása a hossz mentén, 1.48 F_F esetén

Téglalap keresztmetszetnél az alaktényező

In[27]:=
$$\text{MhF} = \frac{a\,b^2}{6}\,\sigma F;$$
$$\text{MhK} = \frac{a\,b^2}{4}\,\sigma F;$$
$$\lambda = \frac{\text{MhK}}{\text{MhF}}$$

Out[29]= 1.5

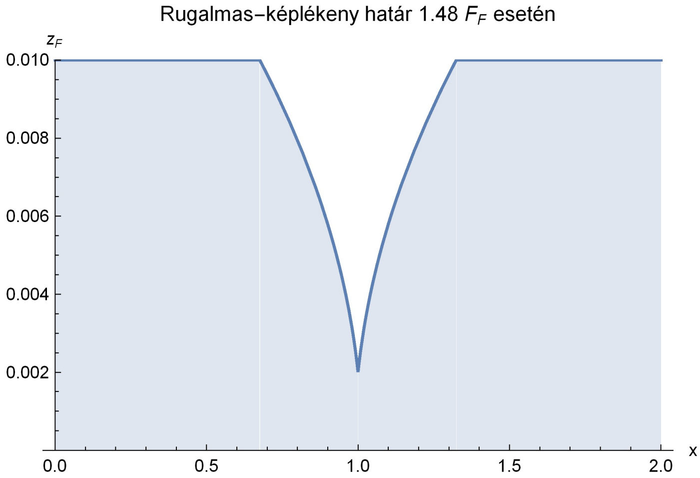
Azaz 1.48 F_F nagyon közel van a képlékeny tartalék kimerüléséhez:

In[30]:=
$$\text{MhC}[x\_] := \text{Piecewise}\left[\left\{\left\{+\frac{(1.48\ \text{FF})}{2}\,x,\ x < \frac{1}{2}\right\},\ \left\{+\frac{(1.48\ \text{FF})}{2}\,x - (1.48\ \text{FF})\left(x - \frac{1}{2}\right),\ x \geq \frac{1}{2}\right\}\right\}\right]\ /.\ \text{moa}$$

$$\text{zFC}[x\_] := \text{Min}\left[\sqrt{3\left(\frac{b^2}{4} - \frac{\text{MhC}[x]}{\sigma F\ a}\right)},\ b/2\right]$$

In[32]:=
```
Plot[zFC[x], {x, 0, l}, Filling → Axis, PlotRange → {0, b / 2},
 AxesLabel → {"x", "zF"}, PlotLabel → "Rugalmas-képlékeny határ 1.48 FF esetén"]
```

Out[32]=



2. feladat

In[33]:=
```
Clear[σx, Mh, MhF, MhK, σF]
```

Mekkora az alaktényezője annak a T-szelvénynek, amelynek a magassága 150 mm, szélessége 100 mm,
vastagsága pedig 12 mm?

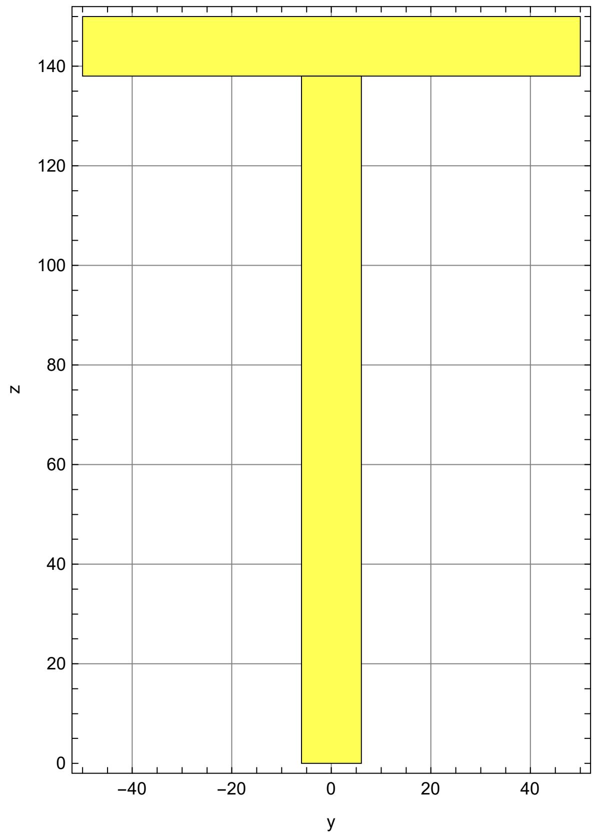
In[34]:=
```
h = 150;
w = 100;
t = 12;
```

A keresztmetszet alakja, súlypontja, másodrendű nyomatéka

Bontsuk fel a T szelvényt két téglalapra:

In[37]:=
```
Graphics[{EdgeForm[Black], Lighter@Yellow,
  Rectangle[{-w / 2, h - t}, {w / 2, h}],
  Rectangle[{-t / 2, 0}, {t / 2, h - t}]
 }, Frame → True, GridLines → Automatic, FrameLabel → {"y", "z"}]
```

Out[37]=



Határozzuk meg a súlypontját:

In[38]:=
```
yS1 = 0;
zS1 = h - t / 2;
A1 = w * t;
yS2 = 0;
zS2 = (h - t) / 2;
A2 = (h - t) * t;
```

In[44]:=
$$yS = \frac{yS1\ A1 + yS2\ A2}{A1 + A2}$$

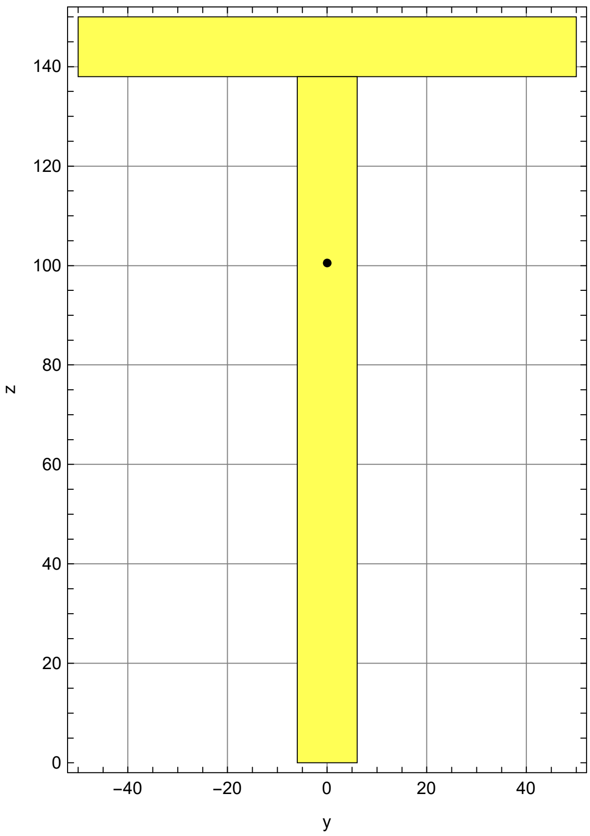
Out[44]= 0

Megjegyzés: látható, hogy a súlypont x_S koordinátája 0.

In[45]:=
$$zS = \frac{zS1\ A1 + zS2\ A2}{A1 + A2} \text{ // N}$$

Out[45]= 100.513

In[46]:=
```
Graphics[{EdgeForm[Black], Lighter@Yellow,
   Rectangle[{-w / 2, h - t}, {w / 2, h}],
   Rectangle[{-t / 2, 0}, {t / 2, h - t}],
   Black, PointSize[Medium], Point[{yS, zS}]
  }, Frame → True, GridLines → Automatic, FrameLabel → {"y", "z"}]
```

Out[46]=


A súlypontra azért van szükség, hogy a két téglalap másodrendű nyomatékát átszámíthassuk saját súlyponti tengelyeikről a közös súlyponton átmenő y tengelyre.

In[47]:= $\texttt{It1y} = \frac{w\,t^3}{12};$

$\texttt{It2y} = \frac{t\,(h-t)^3}{12};$

Az átszámítás steiner tétellel történik: $I_{yS} = I_{yS1} + A\,(z_S - z_{S1})^2$

In[49]:= $\texttt{It1Sy} = \texttt{It1y} + \texttt{A1}\,(\texttt{zS1} - \texttt{zS})^2$

Out[49]= 2.28378×10^6

In[50]:= $\texttt{It2Sy} = \texttt{It2y} + \texttt{A2}\,(\texttt{zS2} - \texttt{zS})^2$

Out[50]= 4.27255×10^6

A keresztmetszet teljes Iy másodrendű nyomatéka a két téglalap másodrendű nyomatékainak összege. (Csak akkor lehet összeadni, ha már átszámítottuk a közös súlyponti tengelyre)

In[51]:= `ISy = It1Sy + It2Sy`

Out[51]= 6.55634×10^6

A folyás kezdetéhez tartozó hajlító igénybevétel

$\sigma_x = \frac{M_h}{I_y} z_{max}$ egyenletből

In[52]:= `zmax = Max[zS, h - zS]`

Out[52]= 100.513

Tehát az alsó szál kezd majd megfolyni

In[53]:= $\texttt{MhF} = \frac{\sigma F\ \texttt{ISy}}{\texttt{zmax}}$

Out[53]= 65 229. σF

A teljes megfolyáshoz tartozó igénybevétel

Ebben az esetben $\sigma_x = \mathrm{sgn}(z)\,\sigma_F$

A keresztmetszet statikai nyomatéka három részből adódik:
Az első a fenti téglalaprész: $A_1\,(z_{S1} - z_S)$,
a másik kettő a középső rész közös súlypont feletti és alatti részei:
$A_{2+} = t * (h - t - z_S)$
$z_{2+} = (h - t - z_S)/2$
$A_{2-} = t * z_S$
$z_{2-} = z_S/2$

In[54]:= $\texttt{Sy} = \texttt{A1}\,(\texttt{zS1} - \texttt{zS}) + t\,\frac{(h - t - \texttt{zS})^2}{2} + t\,\frac{\texttt{zS}^2}{2}$

Out[54]= 117 017.

In[55]:= `MhK = Sy σF`

Out[55]= 117 017. σF

Az alaktényező

In[56]:=
```
λ = MhK / MhF
```

Out[56]=
```
1.79395
```

Azaz $\lambda \sim 1.8$

3. feladat

In[57]:=
```
Clear[a, b, σF]
```

Egy 62,5 mm belső és 190 mm külső sugarú cső üzemi nyomása 240 MPa.

a) Mekkora a képlékeny folyással szembeni biztonsági tényező a Mohr-elmélet alapján?

b) Mekkora a képlekeny zóna sugara 580 MPa próbanyomás után?

c) Mekkora lesz a maximális tangenciális feszültség a csőben a próbaterhelés hatására?

d) Mekkora lesz az egyenértékű maradó feszültség a cső belső peremén a tehermentesítés után?

E = 200 GPa, σ_F = 850 MPa.

In[58]:=
```
a = 0.0625;
b = 0.19;
pb = 240 × 10^6;
pp = 580 × 10^6;
σF = 850 × 10^6;
pk = 0;
```

a) Folyással szembeni biztonsági tényező

A feszültségeloszlásban szereplő paraméterek:

In[64]:= $A = \frac{pb\, a^2 - pk\, b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[64]= 2.91206×10^7

In[65]:= $B = (pb - pk) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[65]= 1.05125×10^6

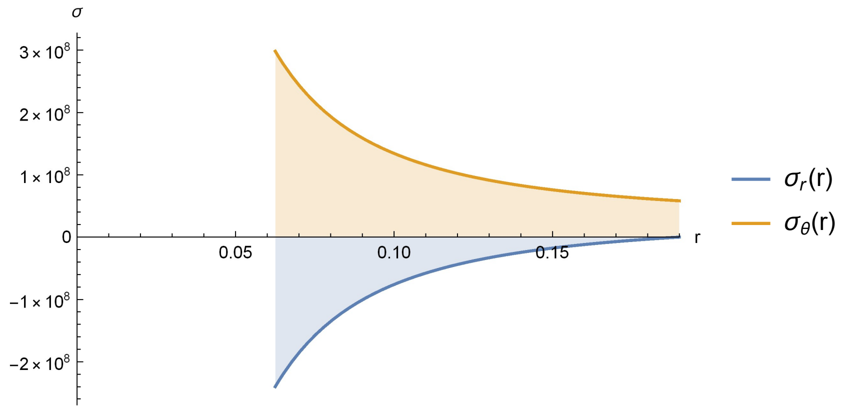
Azaz a feszültségeloszlások

In[66]:= $\sigma r[r\_] := A - \frac{B}{r^2}$

$\sigma\theta[r\_] := A + \frac{B}{r^2}$

In[68]:=
```
Plot[{σr[r], σθ[r]}, {r, a, b}, PlotLegends → {"σr(r)", "σθ(r)"},
 AxesLabel → {"r", "σ"}, PlotRange → {{0, b}, All}, Filling → Axis]
```

Out[68]=



A Mohr-féle egyenértékű feszültség:

In[69]:=
```
σeMohrMax = σθ[a] - σr[a]
```

Out[69]= 5.38241×10^{8}

Azaz 538 MPa

A biztonsági tényező

In[70]:= $nF = \frac{\sigma F}{\sigma eMohrMax}$

Out[70]= 1.57922

Azaz n ~ 1.58

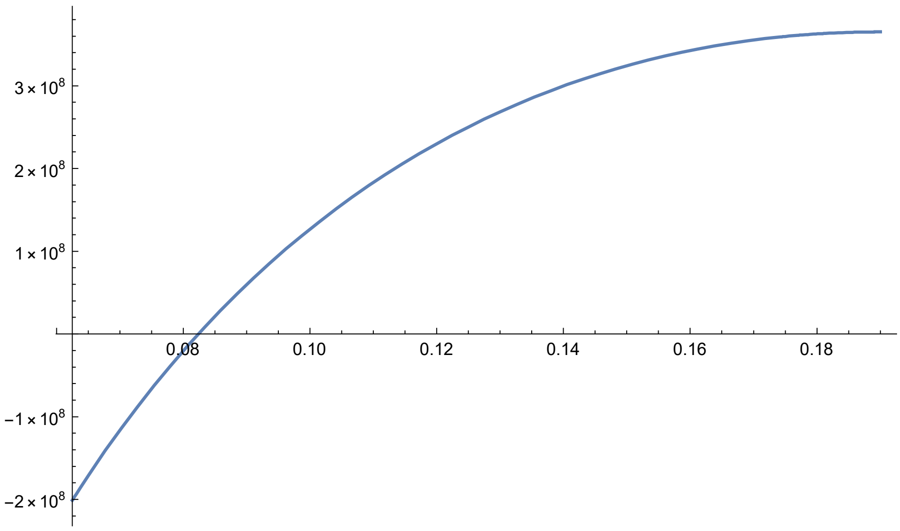
b) Képlékeny zóna sugara

A képlékeny zóna sugarának és a belső nyomásnak a kapcsolatát a
$p = \frac{\sigma_F}{2}\left(\ln\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\right] + 1 - \left(\frac{c}{b}\right)^2\right)$
összefüggés adja meg.

Ebből az egyenletből c-t kifejezni csak numerikusan lehet, ha kirajzoljuk a
$\frac{\sigma_F}{2}\left(\ln\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\right] + 1 - \left(\frac{c}{b}\right)^2\right) - p$
függvényt, akkor annak x-tengelymetszete adja meg c értékét.

In[71]:= $\text{Plot}\left[\frac{\sigma F}{2}\left(\text{Log}\left[(c/a)^2\right]+1-(c/b)^2\right)-\text{pp},\ \{c,\ a,\ b\}\right]$

Out[71]=



In[72]:= $\text{mob} = \text{FindRoot}\left[\frac{\sigma F}{2}\left(\text{Log}\left[(c/a)^2\right]+1-(c/b)^2\right)-\text{pp},\ \{c,\ a\}\right]$

Out[72]= {c → 0.0823975}

In[73]:= `c = c /. mob`

Out[73]= 0.0823975

Azaz c ~ 82.4 mm

Számológéppel ugyanez az ún. felező módszerrel tehető meg:
Első közelítésben célszerű a-t és (a+b)/2-t behelyettesíteni:

In[74]:= $f[c\_] := \frac{\sigma F}{2}\left(\text{Log}\left[(c/a)^2\right]+1-(c/b)^2\right)-\text{pp}$

In[75]:= `f[a]`

Out[75]= -2.00988×10^{8}

In[76]:= $f\left[\frac{a+b}{2}\right]$

Out[76]= 2.54985×10^{8}

Ezután az (a, $\frac{a+b}{2}$) intervallum további felezésével lehet a megoldás felé haladni:

In[77]:= $c3 = \frac{\frac{a+b}{2}+a}{2}$

Out[77]= 0.094375

In[78]:= `f[c3]`

Out[78]= 9.04366×10^{7}

In[79]:=
```
c4 = (c3 + a)/2
```
Out[79]= 0.0784375

In[80]:=
```
f[c4]
```
Out[80]= -3.43666×10^7

Mivel $f(c_4)$ negatív lett, most a c_3 és c_4 intervallum felét választjuk

In[81]:=
```
c5 = (c3 + c4)/2
```
Out[81]= 0.0864062

In[82]:=
```
f[c5]
```
Out[82]= 3.24128×10^7

Végül a c_4 és c_5 intervallum közepét:

In[83]:=
```
c6 = (c4 + c5)/2
```
Out[83]= 0.0824219

In[84]:=
```
f[c6]
```
Out[84]= 204 376.

Ez az érték (0.2 MPa) már elegendően kicsi, elfogadhatjuk a c_6 = 82.42 mm értéket.

Megjegyzés: összesen 6-szor kellett kiszámolni a $\frac{\sigma_F}{2}\left(\ln\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\right]+1-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right)-p$ függvény értékét.

c) Feszültségek a képlékeny zónában

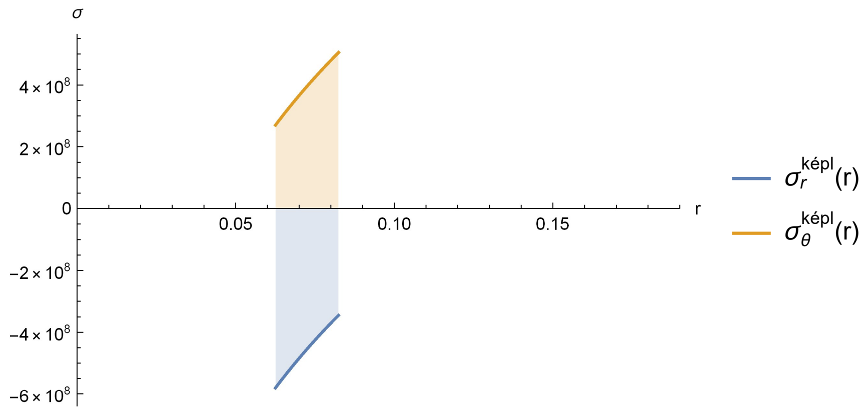
$\sigma_r^{\text{képl}}(r)=\sigma_F \ln\left(\frac{r}{a}\right)-p,\ \ \sigma_\theta^{\text{képl}}(r)=\sigma_F\left(\ln\left(\frac{r}{a}\right)+1\right)-p$

In[85]:=
```
σrk[r_] := σF Log[r/a] - pp
σθk[r_] := σF (Log[r/a] + 1) - pp
```

Feszültségeloszlások a képlékeny zónában.

In[87]:=
```
Plot[{σrk[r], σθk[r]}, {r, a, c}, PlotLegends → {"σr^képl(r)", "σθ^képl(r)"},
 AxesLabel → {"r", "σ"}, PlotRange → {{0, b}, All}, Filling → Axis]
```

Out[87]=



In[88]:= `σθk[c]`

Out[88]= 5.0493×10^8

Azaz 505 MPa

d) Egyenértékű maradó feszültség

Rugalmas tehermentesítést feltételezve a p_p nyomás esetén az A és B paraméterek:

In[89]:= $\text{App} = \frac{\text{pp}\, a^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[89]= 7.03747×10^7

In[90]:= $\text{Bpp} = (\text{pp}) \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}$ // N

Out[90]= 2.54053×10^6

A tehermentesítés feszültségeloszlásaiban A_{pp} és B_{pp} paramétereket kell használni, és a feszültségek ellentétes előjelűek lesznek:

In[91]:= $\sigma\text{rTM}[r\_] := -\left(\text{App} - \frac{\text{Bpp}}{r^2}\right)$

$\sigma\theta\text{TM}[r\_] := -\left(\text{App} + \frac{\text{Bpp}}{r^2}\right)$

A maradó feszültségek a belső peremen

In[93]:= `σrM = σrk[a] + σrTM[a]`

Out[93]= 0.

In[94]:= `σθM = σθk[a] + σθTM[a]`

Out[94]= -4.50749×10^8

Ezek különbsége adja a Mohr-féle egyenértékű maradó feszültséget:

In[95]:=

```
σeM = Abs[σθM - σrM]
```

Out[95]= 4.50749×10^8

Azaz $\sigma^{M}_{e,\text{maradó}}(a) = 450.75$ MPa